

# FISICA GENERALE 3

## ESERCIZI:

1. Si consideri in una dimensione lo stato di  $L^2(\mathbb{R})$

$$\psi(x) = N e^{-\frac{|x|}{a}} \quad a > 0$$

determinare la costante di normalizzazione e trovare distribuzione di probabilità per posizione e momento.

→Hints of solution

$$\begin{aligned} 1 &= 2N \int_0^\infty dr e^{-2(r/a)} \\ p(x) &= |\psi(x)|^2 \\ w(p) &= \frac{|\hat{\psi}(p)|^2}{2\pi\hbar} \end{aligned}$$

2. Si consideri una particella libera in una dimensione nello stato iniziale

$$\psi(x, 0) = N \left[ e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}(x+x_0)^2} + e^{-\frac{i}{\hbar} p_0 x} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}(x-x_0)^2} \right]$$

dove la costante  $\sigma$  ha le dimensioni di una lunghezza. Si determini:

- la costante di normalizzazione  $N$
- la funzione d'onda nella descrizione dei momenti  $\hat{\psi}(p, 0)$
- lo stato  $\hat{\psi}(p, t)$  evoluto al tempo  $t$  nella descrizione dei momenti
- la distribuzione di probabilità per la posizione al tempo  $t$ , commentando il risultato.

Si ricorda che  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} e^{-ax^2} = \sqrt{\pi/a} e^{-k^2/(4a)}$ .

→Hints of solution

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{N}{\sqrt{w(t)}} e^{-i\frac{\hbar k_0^2}{2m}t} \left\{ e^{ik_0 x} e^{-\frac{1}{4\sigma^2 w(t)}(x+x_0-v_0 t)^2} + (k_0, x_0 \rightarrow -k_0, -x_0) \right\} \\ \tilde{\psi}(p, t) &= N \sqrt{4\pi\sigma^2} e^{-ik_0 x_0} e^{-i\frac{\hbar k_0^2}{2m}t} \left\{ e^{ik_0 x_0} e^{-\sigma^2(k-k_0)^2} + (k_0, x_0 \rightarrow -k_0, -x_0) \right\} \\ |\psi(x, t)|^2 &= \frac{|N|^2}{|w(t)|} e^{-i\frac{\hbar k_0^2}{2m}t} \left\{ e^{-\frac{1}{2\sigma^2 |w(t)|^2}(x+x_0-v_0 t)^2} + (k_0, x_0 \rightarrow -k_0, -x_0) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos \left[ \frac{2x}{|w(t)|^2} \left( k_0 + \frac{\hbar x_0}{4m\sigma^4} t \right) \right] e^{-\frac{1}{2\sigma^2 |w(t)|^2}(x^2+(x_0-v_0 t)^2)} \right\} \\ |\hat{\psi}(p, t)|^2 &= |N|^2 (4\pi\sigma^2) \left\{ e^{-2\sigma^2(k-k_0)^2} + (k_0, x_0 \rightarrow -k_0, -x_0) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos(2k x_0) e^{-2\sigma^2(k^2+k_0^2)} \right\} \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} N &= \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-x_0^2/2\sigma^2 - 2\sigma^2 k_0^2}}} \\ w(t) &= 1 + i \frac{\hbar}{2m\sigma^2} t \end{aligned}$$

3. Data l'Hamiltoniana

$$H = \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 & 0 \\ 0 & -\hbar\omega_0 \end{pmatrix}$$

si dia distribuzione di probabilità e varianza per energia e operatore  $S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x$  al tempo  $t$  per gli stati iniziali

$$\rho_1(0) = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad \rho_2(0) = \begin{pmatrix} 3/4 & -i\sqrt{3}/4 \\ i\sqrt{3}/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Si dia la rappresentazione spettrale per  $\rho_1(0)$  e  $\rho_2(0)$  e si precisi se gli stati sono puri o miscela. Si commentino i risultati ottenuti.

