

Simulazione I compito

Fisica per GEOLOGIA

1.1 Unità di misura

Un'unità astronomica (UA) vale 150 milioni di km, un anno luce è la distanza percorsa dalla luce in un anno. Quanti anni luce vale 1 UA ? Cifre significative e stime. $[1.59 \cdot 10^{-5}]$

$$1 \text{ UA} = 150 \cdot 10^6 \text{ km} = 150 \cdot 10^6 \cdot 10^3 \text{ m} = 150 \cdot 10^9 \text{ m}$$

Sapendo che la velocità della luce nel vuoto è 300 000 km/s

$$\begin{aligned} 1 \text{ anno luce} &= [L] = v \times t \\ &= 300 \,000 \text{ km/s} \times 1 \text{ year} \\ &= 300 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \text{ m/s} \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ s} \\ &= 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \times 365 \times 24 \times 6 \times 6 \cdot 10^2 \text{ s} \\ &= 946080 \cdot 10^{10} \text{ m} \\ &= 9.46 \cdot 10^{15} \text{ m} \end{aligned}$$

$$1 \text{ m} = 1/(9.46 \cdot 10^{15}) \text{ anno luce} = 0.106 \cdot 10^{-15} \text{ anno luce}$$

$$1 \text{ UA} = 150 \cdot 10^9 / (9.46 \cdot 10^{15}) \text{ anno luce} = 15.9 \cdot 10^{-6} \text{ anno luce}$$

1.2 Analisi dimensionale

La temperatura T di un recipiente varia nel tempo t secondo la relazione:

$$T = A e^{-k t} + B$$

Determinare le unità di misura delle costanti A, B, k.

1.3 Analisi dimensionale

Supponendo m e t due grandezze di dimensioni diverse, quali delle seguenti espressioni è significativa ?

- a. mt
- b. $m + t$
- c. $m - t$
- d. $\frac{m+t}{m}$
- e. $\frac{mt}{m-t}$

2. Vettori

Dati i vettori spostamento: $\vec{a} = (3\vec{i} + 2\vec{j})\text{ m}$, $\vec{b} = (-2\vec{i} + 3\vec{j})\text{ m}$, $\vec{c} = (4\vec{i} - 2\vec{j})\text{ m}$ e la forza $\vec{F} = (4\vec{i} + \vec{j})\text{ N}$:

- disegnare i vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ sul piano cartesiano e ricavare graficamente $\vec{s} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$;
- calcolare il modulo dei vettori $\vec{s}$ e $\vec{F}$; [$s = 9.49\text{ m}$, $F = 4.12\text{ N}$]
- calcolare il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ su un punto materiale che compie lo spostamento $\vec{s}$; [$L = 33.0\text{ J}$]
- calcolare l'angolo formato dai vettori $\vec{s}$ e $\vec{F}$. [$\theta = 0.567\text{ rad} = 32.5^\circ$]

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \\ &= (3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{i} - 2\vec{j})\text{ m} = (9\vec{i} - 3\vec{j})\text{ m}\end{aligned}$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{9^2 + 3^2}\text{ m} = 9.49\text{ m}$$

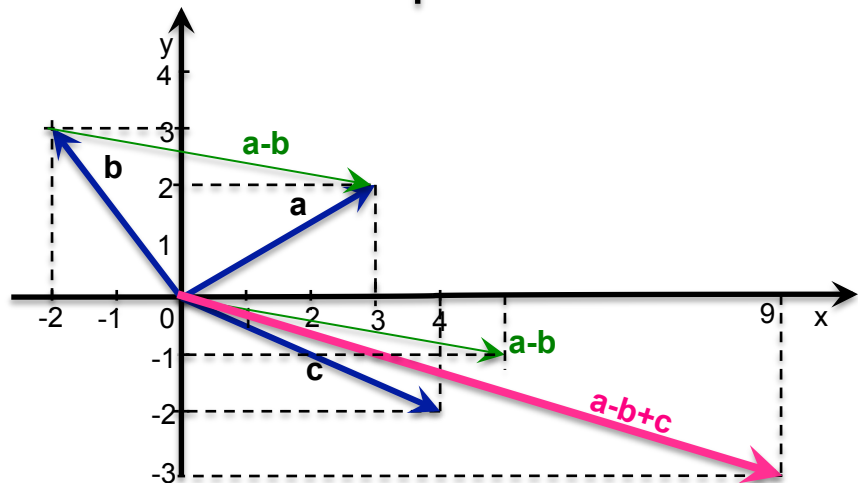
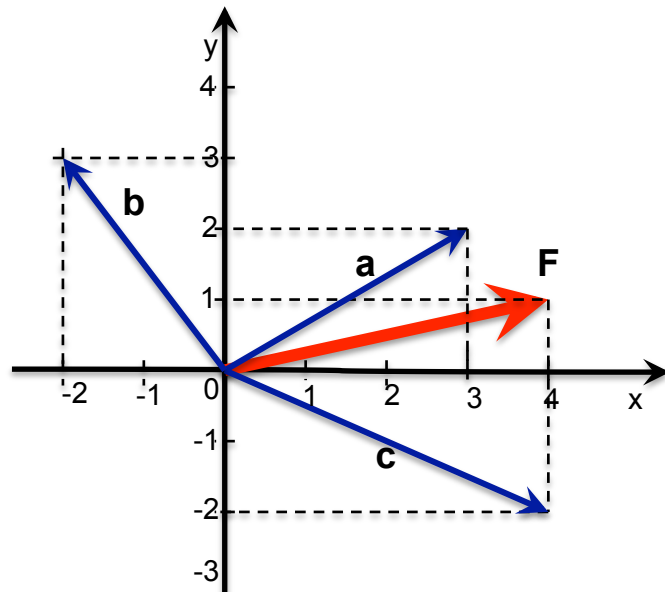
$$|\vec{F}| = \sqrt{4^2 + 1^2}\text{ N} = 4.12\text{ N}$$

