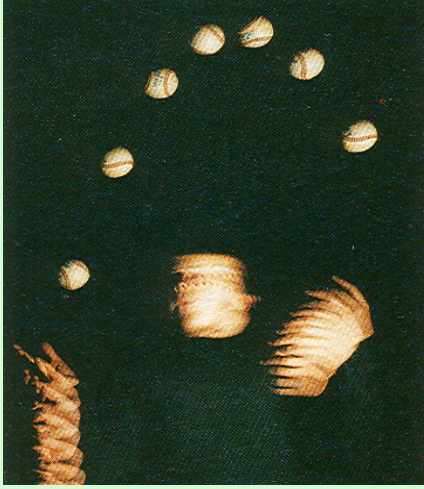
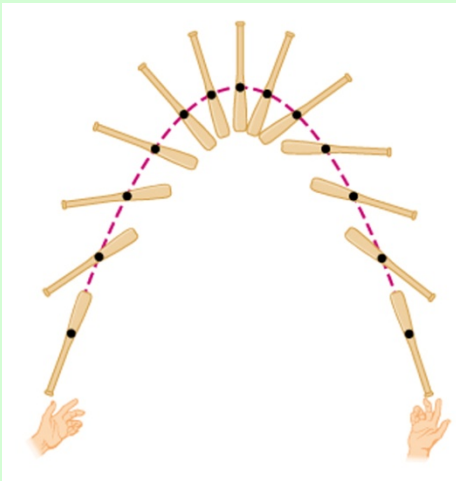


Centro di Massa



palla lanciata in aria:
traiettoria **parabolica**
[tipo moto proiettile]



mazza da baseball lanciata in aria:
moto complicato e diverso per le varie parti
mazza = **sistema** di punti materiali
centro di massa: punto che si muove lungo
traiettoria **parabolica**
[tipo moto proiettile]

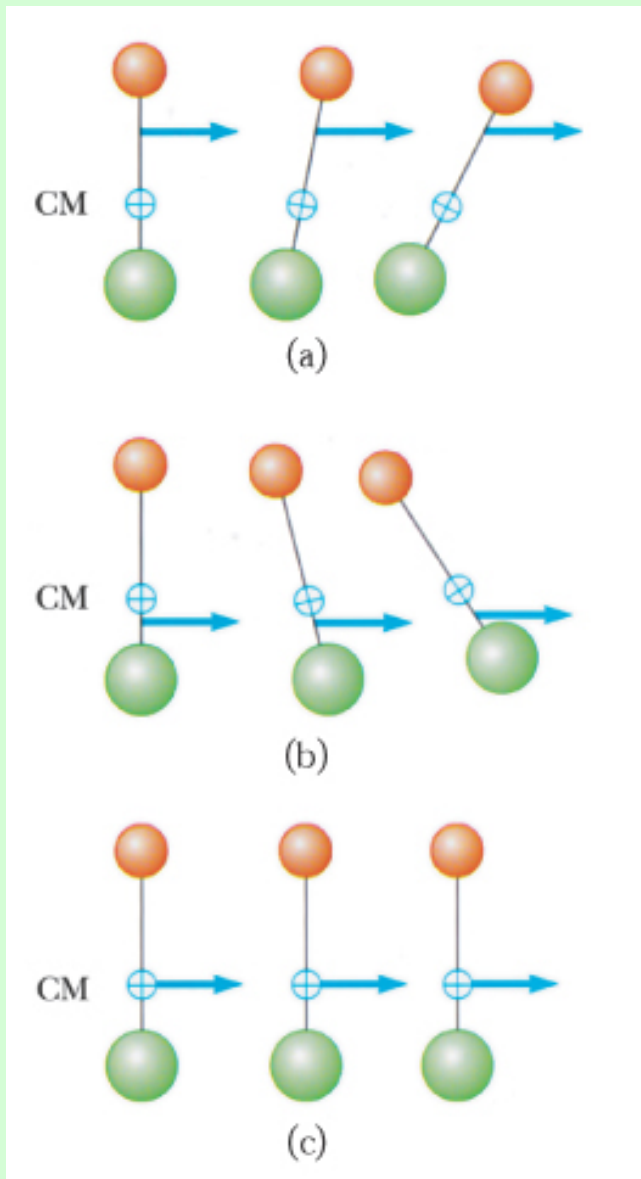
centro di massa di un corpo (o sistema di corpi):
punto che si muove come se

