Stati invarianti per semigruppi Markoviani quantistici

Lo scopo di questa lezione è considerare l'evoluzione di un sistema quantistico descritta da un semigruppo Markoviano quantistico (SMQ) e rispondere alle seguenti domande:

i) quando il sistema ammette uno stato invariante?
ii) Come è fatto l'insieme degli stati invarianti?
iii) Quando esiste un unico stato invariante verso cui il sistema si rilassa?

Ci concentreremo su sistemi con un numero finito di gradi di libertà.

Concetti fondamentali:
- Ricorrenza
- Kadison-Schwarz positivity
- Reducibility

Scaletta

1. Riposo veloce della nozione di stato quantistico e SMQ.
2. Esistenza di uno stato invariante
3. Ricorrenza e transienza
4. Insieme degli stati invarianti
5. Convergenza verso un unico stato invariante

1. Stati quantistici e SMQ

⊙ Si consideri un sistema quantistico descritto dallo spazio di Hilbert $\mathfrak{h} = \mathbb{C}^d$. Le funzioni d'onda $|\psi\rangle \in \mathfrak{h}$ non sono sufficienti per descrivere lo stato di un sistema quantistico aperto, ma è necessario ricorrere alle matrici di densità

$$S(\mathfrak{h}) := \{ x \in M_d(\mathbb{C}) : x \geq 0, \ \mathrm{tr}(x) = 1 \}.$$

Infatti, considerando due sistemi quantistici descritti dagli spazi $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$, anche se si assume che il loro stato congiunto sia descritto da una funzione d'onda $|\psi\rangle \in \mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2$, lo stato ridotto del primo sistema, per esempio, è descritto dalla matrice di densità

$$\rho_1 = \mathrm{tr}_2(|\psi\rangle\langle\psi|),$$

che non corrisponde ad alcun vettore in $\mathfrak{h}_1$ a meno che

$|\psi\rangle$ non sia uno stato prodotto.

Inoltre le matrici di densità sono in grado di descrivere l'incertezza nello stato iniziale del sistema perché costituiscono un insieme chiuso per le combinazioni convesse.

Se si considera un insieme di stati puri $\{|\psi_i\rangle\}_{i\in I}$ che rappresentano lo stato del sistema con probabilità (p_i), allora la legge di qualunque osservabile può essere ottenuta considerando lo stato

$$\rho = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|.$$

Infine, descrivendo le misurazioni dicotomiche tramite l'uso degli effetti, il Teorema di Busch (2003) ci assicura che le matrici di densità corrispondono a tutte e sole le distribuzioni di probabilità generalizzate.

L'evoluzione più generale a cui può andare incontro lo stato di un sistema quantistico è descritta da un canale quantistico, ovvero una mappa

$$\phi : S(h) \longrightarrow S(h)$$

- affine, ovvero $\qquad \rho, \sigma \in S(h)$

$$\phi(\rho\lambda + \sigma(1-\lambda)) = \lambda\phi(\rho) + (1-\lambda)\phi(\sigma) \qquad \lambda \in (0,1)$$

- completamente positiva, ovvero

$$\phi \otimes \mathbb{I}d : S(h\otimes\mathbb{C}^n) \longrightarrow S(h\otimes\mathbb{C}^n).$$

Possiamo estendere ϕ in maniera unica a $M_d(\mathbb{C})$ in modo che sia lineare, preservi la traccia e sia CP.

ϕ^* è l'unica mappa tale che

$$\mathrm{tr}(\phi(x)y) = \mathrm{tr}(x\,\phi^*(y)) \qquad \forall x,y \in M_d(\mathbb{C})$$

ϕ^* descrive l'evoluzione delle osservabili ed è

- lineare $\qquad$ - unitale, i.e. $\phi^*(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$.
- completamente positiva

$\Rightarrow$ ϕ^* soddisfa la disuguaglianza di Kadison-Schwarz.