$$\begin{aligned}L &= \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos\theta \\ &= F_x s_x + F_y s_y \\ &= (4 \cdot 9 - 1 \cdot 3)\text{ N} = 33.0\text{ J}\end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{L}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|} = 0.84$$

$$\theta = \arccos(0.84)$$

$$= 0.566\text{ rad} = 0.566 \times \frac{360^\circ}{2\pi} = 32.5^\circ$$



3. Cinematica

Un razzo giocattolo viene lanciato orizzontalmente, rasoterra, lungo un percorso rettilineo di lunghezza $L = 70 \text{ m}$, con velocità iniziale nulla ed accelerazione costante $a = 3 \text{ m/s}^2$. Giunto alla fine del percorso il razzo cade per effetto della sola gravità da una altezza $h = 20 \text{ m}$, rispetto al suolo. Determinare:

- Il **tempo** impiegato a raggiungere la fine del percorso L , il **tempo di volo** dalla fine del percorso L orizzontale e l'impatto con il suolo e la distanza d , orizzontale, a cui tocca il suolo;
- La **velocità** all'impatto con il suolo, in modulo, componenti e angolo rispetto all'orizzontale.

a) Lungo il tratto orizzontale L il moto è rettilineo ed uniformemente accelerato e le leggi orarie per spazio e velocità sono:

asse x :

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}at^2; \quad v_x(t) = v_{0x} + at$$

da cui si ricava:

$$L = \frac{1}{2}at^2$$

$$t = \sqrt{2L/a} = 6.8 \text{ s}$$

$$v_x(t) = at = 20.4 \text{ m/s}$$

Giunto alla fine del tratto L , il moto è parabolico e le leggi orarie sono le seguenti:

asse x :

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \quad v_x(t) = v_{0x} + at$$

asse y :

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2; \quad v_y(t) = v_{0y} - gt$$

ve $(x_0, y_0) = (0, h)$.

Il tempo di volo si ottiene dalla legge oraria relativa alla coordinata y :

$$0 = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2 \text{ s}$$

e la distanza d orizzontale, di impatto al suolo, dalla legge oraria in x , in corrispondenza la tempo di volo:

$$x(t) = v_{0x}t = 20.4 \text{ m/s} \times 2 \text{ s} = 40.8 \text{ m}$$

b) Dalle leggi orarie sulle velocità, valutate in corrispondenza al tempo di volo, si ottengono le componenti x ed y della velocità di impatto al suolo:

$$v_x(t) = v_{0x} = 20.4 \text{ m/s}$$

$$v_y(t) = -gt = -19.6 \text{ m/s}$$

da cui segue che il modulo e l'angolo di inclinazione rispetto all'orizzontale sono:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 28.3 \text{ m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = -43.9^\circ$$

4. Dinamica -1

Un corpo di massa $m=100\text{g}$ si muove su un piano inclinato di 30° rispetto al piano orizzontale la cui superficie non presenta attrito. Il corpo parte dal punto più alto del piano che si trova ad una quota $h = 1\text{ m}$ da terra.

- Con che velocità raggiunge il suolo ?
- Calcolare il lavoro compiuto dalla forza peso.
- Supponendo ora che la superficie del piano presenti attrito e che il corpo parta dalla sommità con una velocità iniziale di $v_0=3\text{ m/s}$ quanto deve valere il coefficiente μ_d affinché la velocità sia costante?