- ▶ **tutta la massa** fosse lì concentrata
- ▶ e le **forze esterne** agissero lì

permette di descrivere
moto complessivo del sistema meccanico

esempio: sistema di due particelle
collegate da sbarra rigida
[priva di massa]

$$M_1 < M_2$$



× applico **F** vicino ad **M₁**
sistema ruota in
senso orario

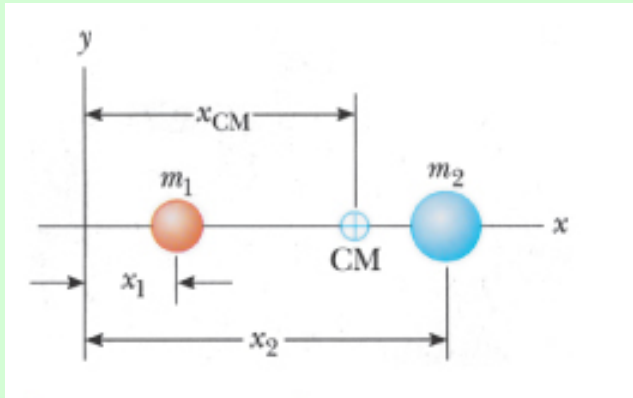
× applico **F** vicino ad **M₂**
sistema ruota in
senso anti-orario

× applico **F** vicino al **CM**
sistema **trasla**
si muove come se tutta
la massa fosse concentrata
nel CdM

individuo **centro di massa** con questo esperimento !!

Posizione del centro di massa

posizione **media** della massa del sistema



$$x_{CM} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

esempio:

$$x_1=0, x_2=d$$

$$\text{se } m_1 = m_2 \Rightarrow x_{CM} = (x_1 + x_2)/2$$

metà strada

$$\text{se } m_2 = 2m_1 \Rightarrow x_{CM} = 2/3 d$$

vicino particella pesante

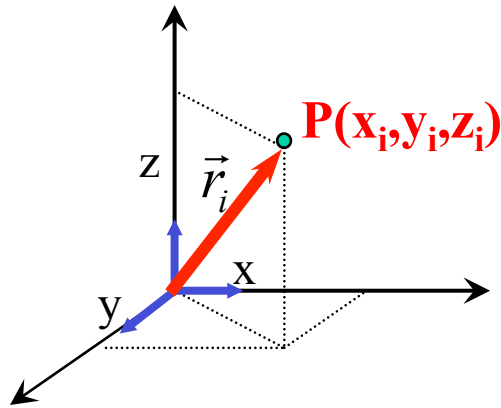
sistema **n particelle** in **3 dimensioni**

$$x_{CM} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

$$y_{CM} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i y_i}{M}$$

$$z_{CM} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

nel linguaggio dei **vettori**:



particella di **coordinate** (x_i, y_i, z_i)

vettore **posizione**:

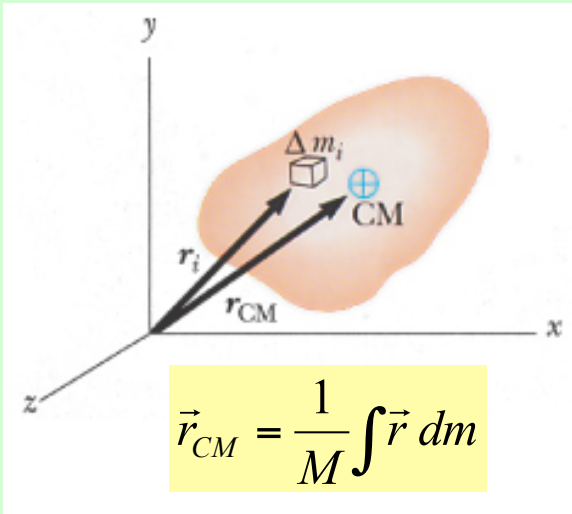
$$\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$$

sistema di **n** particelle

$$\vec{r}_{CM} = x_{CM} \vec{i} + y_{CM} \vec{j} + z_{CM} \vec{k} = \frac{\sum_i m_i x_i + \sum_i m_i y_i + \sum_i m_i z_i}{M}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad \text{vettore **posizione** CM}$$

corpi **rigidi** [distribuzioni **continue** di materia]



$$x_{CM} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum \Delta m_i x_i}{M} \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{1}{M} \int x dm$$
$$y_{CM} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum \Delta m_i y_i}{M} \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{1}{M} \int y dm$$
$$z_{CM} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum \Delta m_i z_i}{M} \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{1}{M} \int z dm$$

N.B. se oggetto possiede **simmetria**

CM si trova su centro, asse o piano di simmetria

Moto di un Sistema di Particelle

Il **CM** è utile nella descrizione del **moto** del **sistema**

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

$$M\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n$$

$$M\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n$$

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$M\vec{a}_{CM} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \dots + m_n\vec{a}_n$$

$$\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_{est}$$

le forze **interne**
si elidono a due a due
[azione e reazione]

