compito SCRITTO di FISICA GENERALE 3

xx xxxx 20xx

COGNOME: NOME: MATRICOLA:

ESERCIZI:

1. La distribuzione di probabilità per la posizione di un oscillatore armonico unidimensionale è data da

$$P(r,\theta,\varphi) \;=\; A\,r^2\cos^2\theta\,\mathrm{e}^{-\mu^2r^2}$$

dove la costante μ ha le dimensioni di inverso di una lunghezza. Si determini:

- la costante A
- la densità di probabilità radiale
- il valore medio e il valore più probabile per r

○

2. Per un oscillatore armonico in una dimensione con costante k si consideri la perturbazione

$$V \;=\; x\frac{K}{\tau}\mathrm{e}^{-|t|/\tau}$$

- scrivere l'equazione esatta per l'ampiezza di transizione dallo stato fondamentale a uno stato eccitato generico $|m\rangle$ se la perturbazione parte al tempo $t=0$
- calcolare la probabilità di transizione al primo ordine dallo stato fondamentale allo stato $|m\rangle$ in funzione del tempo t

○

3. La funzione d'onda di un atomo di idrogeno è data dall'espressione

$$\psi(r,\theta,\phi) \;=\; R(r)(\mathrm{sen}\theta\cos\phi+\cos\theta+1)$$

Sfruttando l'espressione data delle armoniche sferiche si determini:

- la distribuzione di probabilità per $\hat{L}^2$ (modulo quadro del momento angolare)
- la distribuzione di probabilità per $\hat{L}_z$ (momento angolare lungo z)
- la distribuzione di probabilità congiunta per $\hat{L}^2$ ed $\hat{L}_z$

$$Y_{00}=\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\quad Y_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\quad Y_{1\pm1}=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}$$

○

4. Denotando con φ_n gli autostati di un oscillatore armonico di frequenza ω si consideri lo stato

$$\rho = K\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta E_n}\varphi_n$$

con β costante positiva. Si calcoli:

- la costante di normalizzazione K
- valor medio e varianza dell'energia
- andamento nel tempo di valor medio e varianza dell'energia

◦

5. Un elettrone a riposo viene accelerato. Qual è la variazione della energia se la sua velocità finale è 0.99c? A quale velocità deve muoversi l'elettrone affinché la sua energia cinetica diventi 99 volte quella della sua massa a riposo? Quanta energia occorre perché la sua velocità triplichi a partire da b=0.25? E a partire da b=0.4?.

6. Un treno lungo 400 m (secondo le misure di un osservatore a bordo) viaggia a una velocità di 300 km/h. Due flash o colpiscono le estremità del treno simultaneamente (secondo un osservatore a terra). Qual'è la separazione temporale tra i due eventi secondo un osservatore posto nel punto medio del treno?

compito SCRITTO di FISICA GENERALE 3

xx xxxx 20xx

COGNOME: NOME: MATRICOLA:

ESERCIZI:

1. Per una particella libera in una dimensione si ottenga la dipendenza temporale di $\sigma_x^2(t)\sigma_p^2(t)$ dove

$$\sigma_A^2(t) \;=\; \langle(\hat{A} - \langle A\rangle)^2\rangle.$$

Si suggerisce di considerare l'equazione per la derivata temporale seconda di $\sigma_x^2(t)\sigma_p^2(t)$ a partire dalle equazioni per la derivata prima e sceonda di $\sigma_x^2(t)$ e $\sigma_p^2(t)$.

2. Per un oscillatore armonico di frequenza ω e massa m

- si risolvano le equazioni del moto di Heisenberg per $\hat{x}$ e $\hat{p}$
- si dia l'espressione esplicita per $\langle x\rangle_t$ e $\langle p\rangle_t$ in funzione della condizione iniziale.

3. Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale con frequenza ω e funzione d'onda iniziale

$$\psi_0(x) \;=\; K\left(1 + d\left(\frac{x}{l_{ho}}\right)^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l_{ho}}\right)^2}.$$

Si determinino:

- senza calcoli i possibili valori dell'energia misurabili
- valore di K e stato al tempo t
- se ci sono valori di d per i quali si verifica una situazione notevole

Si ricorda l'espressione delle autofunzioni:

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} l_{ho}}} H_n\left(\frac{x}{l_{ho}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{l_{ho}^2}\right) \qquad l_{ho} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$H_0(x) = 1 \quad H_1(x) = 2x \quad H_2(x) = 4x^2 - 2$$

4. Un sistema a due livelli parte nello stato fondamentale di

$$H_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se ad un certo tempo t_0 viene accesa una perturbazione

$$H_f = \frac{\hbar\omega_1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dopo quanto tempo il sistema si troverà per la prima volta nello stato eccitato di H_0?

5. Un elettrone che parte da fermo viene accelerato da una differenza di potenziale di 1.5MV. Determinare la sua velocità al termine dell'accelerazione e confrontarla col valore che avrebbe secondo la meccanica newtoniana.

6. Un osservatore S osserva che due eventi simultanei sono separati da una distana di 300 km. Quale intervallo di tempo separa i due eventi per un osservatore che misura una distanza di 400 km tra di essi?

compito SCRITTO di FISICA GENERALE 3

xx xxxx 20xx

COGNOME: NOME: MATRICOLA:

ESERCIZI:

1. Si consideri lo stato coerente normalizzato

$$|z\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle,$$

con $\{|n\rangle\}$ autovettori dell'operatore numero $a^\dagger a$, come stato iniziale $\psi(0)$ di un sistema che evolva sotto l'azione dell'Hamiltoniana $H = \hbar g (a^\dagger a)^2$ con $g \in \mathbb{R}$:

- a partire dall'identità $a|z\rangle = z|z\rangle$ si trovi l'espressione dello stato nella rappresentazione delle posizioni, lasciando solo indicata la costante di normalizzazione
- determinare $\psi(t)$ e per $t = \pi/2g$ scriverlo come sovrapposizione coerente di due vettori
- si supponga $z = i\rho$ con $\rho \in \mathbb{R}$ e si calcoli il valor medio di posizione e momento per $|z\rangle$
- descrivere qualitativamente e poi con formule la distribuzione di probabilità per posizione e momento dello stato $\psi(\pi/2g)$ prima ottenuto per $z = i\rho$.

  Si ricorda che $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{e}^{-ax^2} = \sqrt{\pi/a}\, \mathrm{e}^{-k^2/(4a)}$.

∘

2. In $\mathcal{H}=\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$ sono descritti due sistemi e e p. Si considerino per essi le osservabili

$$S_e(\alpha) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$
$$S_p(\beta) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$$

e si definisca il coefficiente di correlazione fra di esse tramite la formula

$$C(\alpha,\beta) = \frac{\langle S_e(\alpha)\otimes S_p(\beta)\rangle - \langle S_e(\alpha)\rangle\langle S_p(\beta)\rangle}{\sqrt{\langle(S_e^2(\alpha))\rangle\langle S_p^2(\beta)\rangle}}.$$

Nell'espressione laddove opportuno si è inteso l'operatore in forma di prodotto tensore con l'identità. In $\mathbb{C}^2$ denotiamo con $\{|+\rangle,|-\rangle\}$ la base corrispondente ai vettori $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Si determini:

- $S_e^2(\alpha)$ e $S_p^2(\beta)$
- l'espressione matriciale per $S_e(\alpha)\otimes\mathbb{1}$, $\mathbb{1}\otimes S_p(\alpha)$ ed $S_e(\alpha)\otimes S_p(\beta)$
- $C(\alpha,\beta)$ se lo stato su cui è preso il valor medio è $|+\rangle_e\otimes|-\rangle_p$
- $C(\alpha,\,\beta)$ se lo stato su cui è preso il valor medio è $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_e\otimes|-\rangle_p - |-\rangle_e\otimes|+\rangle_p)$, commentando il confronto fra i risultati

○

3. Si considerino gli usuali operatori di momento angolare $\{\hat{L}_i\}_i$ e le relative armoniche sferiche Y_{lm}. Si calcolino:

- valori attesi e varianze degli operatori $\{\hat{L}_i\}$ su Y_{lm}
- si scrivano le relazioni di incertezza di Heisenberg per gli operatori di momento angolare e si valutino per Y_{lm}
- si confrontino i due risultati
  Si ricorda che $\hat{L}_\pm Y_{lm}=\hbar\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)}\,Y_{lm\pm1}$.