- a) In un sistema isolato l'energia meccanica si conserva.

$$E_{mecc,i} = E_{mecc,f}$$

$$E_{cin,i} + U_i = E_{cin,f} + U_f$$

Alla sommità del piano l'energia meccanica è unicamente data dalla energia potenziale gravitazionale, mentre alla fine del piano l'energia potenziale gravitazionale è stata tutta convertita in energia cinetica:

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.8\text{ m/s}^2)(1\text{ m})} = 4.43\text{ m/s}$$

- b) Calcolo il lavoro compiuto dalla forza peso (costante) lungo tutto il piano inclinato di lunghezza s

$$L_g = \vec{F}_g \cdot \vec{s} = F_g s \cos(90^\circ - \theta) = F_g s \sin \theta = F_g h = mgh = 0.98\text{ J}$$

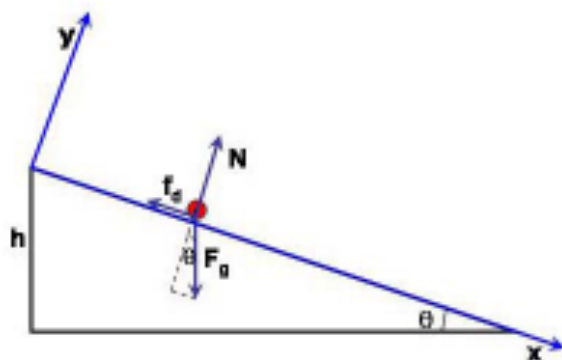
- c) Dal diagramma delle forze per il corpo libero di ottenere:

$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{N} + \vec{F}_g + \vec{f}_d = 0$$

ossia l'accelerazione deve essere nulla, dato che la velocità sul piano è costante. Proietto tale equazione vettoriale sugli assi x ed y :

$$\begin{cases} 0 + F_g \sin \theta - \mu_d N = 0 & \text{asse } x \\ N - F_g \cos \theta = 0 & \text{asse } y \\ \mu_d = F_g \sin \theta / N \\ N = F_g \cos \theta \end{cases}$$

$$\mu_d = \frac{mg \sin \theta}{mg \cos \theta} = \tan \theta = 0.58$$



4. Dinamica -2

Un corpo di massa $m=5 \text{ kg}$ poggia nel punto A su un piano inclinato di 60° , trattenuto da una fune di tensione T . Il piano è scabro ed i coefficienti di attrito statico e dinamico sono uguali e pari a $\mu = 0.1$.

- Calcolare il modulo della tensione della fune;
- Supponendo ora di tagliare la fune, calcolare l'accelerazione di cui risente il corpo e lo spazio percorso lungo il piano, dopo un tempo $t = 3 \text{ s}$.

a) Scriviamo l'equazione della dinamica $F = ma$ per la risultante delle forze applicate al corpo in equilibrio statico sul piano:

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_g + \vec{T} + \vec{F}_{\text{att}} + \vec{N} = m \vec{a} = 0$$

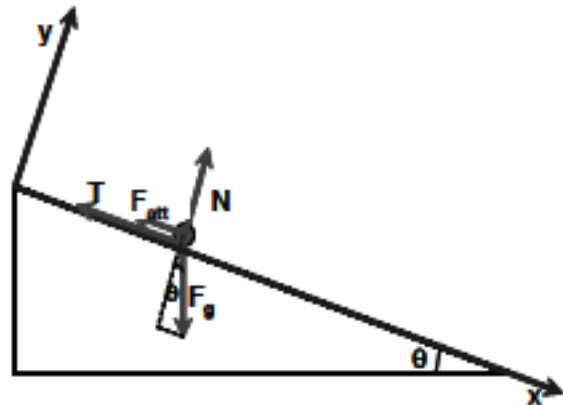
Proiettiamo la precedente equazione vettoriale lungo gli assi x e y , scelti come in figura:

$$\text{asse } x: -F_{\text{att}} - T + F_g \sin 60^\circ = 0$$

$$\text{asse } y: N - F_g \cos 60^\circ = 0$$

Ricaviamo immediatamente dalla equazione per le componenti y il valore della normale N :

$$N = F_g \cos 60^\circ = mg/2 = \frac{5 \text{ kg} \times (9.8 \text{ m/s}^2)}{2} = 24.5 \text{ N}$$



Dalla equazione per le componenti x ricaviamo ora la tensione T :

$$T = F_g \sin 60^\circ - F_{\text{att}} = \frac{\sqrt{3}}{2} mg - \mu N = \frac{\sqrt{3}}{2} mg - \mu \frac{mg}{2} = \frac{mg}{2} (\sqrt{3} - \mu) = \frac{5 \text{ kg} \times (9.8 \text{ m/s}^2)}{2} (\sqrt{3} - 0.1) = 40 \text{ N}$$

- b) Supponendo ora di tagliare la fune la risultante delle forze è non nulla ed il corpo acquista una accelerazione lungo il piano:

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_g + \vec{F}_{\text{att}} + \vec{N} = m \vec{a}$$