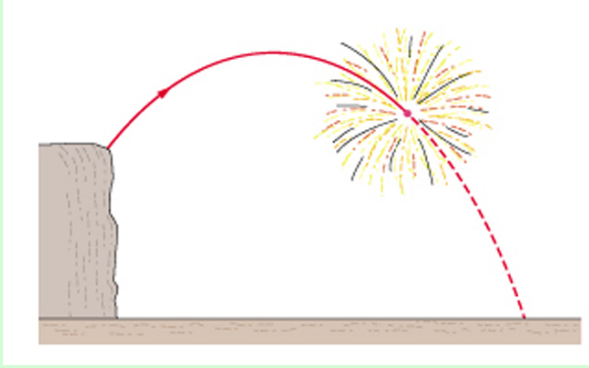
*il **CM** si **muove** come particella di **massa M**
su cui agisce la **risultante** delle **forze esterne***

$$\sum \vec{F}_{est} = M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt}$$

N.B. sistema **isolato**:

$$\sum \vec{F}_{est} = M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{tot} = M\vec{v}_{CM} = \text{costante}$$

esempi: moto centro di massa



fuoco **artificiale**

$$\vec{F}_{est} = \vec{F}_g$$

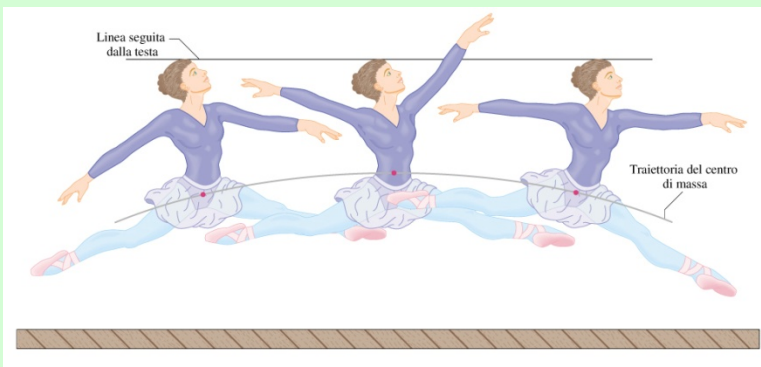
CM segue
traiettoria **parabolica**
[la stessa del **razzo inesploso**]



ballerina che **fluttua** in aria:

traiettoria testa-busto
orizzontale !!!

[non **parabolica**
come nel lancio di un corpo]



CM segue
traiettoria **parabolica**

esercizi centro di massa

Moto di un Sistema di Particelle

Il **CdM** è utile nella descrizione del **moto** del **sistema**

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

velocità CDM



$$M\vec{v}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i = \vec{p}_{tot}$$

quantità di moto totale è pari alla

massa totale per la **velocità** del CdM

[moto **particella** massa M , velocità v_{CM}]

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{a}_i$$



$$M\vec{a}_{CM} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i$$

somma forze **esterne**

(quelle interne si elidono a coppie)

$$\sum \vec{F}_{est} = M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt}$$

il CdM si **muove** come particella di **massa** M
su cui agisce la **risultante** delle **forze esterne**

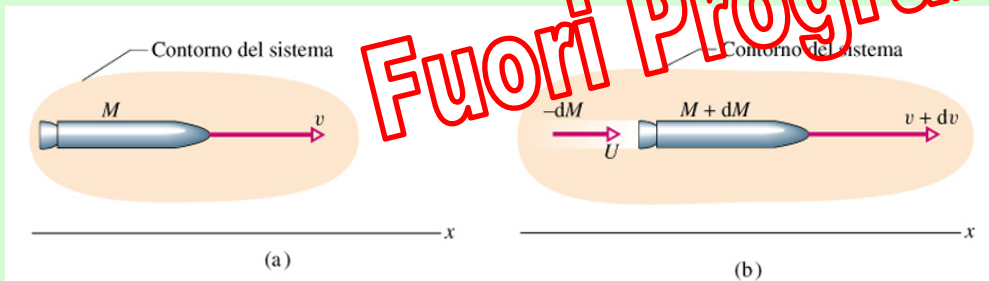
sistema isolato:

$$\sum \vec{F}_{est} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{tot} = costante \quad \vec{v}_{CM} = costante$$

conservazione quantità di moto

propulsione di un razzo

[sistema a massa variabile]



durante il moto si conserva la **massa** del **sistema**
[massa **combustibile** + massa **navetta**]