(KS) $$\boxed{\phi^*(x^*x) - \phi^*(x^*)\phi(x) \geq 0}$$

Prova usando la 2-positività

Esercizio

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & a \\ a^* & b \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{se} \quad b \geq a^*a$$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & a \\ a^* & a^*a \end{pmatrix} \geq 0 \overset{2\text{-pos}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} \overset{=\mathbb{1}}{\phi^*(\mathbb{1})} & \phi^*(a) \\ \phi^*(a^*) & \phi^*(a^*a) \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{se} \quad \phi^*(a^*a) - \phi^*(a^*)\phi^*(a) \geq 0$$

Se x è tale che

$$\phi^*(x^*x) = \phi^*(x^*)\phi^*(x), \quad \phi^*(xx^*) = \phi^*(x)\phi(x^*)$$

allora $\underline{\phi^*(xy) = \phi^*(x)\phi^*(y), \quad \phi^*(yx) = \phi^*(y)\phi^*(x)}$

Proprietà moltiplicativa

$$\Lambda(x,y) = \phi^*(x^*y) - \phi^*(x^*)\phi^*(y)$$

$$0 \leq \Lambda(zx+y, zx+y) = |z|^2\Lambda(x,x) + 2\,\mathrm{Re}(\bar{z}\,\Lambda(x,y)) + \underset{=0}{\Lambda(y,y)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Allora $\Lambda(x,y) = 0$. Lo stesso vale per $\Lambda(x^*, y) = 0$.

Basta notare che $\Lambda(x,y)^* = \phi^*(y^*x) - \phi^*(y^*)\phi^*(x)$ e possiamo concludere.

- $\phi^*: M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ soddisfa (KS), ma non è 2-pos.
$$A \mapsto \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}\mathrm{tr}(A)\mathbb{1}$$

Se consideriamo l'evoluzione di un sistema quantistico nel tempo, questa è descritta da una famiglia di canali quantistici $(\phi_t)_{t\geq 0}$ e se chiediamo

- la continuità delle traiettorie $t \mapsto \phi_t(\rho)$ $\rho \in S(\mathcal{H})$
- la perdita di memoria
$$\phi_{t+s} = \phi_t\phi_s = \phi_s\phi_t, \quad t,s \geq 0$$

Semigruppo Markoviano Quantistico

allora

il risultato di Gorini - Kossakowski - Sudarshan - Lindblad (1976) ci dice che

$$\phi_t = e^{t\mathcal{L}}$$

con $\mathcal{L}(\varrho) = i[H,\varrho] - \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{m}\left(L_e^* L_e \varrho - 2 L_e \varrho L_e^* + \varrho L_e^* L_e\right)$ (★)

$H, L_e \in M_d(\mathbb{C})$, $H = H^*$

Si osservi che H e $(L_e)_{e=1}^{m}$ non sono unici, ma se chiedo che

(i) $tr(L_e) = 0$ $\forall e$ (ii) $\mathbb{1}, L_e$ sono l.i, allora se anche $\bar{H}$ e $(\bar{L}_e)_{e=1}^{n}$ soddisfano (★), (i) e (ii) si ha

- $\bar{H} = H + \alpha\mathbb{1}$ • $n = m$ • $\bar{L}_e = \sum_{f=1}^{m} u_{fe} L_f$ per una matrice unitaria (u_{fe}).

⊙ $\varrho \in S(\mathfrak{h})$ è uno stato invariante per l'evoluzione se

$$\boxed{\phi_t(\varrho) = \varrho \quad \forall t \geq 0}$$

2. Esistenza di uno stato invariante

Ogni SMQ ammette uno stato invariante.

Chiuso e limitato

Questo deriva dal fatto che $S(\mathfrak{h})$ è compatto (quando $\dim(\mathfrak{h}) < +\infty$) come sottoinsieme di $(M_d(\mathbb{C}), \| \|_1)$

Infatti consideriamo una successione di tempi $t_N \to +\infty$ ed uno stato iniziale qualunque η, allora

$$\left\{ \frac{1}{t_N}\int_0^{t_N} \phi_s(\eta)\,ds \right\}_{N=1}^{+\infty}$$

ammette un punto di accumulazione $\varrho \in S(\mathfrak{h})$. Al più passando ad una sottosuccessione, possiamo assumere che

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{t_N}\int_0^{t_N} \phi_s(\eta)\,ds = \varrho .$$

Dunque,

$$\phi_t(\rho) = \phi_t\left(\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{t_N}\int_0^{t_N} \phi_s(\eta)\,ds\right) =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \phi_t\left(\frac{1}{t_N}\int_0^{t_N} \phi_s(\eta)\,ds\right) =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{t_N}\int_0^{t_N} \phi_{t+s}(\eta)\,ds =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{t_N}\int_t^{t_N+t} \phi_s(\eta)\,ds =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{t_N}\int_0^{t_N} \phi_s(\eta)\,ds + \underbrace{\frac{1}{t_N}\left(\int_{t_N}^{t_N+t}\phi_s(\eta)\,ds - \int_0^t \phi_s(\eta)\,ds\right)}_{\|\cdot\|_1 \le \frac{2t}{t_N}} =$$

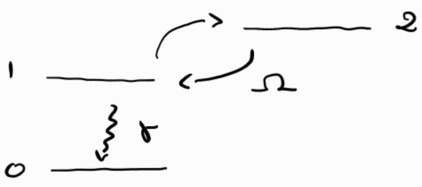
$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{t_N}\int_0^{t_N} \phi_s(\eta)\,ds = \rho.$$

Dunque ρ é uno stato invariante.