Proiettiamo nuovamente l'equazione sugli assi:

$$\text{asse } x: -F_{\text{att}} + F_g \sin 60^\circ = ma_x$$

$$\text{asse } y: N - F_g \cos 60^\circ = ma_y = 0$$

Dalla equazione lungo l'asse y si ricava che la forza normale è ovviamente la medesima e vale $N = mg \cos 60^\circ = 24.5 \text{ N}$. Dalla equazione lungo l'asse x si ottiene l'accelerazione

$$\begin{aligned} a_x &= (-\mu N + mg \sin 60^\circ) / m \\ &= g(-\mu \cos 60^\circ + \sin 60^\circ) \\ &= 9.8 \text{ m/s}^2 \left(-\frac{0.1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 7.997 \text{ m/s}^2 \approx 8 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

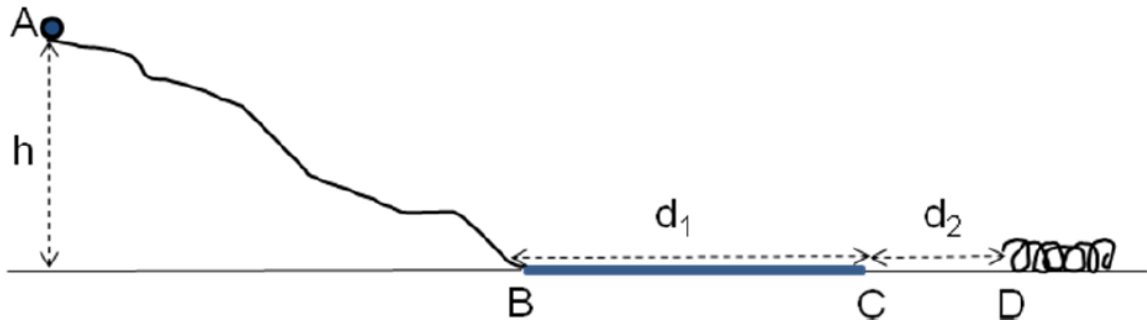
Dopo un tempo $t = 3 \text{ s}$ il corpo ha percorso una distanza

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ &= \frac{1}{2} a_x t^2 = 36 \text{ m} \end{aligned}$$

5. Lavoro/Energia

3) Una particella di massa $m = 100 \text{ g}$ viene lasciata libera di muoversi nel punto **A**, sulla sommità di un pendio perfettamente liscio, ad una quota $h = 10 \text{ m}$ rispetto alla base del pendio (vedi figura). Raggiunta la base del pendio (punto **B**) percorre un tratto orizzontale scabro **BC**, che ha lunghezza $d_1 = 5 \text{ m}$ e coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.1$, ed un tratto orizzontale perfettamente liscio **CD**, di lunghezza $d_2 = 2 \text{ m}$. In **D** urta una molla orizzontale, che ha costante elastica k , e si arresta comprimendo la molla di un tratto $\Delta x = 10 \text{ cm}$. Si determini :

- l'energia cinetica della particella in **B**, **C** e **D**.
- la costante elastica k della molla



- a) L'energia cinetica nel punto **B** può essere ricavata facilmente applicando il teorema di conservazione dell'energia meccanica ai punti **A** e **B** in quanto l'unica forza agente che compie lavoro durante la discesa della particella lungo il pendio, è la forza Peso, conservativa. Si ha pertanto :

$$E_{\text{cinB}} = mgh = 9.8 \text{ J}$$

Nel tratto **BC**, l'unica forza che compie lavoro è la forza d'attrito $F = -\mu mg \mathbf{i}$, dove $\mathbf{i}$ è il versore dell'asse x , scelto coincidente con la direzione e verso del moto. Per il teorema lavoro-energia cinetica, il lavoro L_{BC} compiuto dalla risultante delle forze agenti (in questo caso la forza d'attrito) uguaglia la variazione dell'energia cinetica $E_{\text{cinC}} - E_{\text{cinB}}$. Si ha pertanto :

$$L_{\text{BC}} = -\mu mg d_1 = E_{\text{cinC}} - E_{\text{cinB}} \text{ da cui si ricava } E_{\text{cinC}} = L_{\text{BC}} + E_{\text{cinB}} = -0.49 + 9.8 = 9.31 \text{ J}$$

Nel punto **D** l'energia cinetica è uguale a quella del punto **C**, $E_{\text{cinD}} = 9.31 \text{ J}$.

- b) Quando il corpo si è arrestato e la molla risulta compressa di 10 cm , tutta l'energia cinetica del sistema è diventata energia potenziale associata al campo della forza elastica esercitata dalla molla (la forza elastica è una forza conservativa).

$$\text{Si ha quindi } E_{\text{cinD}} = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2, \text{ da cui si ricava } k = 2 E_{\text{cinD}} / (\Delta x)^2 = 1862 \text{ N/m}$$