

Fisica Generale 2

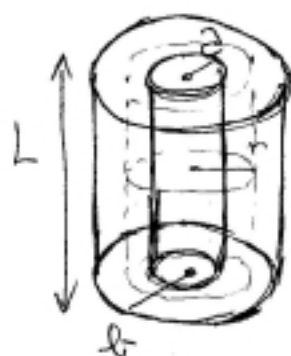
Marzo 2002

1. Le armature di un condensatore cilindrico sono costituite da un cilindro di metallo di raggio $a = 1 \text{ cm}$ e da una superficie cilindrica conduttrice di raggio $b = 3 \text{ cm}$. Nello spazio compreso fra le armature vi sono due strati di dielettrici: il primo strato, per $a < r < c$, ha costante dielettrica relativa $\epsilon_{r1} = 2.1$, e rigidità dielettrica $E_1^* = 60 \cdot 10^6 \text{ V/m}$, mentre il secondo strato ($c < r < b$) ha costante dielettrica relativa $\epsilon_{r2} = 4$, e rigidità dielettrica $E_2^* = 20 \cdot 10^6 \text{ V/m}$. Se i due dielettrici devono scaricare contemporaneamente, qual'è il valore di c e quale differenza di potenziale massima può sopportare il condensatore?

2. Un cilindro metallico di resistività elettrica $\rho = 9.7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$, altezza $h = 1 \text{ m}$ e raggio $R = 1 \text{ cm}$, si trova immerso in un campo magnetico uniforme e parallelo al suo asse: l'induzione magnetica decresce esponenzialmente nel tempo con la legge $B(t) = B_0 e^{-t/\tau}$, con $B_0 = 1 \text{ wb/m}^2$ e $\tau = 1 \text{ sec}$. Si calcoli il calore totale sviluppato nel cilindro per effetto Joule dall'istante $t=0$.

3. Un generatore di forza elettromotrice alternata con ampiezza costante ma frequenza regolabile è chiuso sopra una resistenza R , un condensatore C e una induttanza L , disposti in serie.
 - a) Per quale valore della frequenza la caduta di tensione nel condensatore risulta massima? Tale frequenza è maggiore o minore di quella di risonanza del circuito?
 - b) Per quale valore della frequenza la caduta di tensione nell'induttanza risulta massima?

①



$\pm \lambda = \pm Q/L$ densità di carica lineare

Teorema di Gauss:

$$\int_S \vec{D} \cdot \vec{n} da = \lambda L$$

per ogni superficie cilindrica di raggio $a \leq r \leq b$

$$2\pi r L D = \lambda \cdot L$$

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

Per $a < r < c$

$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} r} \leq E_1^*$$

$c < r < b$

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} r} \leq E_2^*$$

condizione di non scarica

i due dielettrici scaricano contemporaneamente per:

$$\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} a} = E_1^* ; \quad \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} c} = E_2^*$$

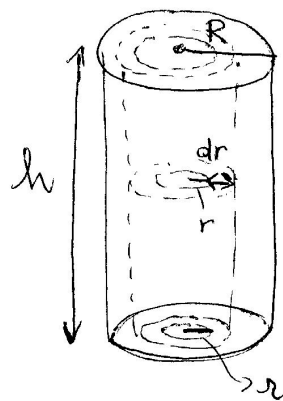
$$\Rightarrow E_1^* \epsilon_{r1} a = E_2^* \epsilon_{r2} c \quad c = a \cdot \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \cdot \frac{E_1^*}{E_2^*} = \underline{\underline{1.575 \text{ cm}}}$$

$$\lambda = 2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} a E_1^* = 2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} c E_2^*$$

$$\Rightarrow \Delta V = \int_a^c \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} r} dr + \int_c^b \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} r} dr =$$

$$= a E_1^* \ln\left(\frac{c}{a}\right) + c E_2^* \ln\left(\frac{b}{c}\right) \approx \underline{\underline{48 \cdot 10^4 \text{ V}}}$$

2



$$\uparrow B(t) = B_0 e^{-t/\tau}$$

cilindro $\equiv$ insieme di spire circolari
di raggio $0 \leq r \leq R$

f.e.m.
in generica spira

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

corrente nel
guscio cilindrico
di altezza h e
raggio $r \rightarrow r+dr$

$$di = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{-\pi r^2 dB/dt}{\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{2\pi r}{h} dr}$$

ovvero $R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{S} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{2\pi r}{h} dr$ resistenza guscio cilindrico

Potenza
complessiva

$$P = \int R (di)^2 = \int_0^R \left(\pi r^2 \frac{dB}{dt} \right)^2 \cdot \frac{\sigma h dr}{2\pi r} =$$

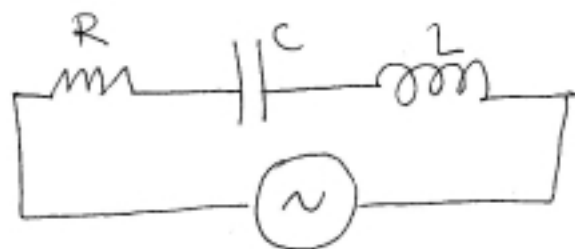
$$= \frac{\pi}{8} \sigma h R^4 \left(\frac{dB}{dt} \right)^2$$

Energia dissipata
per effetto Joule

$$W = \int_0^\infty P dt = \frac{\pi}{8} \sigma h R^4 \frac{B_0^2}{\tau^2} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt$$

$$= \frac{\pi}{16} \sigma h R^4 \frac{B_0^2}{\tau^2} \approx 0.02 \text{ J}$$

③



$$Z_{RLC} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$$

$$\begin{aligned} a) (V_C)_{eff} &= \frac{1}{\omega C} \cdot i_{eff} = \frac{1}{\omega C} \cdot \frac{E_{eff}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \\ &= \frac{1}{C} \cdot \frac{E_{eff}}{\sqrt{\omega^2 R^2 + (\omega^2 L - \frac{1}{C})^2}} \end{aligned}$$

Si ottiene $(V_C)_{eff}$ massimo per:

$$\omega^2 R^2 + (\omega^2 L - \frac{1}{C})^2 \text{ minimo}$$

$$\frac{d}{d\omega} [\omega^2 R^2 + (\omega^2 L - \frac{1}{C})^2] = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \leftarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ frequenza di risonanza}$$

$$b) (V_L)_{eff} = \omega L i_{eff} = \omega L \cdot \frac{E_{eff}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{L E_{eff}}{\sqrt{\frac{R^2}{\omega^2} + (\frac{1}{\omega^2 C} - L)^2}}$$

si ottiene $(V_L)_{eff}$ massimo per

$$\frac{R^2}{\omega^2} + (\frac{1}{\omega^2 C} - L)^2 \text{ minimo} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{\omega}}$$

$$\frac{d}{d\alpha} [\alpha^2 R^2 + (\frac{\alpha^2}{C} - L)^2] = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\omega} = \sqrt{LC - \frac{R^2 C^2}{2}}$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{R^2 C^2}{2L}}} > \omega_0 \text{ frequenze di risonanza}$$