3. Ricorrenza e transienza

Gli stati invarianti sono una nozione fondamentale per lo studio dell'evoluzione per lunghi tempi. Una prima importante proprietà è che l'evoluzione "tende ad andare dove vivono gli stati invarianti".

Esempio:



$\mathcal{L} \leftrightarrow \{H, L\}$ $\quad \mathcal{H} = \mathbb{C}^3$

$H = \Omega(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$

$L = |0\rangle\langle 1|$

Questa semplice dinamica ammette come unico stato invariante $|0\rangle\langle 0|$ e l'intuizione (giustamente) suggerisce che

$$\lim_{t\to+\infty} \phi_t(\eta) = |0\rangle\langle 0| \quad \forall \eta \in S(\mathcal{H}).$$

"Dove vivono gli stati invarianti"

- $x \in M_d(\mathbb{C})$ $\quad x \geq 0 \quad$ $supp(x) = Ker(x)^{\perp}$
- Dati due sottospazi h_1 e h_2, esiste il più piccolo sottospazio che li contiene ed è dato da

$$\sup\{h_1, h_2\} = span_{\mathbb{C}}\{v \in h_1, w \in h_2\}$$

Definiamo il sottospazio ricorrente come

$$\mathcal{R} := \sup\{supp(\rho) : \rho \text{ stato invariante}\}$$

e chiamiamo il suo complemento ortogonale $\mathcal{T}$ sottospazio transiente.

Valgono le seguenti proprietà:

i) Esiste uno stato invariante ρ tale che $\mathcal{R} = supp(\rho)$.

ii) $\forall \eta \in S(h)$ tale che $supp(\eta) \subseteq \mathcal{R}$, vale che

$$supp(\Phi_t(\eta)) \subseteq \mathcal{R} \qquad \forall t \geq 0.$$

$\mathcal{R}$ è chiuso rispetto all'evoluzione

iii) Sia $p_{\mathcal{T}}$ la proiezione ortogonale corrispondente a $\mathcal{T}$. Vale

$$(*) \qquad \lim_{t \to +\infty} tr(\Phi_t(\eta) p_{\mathcal{T}}) = 0 \qquad \forall \eta \in S(h)$$

$\mathcal{R}$ è assorbente

e per ogni altra proiezione q che soddisfa $(*)$, si ha $q \leq p_{\mathcal{T}}$

- i) Dalla definizione di $\mathcal{R}$ si può scegliere una collezione finita di stati invarianti $\{\rho_n\}_{n=1}^{N}$ tale che

$$\mathcal{R} = \sup\{supp(\rho_n) : n = 1 \dots N\}.$$

Si definisca $\bar{\rho} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \rho_n$; si può notare che $\mathcal{R} = supp(\bar{\rho})$ e

$$\Phi_t(\bar{\rho}) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \Phi_t(\rho_n) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \rho_n = \bar{\rho}.$$

ii) Se $\mathrm{supp}(\eta) \leq R$, esiste $\alpha > 0$ tale che

$$\eta \leq \alpha \bar{\varrho}.$$

le supporto di ogni stato invariante riduce la dinamica!!

Allora $\phi_t(\eta) \leq \alpha\, \phi_t(\bar{\varrho}) = \alpha \bar{\varrho}$, dunque

$$\mathrm{supp}(\phi_t(\eta)) \leq R.$$

iii) $\mathcal{T} \leq R^{\perp}$ perché, per ogni stato invariante ϱ

$$\mathrm{tr}(\varrho\, p_{\mathcal{T}}) = \lim_{t \to +\infty} \mathrm{tr}(\phi_t(\varrho)\, p_{\mathcal{T}}) = 0.$$

Si può saltare

$R^{\perp} \leq \mathcal{T}$

Per il punto ii) si ha che per ogni stato η tale che $\mathrm{supp}(\eta) \leq R$, vale

$$\mathrm{tr}(\phi_t(\eta)\, p_R^{\perp}) = 0. \quad \forall t \geq 0$$

Questo implica che $p_R \phi_t^*(p_R^{\perp}) p_R = 0$ e, dunque, $\phi_t^*(p_R^{\perp}) \leq p_R^{\perp}$.