$$p_i = p_f$$

$$Mv = -dM U + (M + dM)(v + dv) \quad \text{con } dM < 0$$

$$u = (v + dv) - U \quad \text{velocità **relativa** prodotti di scarico}$$

$$-dM u = M dv$$

$$-\frac{dM}{dt} u = M \frac{dv}{dt}$$

ove $R = -dM/dt$ **rapidità**
consumo combustibile

$$Ru = Ma \quad \text{spinta del razzo} \quad (\text{I}^0 \text{ equazione del razzo})$$

$$dv = -u \frac{dM}{M}$$

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -u \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

$$v_f - v_i = u \ln \frac{M_i}{M_f} \quad (\text{II}^0 \text{ equazione del razzo})$$

devo **diminuire** la massa finale
per avere aumento di velocità

Moto rotazionale semplice

- Il moto puramente rotazionale si riferisce al moto di un **corpo rigido** **attorno ad un asse fisso**
- Per rotazione intorno ad un asse fisso **ogni particella** del corpo rigido **ha la stessa velocità angolare e la stessa accelerazione angolare**
- La **posizione angolare** θ , la **velocità angolare** ω e l'**accelerazione angolare** α sono gli analoghi rispettivamente di x , v e a .
 - posizione angolare θ [rad]
 - velocità angolare ω [rad/s]
 - accelerazione angolare α [rad/s²]
- Le relazioni cinematiche per il moto rotazionale con accelerazione angolare costante hanno la stessa forma di quelle del moto lineare con accelerazione costante, operando le sostituzioni: $x \rightarrow \theta$, $v \rightarrow \omega$, $a \rightarrow \alpha$

Legge oraria per $\alpha = \text{costante}$

La legge oraria è uguale a quella del moto del punto in una dimensione, dopo aver operato le sostituzioni già viste: $x \rightarrow \theta$, $v \rightarrow \omega$, $a \rightarrow \alpha$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

E valgono le relazioni

$$\theta = \theta(t), \quad \omega = \omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}, \quad \alpha = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \text{costante}$$

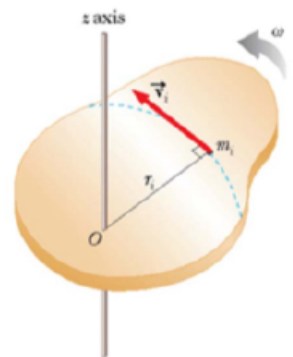
E anche le altre relazioni del tipo

$$v_f^2 = v_i^2 + 2 a (x_f - x_i) \quad \Rightarrow \quad \omega_f^2 = v_i^2 + 2 \alpha (\theta_f - \theta_i)$$

$$x_f = x_i + \frac{1}{2} (v_i + v_f) t \quad \Rightarrow \quad \theta_f = \theta_i + \frac{1}{2} (\omega_i + \omega_f) t$$

ovvero quelle proprie del moto circolare

$$v = v(r) = r \omega, \quad a_c = r \omega^2 = \frac{\omega^2}{r}, \quad a_t = r \alpha$$



Dinamica rotazionale

Anche nel caso del corpo rigido che ruota intorno ad un asse, **la legge di Newton deve essere formulata in modo diverso**, se non altro perché le variabili cinematiche hanno **dimensioni che differiscono per una lunghezza** rispetto a quelle del punto materiale.

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad \text{diventa} \quad \vec{\tau} = I \vec{\alpha}$$

$$\vec{F} [N] = m [kg] \cdot \vec{a} [m s^{-2}] \quad \text{diventa} \quad \vec{\tau} [N \cdot m] = I [kg \cdot m^2] \cdot \vec{\alpha} [s^{-2}]$$

Valgono le seguenti definizioni e relazioni

- **Momento meccanico o della forza** $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
- **Momento d'inerzia** $I = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{ovvero} \quad I = \int r^2 dm$
- **Momento angolare** (eq. quantità di moto) $\vec{L} = I \vec{\omega} \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
- **Energia cinetica** $K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$

Leggi di conservazione

- Anche $\vec{\theta}$, $\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$ sono **grandezze vettoriali** e hanno la direzione dell'asse di rotazione con verso congruente con la solita regola della mano destra
- Nelle stesse condizioni viste in precedenza valgono i principi di conservazione fondamentali:
 - **Conservazione del momento angolare** (o della quantità di moto)
 - **Teorema dell'energia cinetica totale** (di traslazione e di rotazione)
- In particolare in presenza di conservazione dell'energia meccanica, cinetica e potenziale, se un corpo oltre a muoversi rotola anche intorno ad un asse, la conservazione comprenderà sia l'energia cinetica legata a m e v , sia quella legata a I e ω .

