

Cinematica

[studio del moto indipendentemente dalla causa]

Moto in una dimensione

- moto esclusivamente **rettilineo**
- si trascurano le **forze**
- oggetto in moto assimilabile ad una **particella**
[tutte le parti si muovono **solidali** nella stessa direzione]

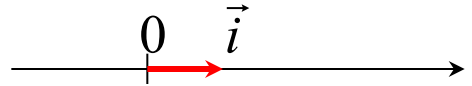
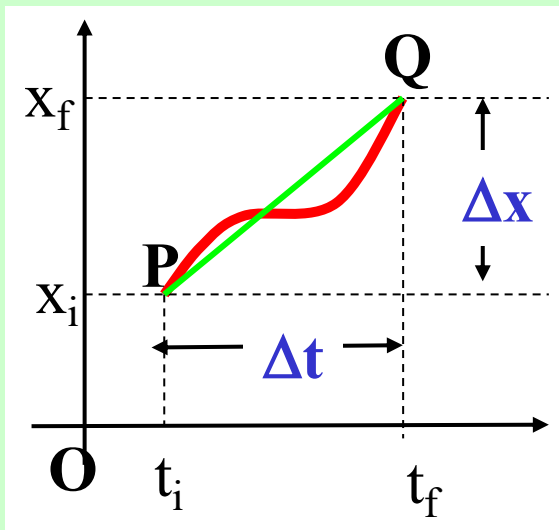


grafico **posizione – tempo**: $x = x(t)$
si dice **LEGGE ORARIA**



$$\Delta \vec{x} = (x_f - x_i) \vec{i} \quad \text{spostamento}$$

$$\Delta t = t_f - t_i \quad \text{intervallo di tempo}$$

$$\bar{v}_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(x_f - x_i)}{t_f - t_i}$$

velocità media:

pendenza della retta **PQ**
non dipende dal percorso

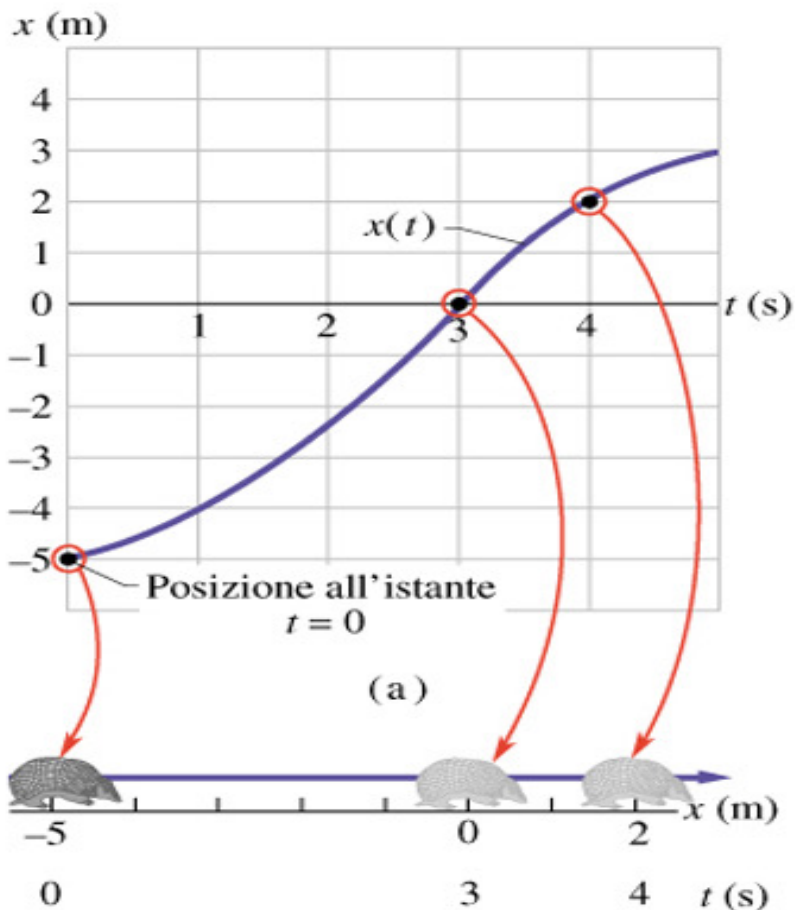
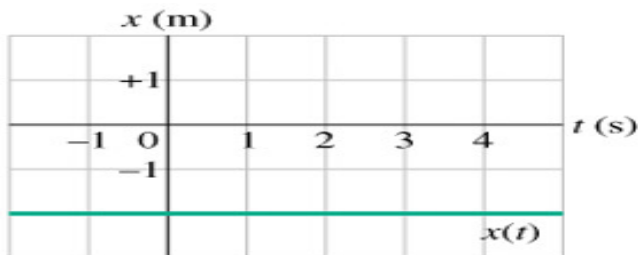
$$[v] = [L]/[T] \Rightarrow \text{m/s}$$