Perciò si ha che $\{\phi_t^*(p_R^{\perp})\}$ è monotona decrescente ed ammette un limite x tale che $\phi_t^*(x) = x$.

Tuttavia per ogni stato η, si ha

$$\mathrm{tr}(\eta x) = \lim_{t \to +\infty} \mathrm{tr}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{t}\int_0^t \Phi_s(\eta)\, ds}_{\text{Tutti i punti di accumulazione sono stati invarianti.}}\; x\Big) = 0$$

e, quindi, $x = 0$. Dalla definizione di $\mathcal{T}$ segue che $R^{\perp} \leq \mathcal{T}$.

Ricapitolando,

- per tempi lunghi l'evoluzione è assorbita in R
- R riduce la dinamica (così come il supporto di un qualunque stato invariante)

$$\phi_t^R : S(R) \longrightarrow S(R)$$

è ancora un SNCQ e ammette uno stato invariante con supporto pieno.

- La restrizione ϕ_t^R è sufficiente per studiare la struttura dell'insieme degli stati invarianti e la convergenza ad un unico stato invariante.

Mostreremo che vale la proprietà

$$\lim_{t \to +\infty} \phi_t(\eta) = \rho \qquad \forall \eta \in S(h)$$

$$\Downarrow \ \Uparrow$$

$$\lim_{t \to +\infty} \phi_t(\eta) = \rho \qquad \forall \eta \in S(R).$$

4. Struttura dell'insieme degli stati invarianti.

Possiamo supporre che esista uno stato invariante $\rho > 0$.

A meno di mettersi nella base giusta, si ha che

- $h = \bigoplus_\alpha h_\alpha^L \otimes h_\alpha^R$
- esiste una collezione di stati σ_α con $\mathrm{supp}(\sigma_\alpha) = h_\alpha^R$

tali che l'insieme degli stati invarianti si può scrivere come

$$\left\{ \sum_\alpha \omega_\alpha \otimes \sigma_\alpha \ : \ \omega_\alpha \geq 0, \ \sum_\alpha \mathrm{tr}(\omega_\alpha) = 1 \right\}.$$

a piacere in $B(h_\alpha^L)$

- A priori potrebbe essere un qualunque sottoinsieme convesso di $S(h)$
- Gli stati invarianti estremali, ovvero che non sono scrivibili come combinazione convessa non banale di altri stati invarianti, sono del tipo

$|u\rangle\langle u| \otimes \sigma_\alpha$ per qualche α e $|u\rangle \in h_\alpha^L$

Se due stati estremali non hanno supporto ortogonale tra di loro, allora fanno parte di un'intera sfera di Bloch di stati invarianti:

$|u\rangle\langle u| \otimes \sigma_\alpha$ e $|v\rangle\langle v| \otimes \sigma_\beta$ non hanno supporti ort.

$$\Updownarrow$$

$\alpha = \beta$ e $\langle v, u\rangle \neq 0$

Allora $\dim(h_\alpha^L) \geq 2$ e $\omega \otimes \sigma_\alpha$ è uno stato invariante $\forall \omega \in S(\operatorname{span}\{|u\rangle, |v\rangle\})$.

- Si può decomporre h (in maniera in generale non unica) nella somma diretta di sottospazi ortogonali che
  - riducono l'evoluzione
  - la cui riduzione ammette un unico stato invariante.

$$h = \bigoplus_\alpha \bigoplus_{i \in I_\alpha} \mathbb{C}|u_i\rangle \otimes h_\alpha^R$$

$\{|u_i\rangle\}$ base ortogonale di h_α^L.

Supporto di un unico stato invariante estremale

Vari esempi:

Simplesso

- caso "classico" $\dim(h_\alpha^L) = 1 \quad \forall \alpha$

$$\left\{ \sum_\alpha \lambda_\alpha \sigma_\alpha \;:\; \lambda_\alpha \geq 0,\ \sum \lambda_\alpha = 1 \right\}$$

- caso "fully quantum a blocchi"

$\dim(h_\alpha^R) = 1 \quad \forall \alpha$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & \\ 0 & \omega_2 & 0 & \\ 0 & 0 & \ddots & \end{pmatrix}$$

Tutti gli stati diagonali rispetto a $h = \bigoplus_\alpha h_\alpha$

La dimostrazione non è affatto elementare e la tratteggiamo soltanto.