○

4. Si consideri un oscillatore armonico in una dimensione di massa m e frequenza ω sottoposto a una perturbazione della forma

$$V(x,t) = A\,x^2 \mathrm{e}^{-(\lambda t)^2}$$

con $A>0$ e $\lambda\geqslant 0$. Si calcoli :

- per $\lambda=0$ i nuovi livelli energetici
- per $\lambda>0$ e supponendo l'oscillatore partire a $t=-\infty$ dallo stato fondamentale la probabilità al primo ordine perturbativo che dopo un tempo arbitrariamente lungo l'oscillatore sia in uno stato eccitato

- sempre per $\lambda > 0$ e relativamente allo stesso intervallo di tempo la probabilità partendo dallo stato per $n = 2$ di non trovarsi più in tale stato

◦

5. Due astronauti partono simultaneamente dalla Terra per raggiungere un pianeta distante 2 anni-luce (sarebbe un grande scoperta, visto che la stella più vicina a noi dista circa 4 anni luce). Il primo viaggia a velocità $4/5\ c$, il secondo a velocità $3/5\ c$. Prima della partenza gli orologi dei due astronauti vengono sincronizzati. Quando entrambi sono arrivati sul pianeta, quale differenza di tempo segnano i loro orologi?

6. Un muone (massa del muone 105 MeV) viene inviato su un rilevatore di particelle che ne misura la quantità di moto trovando il valore di 360 MeV. Determinare l'energia totale e la velocità del muone sia in MeV, sia in unità del SI.

7. Versi danteschi a libera scelta o inediti.

---

compito SCRITTO di FISICA GENERALE 3

xx xxxx 20xx

COGNOME: NOME: MATRICOLA:

ESERCIZI:

1. Lo stato fondamentale dell'atomo di idrogeno in coordinate polari, denotando con r la distanza fra nucleo ed elettrone, è dato da

$$u(r, \vartheta, \varphi) \;=\; \alpha \mathrm{e}^{-\beta r}.$$

Considerando che l'Hamiltoniana dell'atomo di idrogeno è

$$\hat{H} \;=\; \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\hat{\boldsymbol{x}}|},$$

con e ed m_e carica e massa dell'elettrone rispettivamente, e che il Laplaciano agendo su una funzione dipendente solo da r prende la forma $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)$, si determinino:

- le costanti α e β chiarendone il significato fisico
- il valore di energia dello stato fondamentale in funzione delle costanti assegnate
- il valor medio di energia cinetica e potenziale nello stato fondamentale
- il valore medio e il valore più probabile per r

2. Si consideri la matrice

$$\rho \;=\; \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

con $\boldsymbol{a}$ vettore a 4 componenti e $\boldsymbol{\sigma} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$. Si determini:

- per quali valori di $\boldsymbol{a}$ si ha che ρ è un operatore statistico
- per quali valori di $\boldsymbol{a}$ si ha che ρ è uno stato puro
- la rappresentazione ortogonale di ρ per il caso di stato puro

3. Si determini, data la Hamiltoniana

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & -E_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ E_1 & 0 \end{pmatrix}:$$

- lo spettro di $\hat{H}$, commentando il risultato
- considerando come stato iniziale un vettore della forma $\psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, se e per quale tempo il sistema si troverà ancora nello stesso stato
- la distribuzione di probabilità per l'osservabile $C = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ al generico tempo t per $\psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Si mostri che vale la seguente generalizzazione delle relazioni di incertezza di Heisenberg

$$(\Delta_\psi x)^2 (\Delta_\psi p)^2 - (\Delta_\psi x\, p)^2 \geqslant \frac{\hbar^2}{4},$$

dove oltre alle usuali varianze si è introdotta la quantità

$$\Delta_\psi x\, p = \frac{1}{2} \langle \{\hat{x}, \hat{p}\} \rangle_\psi - \langle \hat{x} \rangle_\psi \langle \hat{p} \rangle_\psi.$$