Esempio:

Diagramma orario di un armadillo

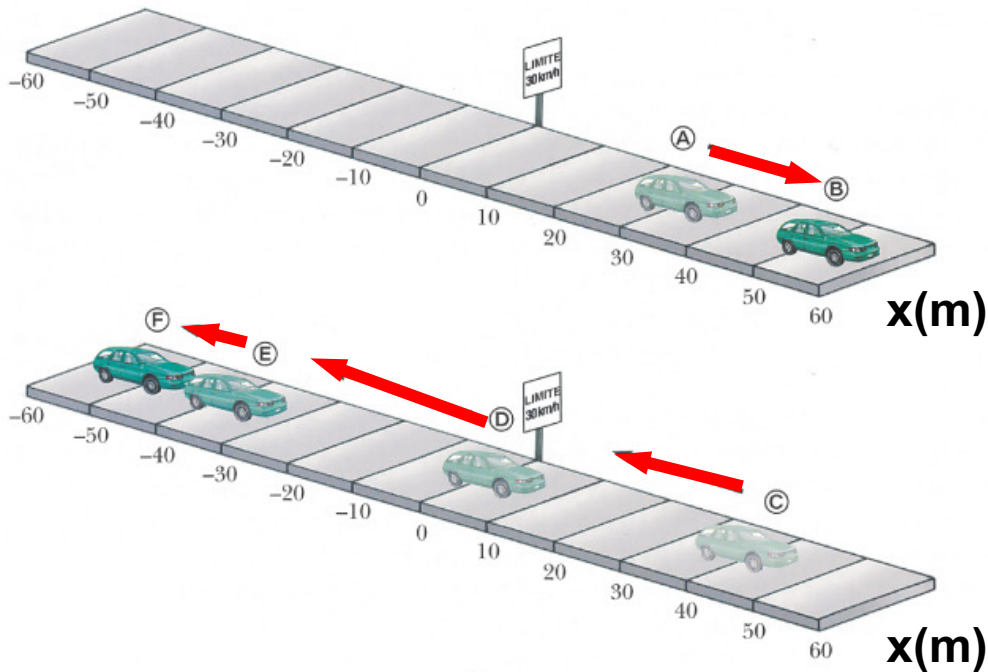
Armadillo fermo

nella posizione $x = -2\text{m}$



Armadillo
che si muove
a partire dalla
posizione $x = -5\text{m}$

esempio: moto di un' auto



	t(s)	x(m)
A	0	30
B	10	52
C	20	38
D	30	0
E	40	-37
F	50	-53

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(-53 - 30)m}{(50 - 0)s} = -1.7 m/s$$