- si mostra che

$$\bar{E} := \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \phi_s \, ds$$

è ben definita ed $\bar{E}$ e $\bar{E}^*$ sono proiezioni sui punti fissi di (ϕ_t) e (ϕ_t^*), ovvero

$$\phi_t(x) = x \quad \forall t \geq 0 \quad \text{e analogamente per } \phi_t^*$$

Dunque gli stati invarianti sono gli elementi positivi e con traccia 1 in $\bar{E}(M_d(\mathbb{C}))$.

- Si mostra che $\mathcal{F}(T)$ è una $*$-algebra con unità e gode della proprietà moltiplicativa.

Sottospazio lineare chiuso per prodotto, $*$ e che contiene $\mathbb{1}$.

$\rho > 0$ stato invariante. Se $a \geq 0$ e $tr(\rho a) = 0$, allora $a = 0$.

$$x \in \mathcal{F}(\phi^*) \qquad \phi_t^*(x^* x) - \underbrace{\phi_t^*(x^*)}_{= x^*} \underbrace{\phi_t(x)}_{= x} \geq 0 \quad \forall t \geq 0$$

$$tr(\rho \, (\phi_t^*(x^* x) - \phi_t^*(x^*) \phi_t(x))) =$$

$$= tr(\rho \, (x^* x - x^* x)) = 0$$

Invarianza di ρ.

Siccome anche $x^* \in \mathcal{F}(\phi^*)$, x gode della proprietà moltiplicativa.

Se si considera $y \in \mathcal{F}(\phi^*)$, si ha che

$$\phi^*(xy) = \phi^*(x) \phi^*(y) = xy,$$

quindi anche $xy \in \mathcal{F}(\phi^*)$

• Si usa quanto mostrato prima per mostrare che

- Classificazione *-algebre
- Proprietà moltiplicativa
- Legame tra E e la dinamica.

$$E(x) = \sum_\alpha \mathrm{tr}_{h_\alpha^R}(p_\alpha x p_\alpha)\otimes \sigma_\alpha .$$

4. Convergenza verso un unico stato invariante

Un SMCQ viene detto irriducibile se non esistono sottospazi non banali $\{0\} \subsetneq h' \subsetneq h$ che riducano SMCQ, ovvero tali che per ogni stato η

se vale $\mathrm{supp}(\eta)\subseteq h'$, allora $\mathrm{supp}(\phi_t(\eta))\subseteq h'$ $\forall t\geq 0$.

(T) Si può mostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti, se si assume l'esistenza di uno stato invariante $\rho>0$:

Caratterizzazione spettrale

Accessibilità dinamica

i) ϕ è irriducibile

ii) ρ è l'unico stato invariante

iii) $\mathcal{F}(\phi^*) = \mathbb{C}\mathbb{1}$

iv) $\lim_{t\to+\infty}\phi_t(\eta)=\rho \quad \forall \eta\in S(h)$

v) $\phi_t(\eta)>0 \quad \forall t>0, \forall \eta \in S(h)$.

Abbiamo osservato prima che c'è una relazione tra supporto stati invarianti e riducibilità.

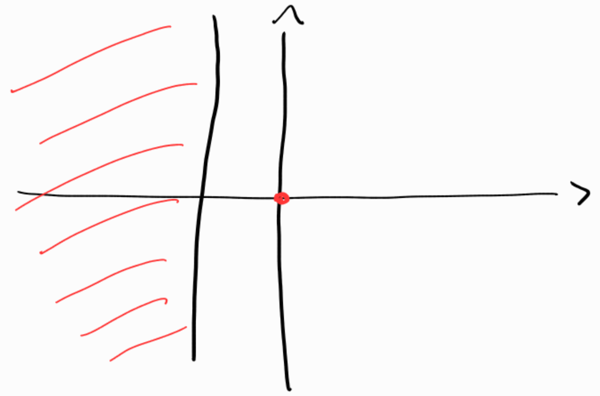
Dinamica per tempi lunghi

iv) è equivalente a dire che

• $\sigma(\mathcal{L})\cap i\mathbb{R}=\{0\}$ e l'unico autovettore corrispondente a 0 è ρ.