→Hints of solution

$$\begin{aligned} \rho_1(0) &= \frac{3}{4}P_{u_+} + \frac{1}{4}P_{u_-} \\ \rho_2(0) &= P_{\frac{\sqrt{3}}{4}u_+ - i\frac{1}{4}u_-} \\ \rho_1(t) &= \rho_1(0) \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \rho_2(t) &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -i\sqrt{3}e^{i(2\omega_0)t} \\ +i\sqrt{3}e^{i(2\omega_0)t} & 1 \end{pmatrix} \\ P_t(E = +\hbar\omega_0 | \rho_{1,2}(0)) &= \frac{3}{4} \\ P_t(E = -\hbar\omega_0 | \rho_{1,2}(0)) &= \frac{1}{4} \\ P_t\left(S_x = \pm\frac{\hbar}{2} | \rho_1(0)\right) &= \frac{1}{2} \\ P_t\left(S_x = \pm\frac{\hbar}{2} | \rho_2(0)\right) &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2\omega_0 t)\right) \\ \Delta E(t | \rho_{1,2}(0)) &= \frac{3}{4}(\hbar\omega_0)^2 \\ \Delta S_x(t | \rho_1(0)) &= \frac{\hbar^2}{4} \\ \Delta S_x(t | \rho_1(0)) &= \frac{\hbar^2}{4} \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2(2\omega_0 t)\right) \end{aligned}$$

4. Si consideri l'oscillatore armonico in una dimensione con Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2.$$

Si scrivano

- le equazioni di Ehrenfest per posizione e momento
- la loro soluzione in funzione dei dati iniziali  $\langle x(0) \rangle$  e  $\langle p(0) \rangle$

→Hints of solution

$$\begin{aligned} \frac{d\langle x \rangle_t}{dt} &= \frac{\langle p \rangle_t}{m} \\ \frac{d\langle p \rangle_t}{dt} &= -m\omega^2 \langle x \rangle_t \\ \langle x \rangle_t &= \langle x(0) \rangle \cos(\omega t) + \frac{\langle p(0) \rangle}{m\omega} \sin(\omega t) \\ \langle p \rangle_t &= -m\omega \langle x(0) \rangle \sin(\omega t) + \langle p(0) \rangle \cos(\omega t) \end{aligned}$$

5. Per lo stato di due particelle

$$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \left(\frac{\sigma^2 \tau^2}{\pi}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^0)^2 + \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_1^0 \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^0) - \frac{\tau^2}{2}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2^0)^2 + \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_2^0 \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2^0)\right)$$

si calcoli la distribuzione di probabilità congiunta per

- $\hat{\mathbf{x}}_1$  e  $\hat{\mathbf{x}}_2$
- $\hat{\mathbf{x}}_1$  e  $\hat{\mathbf{p}}_2$

→Hints of solution

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}_1 \in V_1, \mathbf{x}_2 \in V_2) &= \int_{V_1} d^3 \mathbf{x}_1 \int_{V_2} d^3 \mathbf{x}_2 |\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 \\ \hat{\psi}(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_2) &= \int_{V_2} d^3 \mathbf{x}_2 \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{p}_2} \\ P(\mathbf{x}_1 \in V_1, \mathbf{p}_2 \in W_2) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{V_1} d^3 \mathbf{x}_1 \int_{W_2} d^3 \mathbf{p}_2 |\hat{\psi}(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_2)|^2 \end{aligned}$$

6. Dati i vettori

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -i \end{pmatrix}, \quad \phi_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

si consideri l'operatore statistico  $\rho = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{3} |\phi_i\rangle \langle \phi_i|$ . Si dia la probabilità di trovare il sistema negli stati  $\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\chi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Si verifichi se i  $\phi_i$  sono ortogonali e si dia la rappresentazione spettrale per  $\rho$ .

→Hints of solution

$$\begin{aligned} P(\chi_i) &= \text{Tr } \rho |\chi_i\rangle \langle \chi_i| \\ &= \langle \chi_i | \rho | \chi_i \rangle \\ \rho &= \sum_{\text{eigenvalues}} \text{eigenvalue} |\text{eigenvector}\rangle \langle \text{eigenvector}| \end{aligned}$$

7. Si considerino le matrici

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e si verifichi che gli operatori  $J_k = \hbar A_k$  definiscono un momento angolare.

→Hints of solution

$$\begin{aligned} [A_1, A_2] &= i A_3 \\ [A_2, A_3] &= i A_1 \\ [A_3, A_1] &= i A_2 \end{aligned}$$