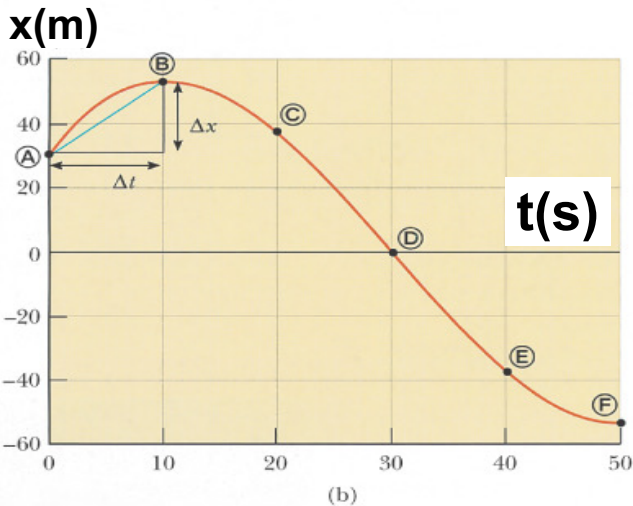


grafico
posizione - tempo

$$\bar{v}_{AB} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(52 - 30)m}{(10 - 0)s} = 2.2 m/s$$

N.B. velocità media fra A e B:
pendenza della retta
tra i punti A e B

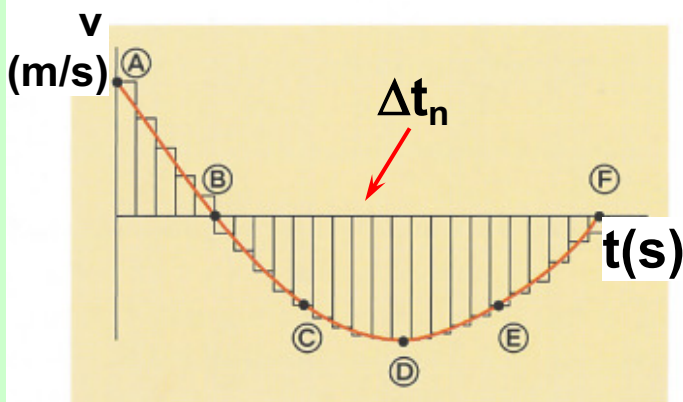


grafico **velocità - tempo**

$$\Delta x = \sum_n \Delta x_n = \sum_n v_n \Delta t_n$$

$$\Delta x = \lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \sum_n \Delta x_n = \lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \sum_n v_n \Delta t_n$$

N.B. spostamento totale Δx :
area sotto la curva
[interpretazione geometrica]

Quanto velocemente mi muovo in un dato istante di tempo ?

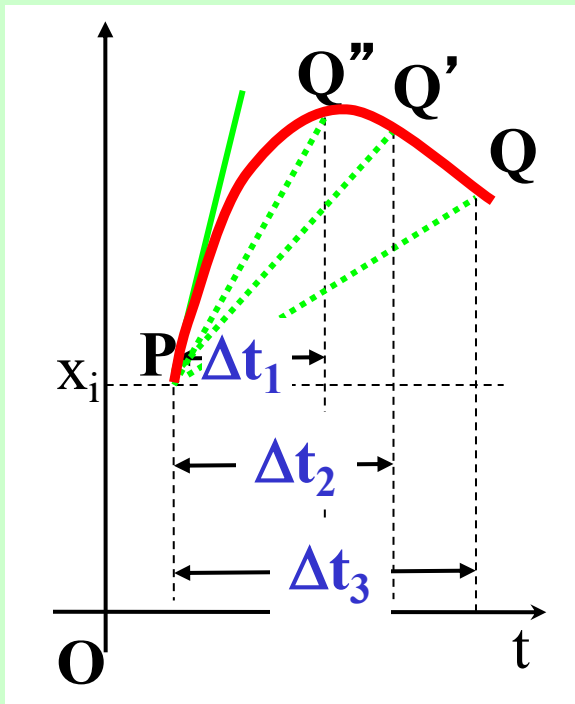
esempi:

auto che si muove in città: $\bar{v} = 30 \frac{km}{h} = 30 \frac{10^3 m}{60 \times 60 s} = 8.3 m/s$