Siccome $\phi_t = e^{t\mathcal{L}}$ hanno norma 1, si ha che $\sigma(\mathcal{L})\subseteq\{\mathrm{Re}(z)\leq 0\}$ (e che la molteplicità algebrica e geometrica di 0 coincidono).

$$\|\phi^*(x)\|^2 = \|\phi^*(x^*)\phi^*(x)\| \leq \|\phi^*(x^*x)\| \leq \|x\|^2\,\|\phi^*(\mathbb{1})\| = \|x\|^2$$



Idea di come si mostra che $\sigma(\mathcal{L}^*) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$

Si considerino x, y tali che $\mathcal{L}^*(x) = i\vartheta$
$\mathcal{L}^*(y) = i\varphi$.

Si ha $\phi_t^*(x) = e^{i\vartheta t}x$, $\phi_t^*(y) = e^{i\varphi t}y$.

Usando lo stesso trucco per i punti fissi si ha che x e y possiedono la proprietà moltiplicativa. Inoltre, da $\mathcal{F}(\phi^*) = \mathbb{C}\mathbb{1}$ segue che $xy \neq 0$. $\leftarrow$ Es. – $\phi^*(x^+x) = x^+x$
– $x^+x \propto \mathbb{1}$.

Dunque $\phi_t^*(xy) = e^{i\vartheta t}e^{i\varphi t}xy$, ovvero $\forall t$, $\sigma(\phi_t^*) \cap \{|z|=1\}$ è un gruppo finito, ovvero del tipo $\{e^{\frac{i2\pi k}{p}}\}_{k=0}^{p-1}$.

Perché questo sia vero $\forall t \geq 0$ è necessario che $\sigma(\mathcal{L}^*) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$.

Cosa rimane vero se togliamo l'ipotesi sullo stato invariante >0?

Esiste un unico stato invariante $\rho > 0$

$\lim_{t\to\infty}\phi_t(\eta) = \rho > 0$ $\forall \eta \in S(\mathfrak{a})$

Irriducibile

$\mathcal{F}(\phi^*) = \mathbb{C}\mathbb{1}$

$\phi_t(\eta) > 0$ $\forall t > 0$ $\forall \eta \in S(\mathfrak{a})$

Corollario Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

i) ϕ ammette un unico stato invariante ρ

ii) $\lim_{t\to+\infty} \phi_t(\eta) = \rho \qquad \forall\, \eta \in S(\mathcal{H})$

• Non ho bisogno di chiedere che $\rho > 0$.

Prova: ii) => i) ovvio

Per mostrare i) => ii) basta mostrare che ogni autovettore x per $\mathcal{L}$ corrispondente ad un autovalore del tipo $i\vartheta$, $\vartheta \in \mathbb{R}$ soddisfa
$$x = p_R\, x\, p_R.$$

In tal caso, applicando ⊕ avremmo
$$\sigma(\mathcal{L}) \cap i\mathbb{R} = \sigma(\mathcal{L}^R) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$$
e che l'autospazio di $\mathcal{L}$ relativo a 0 è $\mathbb{C}\rho$.

ii) seguirebbe immediatamente.

x può essere scritto come combinazione di quattro stati $\eta_1, \dots, \eta_4$.

$$x = \underbrace{\frac{x + x^*}{2}}_{\mathrm{Re}(x)} + i\, \underbrace{\frac{(x - x^*)}{2i}}_{\mathrm{Im}(x)}$$

$$a = a^* \qquad a = a^+ - a^-$$

Sappiamo che $\phi_t(\eta_i) - p_R\, \phi_t(\eta_i)\, p_R \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

Allora
$$e^{i\vartheta t} x = \phi_t(x) = \sum_{i=1}^{4} z_i\, \phi_t(\eta_i) \simeq \sum_{i=1}^{4} z_i\, p_R\, \phi_t(\eta_i)\, p_R$$

L'irriducibilità ha il vantaggio di permettere di passare da un problema che riguarda superoperatori ad uno che riguarda operatori, infatti

h' riduce ϕ sse è un sottospazio invariante per
$$G := iH - \frac{1}{2} \sum_{\ell} L_\ell^* L_\ell \quad \text{e} \quad L_\ell$$

È facile vedere l'implicazione $\Leftarrow$

Infatti $G(h')\subseteq h'$ e $L_e(h')\subseteq h'$ sse $Gp'=p'Gp'$, $L_ep'=p'L_ep'$ con p' proiett su h'