Si consideri poi la collezione di stati $|z\rangle$, detti coerenti, dati dall'espressione $|z\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ dove $|n\rangle$ denota lo stato numero per l'oscillatore armonico e $z \in \mathbb{C}$. Valgono le proprietà

$$\langle z|w\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|z-w|^2 - i\mathrm{Im}(zw^*)}, \qquad \hat{a}|z\rangle = z|z\rangle, \qquad \langle z|\hat{a}^\dagger = \langle z|z^*.$$

Si calcoli $\Delta_\psi x\, p$ per gli stati

- $|\psi\rangle = |z\rangle$
- $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \langle z|-z\rangle)}} (|z\rangle + |-z\rangle)$, commentando il significato fisico dello stato considerato
- si valuti $(\Delta_\psi x)^2 (\Delta_\psi p)^2 - (\Delta_\psi x\, p)^2$ per gli stati considerati e si commenti il risultato ottenuto

SCRITTO di FISICA GENERALE 3

29 GENNAIO 2024

COGNOME: NOME: MATRICOLA:

ESERCIZI:

1. Per lo stato di due particelle

$$\psi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \left(\frac{\sigma^2 \tau^2}{\pi}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1^0)^2 + \frac{i}{\hbar} \boldsymbol{p}_1^0 \cdot (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1^0) - \frac{\tau^2}{2}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_2^0)^2 + \frac{i}{\hbar} \boldsymbol{p}_2^0 \cdot (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_2^0)\right)$$

si calcoli la distribuzione di probabilità congiunta per

- $\hat{\boldsymbol{x}}_1$ e $\hat{\boldsymbol{x}}_2$
- $\hat{\boldsymbol{x}}_1$ e $\hat{\boldsymbol{p}}_2$

2. Al tempo $t=0$ la funzione d'onda di un atomo di idrogeno è data da:

$$\psi(\boldsymbol{r},0) \;=\; N[2u_{100}(\boldsymbol{r}) + u_{210}(\boldsymbol{r}) + \sqrt{2}u_{211}(\boldsymbol{r}) + \sqrt{3}u_{21-1}(\boldsymbol{r})],$$

dove $u_{nlm}(\boldsymbol{r})$ indica l'autofunzione relativa ai numeri quantici indicati. Si calcoli:

- la costante di normalizzazione N
- il valore di aspettazione dell'energia
- l'evoluto temporale $\psi(\boldsymbol{r},t)$
  - ○

3. Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale con frequenza ω nell'n-esimo stato eccitato per l'energia e si calcolino:

- $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$ e $\langle x\,p\rangle$
- σ_x^2 e σ_p^2

Si ricordano le relazioni: $\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)$ e $\hat{p}=-i\sqrt{\frac{\hbar\,m\,\omega}{2}}(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)$.

4. Si consideri una terna di operatori $\hat{L}_i$ che soddisfino alle parentesi di commutazione caratteristiche del momento angolare:

- che cosa si può dire del prodotto delle varianze di questi operatori?
- mostrare che i valori medi di $\hat{L}_1$ e $\hat{L}_2$ calcolati in un autostato comune di $\hat{L}^2$ e $\hat{L}_3$ sono nulli
- si mostri che le varianze hanno un minimo per $m=\pm l$.

Si ricorda che $\hat{L}_\pm|l,m\rangle=\hbar\sqrt{(l\pm m+1)(l\mp m)}\,|l,m\pm 1\rangle$.

○

5. Due navicelle partono simultaneamente dalla Terra per raggiungere una stazione spaziale distante 8 anni luce. La prima viaggia a velocità 3/5 c, la seconda a velocità 4/5 c. Prima della partenza gli orologi delle due navicelle vengono sincronizzati. Quando entrambe le navicelle sono arrivate sul pianeta, quale differenza di tempo segnano i loro orologi?

6. Un protone (la massa del protone è di poco meno di 1 GeV) viene inviato su un rilevatore di particelle che ne misura la quantità di moto trovando il valore di 2 GeV. Determinare la velocità del protone e la sua energia sia in GeV, sia in unità del SI.