pedone che cammina per strada: $\bar{v} = 2 m/s$

la velocità **istantanea** è diversa

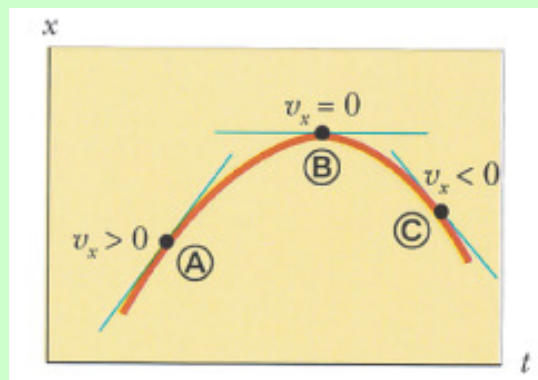
[ad esempio: semafori, strisce pedonali, ingorghi ...]



$$v_x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

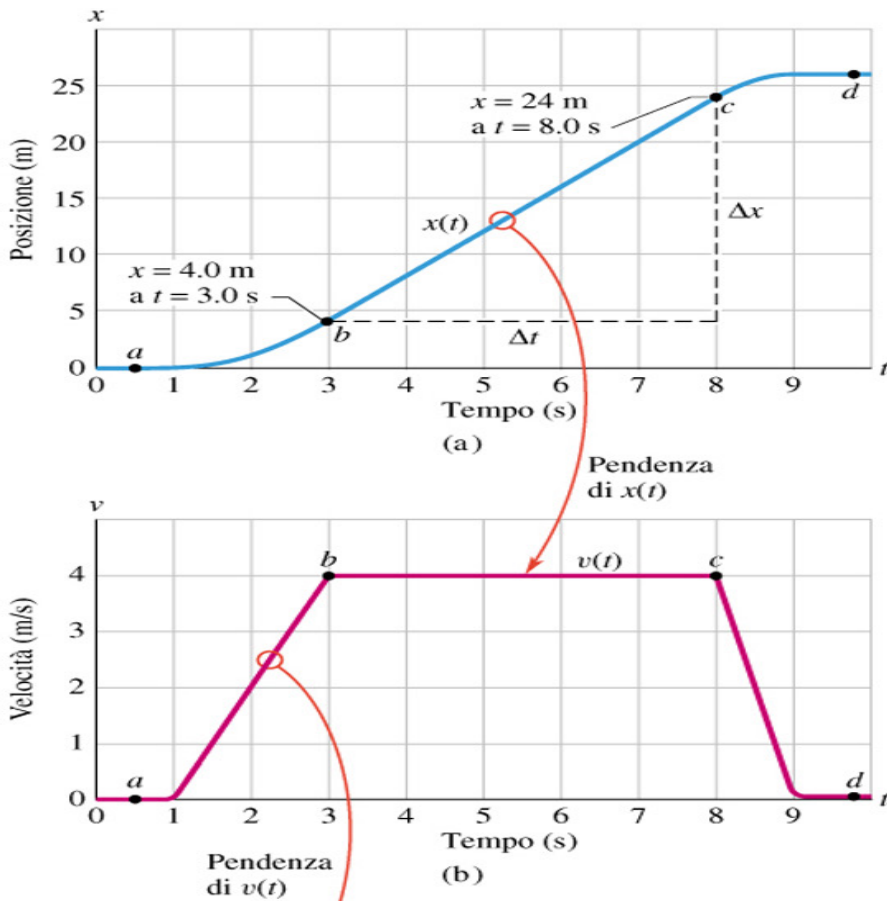
velocità istantanea:

pendenza della retta **tangente** in P
dipende dal punto nel percorso



N.B. v_x può essere **positiva**, **negativa** o **nulla**

Esempio, ascensore - velocità:



- dopo la chiusura delle porte, l'ascensore comincia a salire (grafico sopra) e la velocità aumenta
- Arrivata ad una valore massimo, la velocità rimane costante
- All'avvicinarsi del piano la velocità comincia decrescere fino ad annullarsi