Dunque si ha anche che $p'G^*=p'G^*p'$ e $p'L_e^*=p'L_e^*p'$

dunque se $\eta=p'\eta p'$ si ha

$$\mathcal{L}(\eta)= i[H,\eta]-\frac{1}{2}\sum_e L_e^*L_e\eta - 2L_e\eta L_e^* + \eta L_e^*L_e =$$

$$= G\eta+\eta G^* + \sum_e L_e\eta L_e^* = p'\mathcal{L}(\eta)p'$$

Induzione

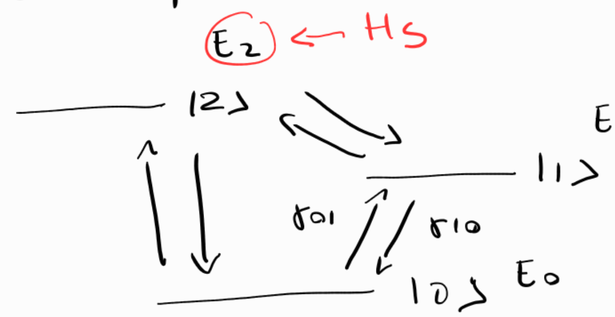
e lo stesso vale per $e^{t\mathcal{L}}(\eta)=\sum_{k\geq 0}\frac{t^k}{k!}\mathcal{L}^k(\eta)$.

Esempi

H_S+H_{IS}

~ Generatore tipo weak-coupling $\quad H=\sum_{i=0}^{2} h_i\,|i\rangle\langle i|$

(2)



$L_{km}=\gamma_{km}\,|m\rangle\langle k|$

$\gamma_{mk}=e^{\beta(E_m-E_k)}\gamma_{km}$, $\quad \gamma_{km}>0$

Detailed balance

It is irreducible

$h'\subseteq h$ invariant for $G:=-iH-\frac{1}{2}\sum_{k,m}L_{km}^*L_{km}$ & L_{km}'s

Let us pick $v\in h'\setminus\{0\}$

$\Rightarrow \exists\, i=0,1,2 : \langle i|v\rangle\neq 0$

$\Rightarrow 0\neq L_{ik}v \propto |k\rangle \in h' \quad \forall k=0,1,2$

- $R=h$ $\quad\Rightarrow h'=h \quad\Rightarrow$ irred
- $\rho\propto e^{-\beta H_S}$, $\quad H_S=\sum_i E_i|i\rangle\langle i|$ $\quad T_{*t}(\eta)\xrightarrow[t\to+\infty]{}\rho \quad \forall \eta\geq 0$.

$$\mathcal{L}(\rho) = \overset{=0}{i[H,\rho]} - \frac{1}{2}\sum_{km} L_{km}^*L_{km}\rho - 2L_{km}\rho L_{km}^* +$$

$$+\rho L_{km}^*L_{km}$$

$$L_{km}^{\dagger} L_{km}\rho - 2L_{km}\rho L_{km}^{\dagger} + \rho L_{km}^{\dagger} L_{km} +$$

$$L_{mk}^{\dagger} L_{mk}\rho - 2L_{mk}\rho L_{mk}^{\dagger} + \rho L_{mk}^{\dagger} L_{mk} =$$

$$= 2|\gamma_{km}|^2 e^{-\beta E_k}\Big[\, |k\rangle\langle k| - |m\rangle\langle m| \,\Big] +$$

$$+\, 2|\gamma_{mk}|^2 e^{-\beta E_m}\Big[\, |m\rangle\langle m| - |k\rangle\langle k| \,\Big] =$$

$$= 2\left(|\gamma_{mk}|^2 e^{\beta(E_k-E_m)} e^{-\beta E_k} - |\gamma_{mk}|^2 e^{-\beta E_m}\right)(|k\rangle\langle k| - |m\rangle\langle m|)$$

$$= 0$$

Decay on a single site

~ Quantum spin chain

(3)

σ^-

$h = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$

$\mathbb{C}^2$ $\mathbb{C}^2$

Invariant states are of the form → Riducibile

$$\boxed{\omega \otimes |0\rangle\langle 0|}$$

$$\Phi_t = \Phi_t^1 \otimes \Phi_t^2$$

$$\Phi_t^1 = \mathbb{I}d \qquad \Phi_t^2 = e^{t\mathcal{L}_2}$$

$R^1 = \mathbb{C}^2$ $\qquad R^2 = \mathbb{C}|0\rangle$ $\qquad \mathcal{L}_2(y) = \sigma^+\sigma^- y - 2\sigma^- y \sigma^+ + y\sigma^+\sigma^-$

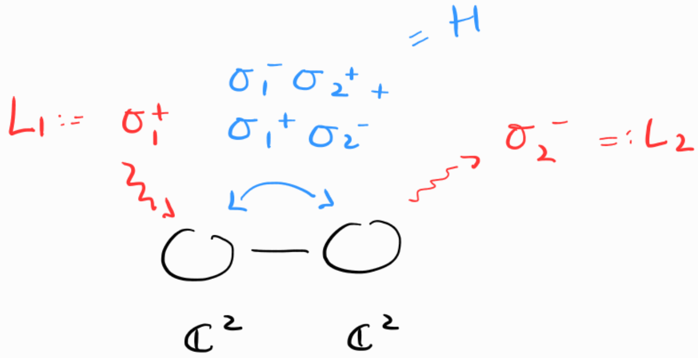
$T^2 = \mathbb{C}|1\rangle$

$$\Phi_t^2(y) \longrightarrow \mathrm{tr}(y)\, |0\rangle\langle 0|$$

$$\Phi_t\Big(\sum_\alpha x_\alpha \otimes y_\alpha\Big) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \sum_\alpha \mathrm{tr}(y_\alpha)\, x_\alpha \otimes |0\rangle\langle 0|$$

$$\Phi_t(\rho) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \mathrm{tr}_2(\rho) \otimes |0\rangle\langle 0| .$$

$\tilde{(4)}$



Irr

$$\sigma_1^+ \, v \otimes w = \langle 0, v \rangle \, |1\rangle \otimes |w\rangle$$

$$\sigma_2^- \, v \otimes w = \langle 1, w \rangle \, |v\rangle \otimes |0\rangle$$

$\Rightarrow$ Unico sottospazio invariante per L_1 e L_2 non banale è $\mathbb{C}\, |1\rangle \otimes |0\rangle$

$$G = -iH - \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes |1\rangle\langle 1| \right)$$

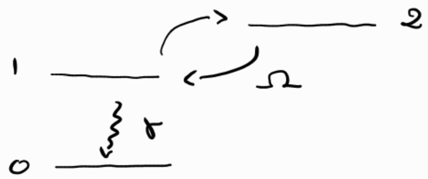
$\mathcal{R} = \mathfrak{h}$

$\mathcal{T} = \{0\}$

$$G \, |1\rangle \otimes |0\rangle = -i \left(|0\rangle \otimes |1\rangle \right) \perp |1\rangle \otimes |0\rangle$$

$\Rightarrow$ Non ci sono sottospazi invarianti non banali.

$\tilde{(1)}$



$\mathcal{L} \leftrightarrow \{H, L\}$ $\quad \mathfrak{h} = \mathbb{C}^3$

$H = \Omega\left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| \right)$

$L = |0\rangle\langle 1|$ $\qquad G = iH - \frac{1}{2} |1\rangle\langle 1|$

$|0\rangle\langle 0|$ stato invariante estremale $\quad \mathbb{C}\,|0\rangle \subseteq \mathcal{R}$

Supponiamo esista un altro vettore $|v\rangle \perp |0\rangle$ e $|v\rangle \in \mathcal{R}$. Allora appartiene ad un sottospazio che riduce la dinamica contenuto in $\mathcal{R}$ ed ortogonale a $|0\rangle$.

Tuttavia, se $\langle 1, v\rangle \neq 0 \rightsquigarrow L|v\rangle \in \mathbb{C}\,|0\rangle$ e se $\langle 1, v \rangle = 0$, allora $|v\rangle = z|2\rangle$ e

$$L G |2\rangle = L\left(i\Omega |1\rangle \right) = i\Omega\, |0\rangle$$

Dunque $\mathcal{R} = \mathbb{C}|0\rangle$ e $\mathcal{T} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{|1\rangle, |2\rangle\}$.

Referenze consigliate

-Quantum channels & Operations: A guided tour,
Wolf
https://mediatum.ub.tum.de/download/1701036/%201701036.pdf

-The structures of state space concerning Quantum Dynamical Semigroups
Baumgartner e Narnhofer
https://arxiv.org/pdf/1101.3914

-Irreducibility of Quantum Markov Semigroups, uniqueness of invariant states and related properties
Fagnola e FG
https://arxiv.org/abs/2512.11517.