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v_{ist} = v = \frac{dx}{dt}$$

$$v_{ist}(t) = v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

quando la velocità varia nel tempo
si dice che il corpo è accelerato

esempi:

velocità auto **aumenta** quando riparto da un semaforo
diminuisce durante una frenata

$$\bar{a}_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(v_{x_f} - v_{x_i})}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$

accelerazione media:

variazione della velocità in Δt

$$[a] = [v]/[t]$$

$$= [L/T]/[T] = [L/T^2] \Rightarrow \text{m/s}^2$$

$$\begin{aligned} a_x &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2} \end{aligned}$$

accelerazione istantanea:

derivata prima della velocità

derivata seconda dello spostamento

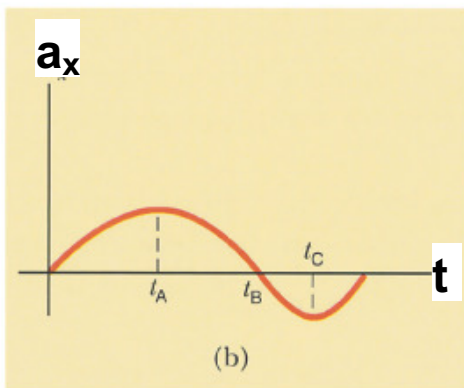
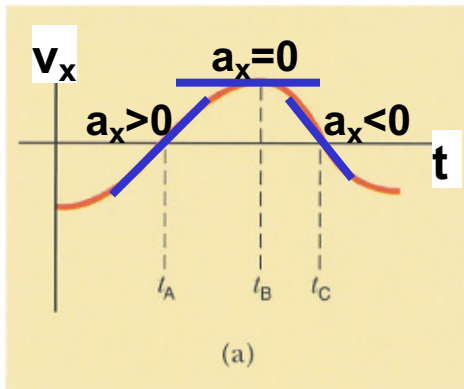
$\Rightarrow$ accelerazione istantanea = **pendenza** grafico velocità tempo

N.B. **spostamento** infinitesimo è segmentino di traiettoria

velocità istantanea è sempre tangente alla traiettoria

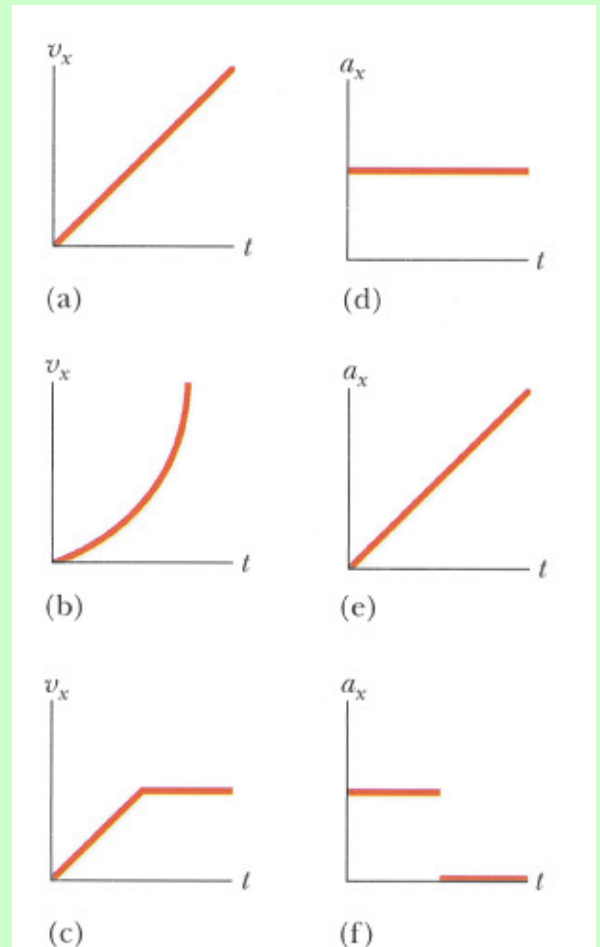
accelerazione può avere un orientamento qualsiasi rispetto alla
traiettoria

derivazione a istantanea a partire da $v(t)$



accelerazione istantanea:
pendenza della tangente
alla curva velocità-tempo
[ad ogni istante]

esempi

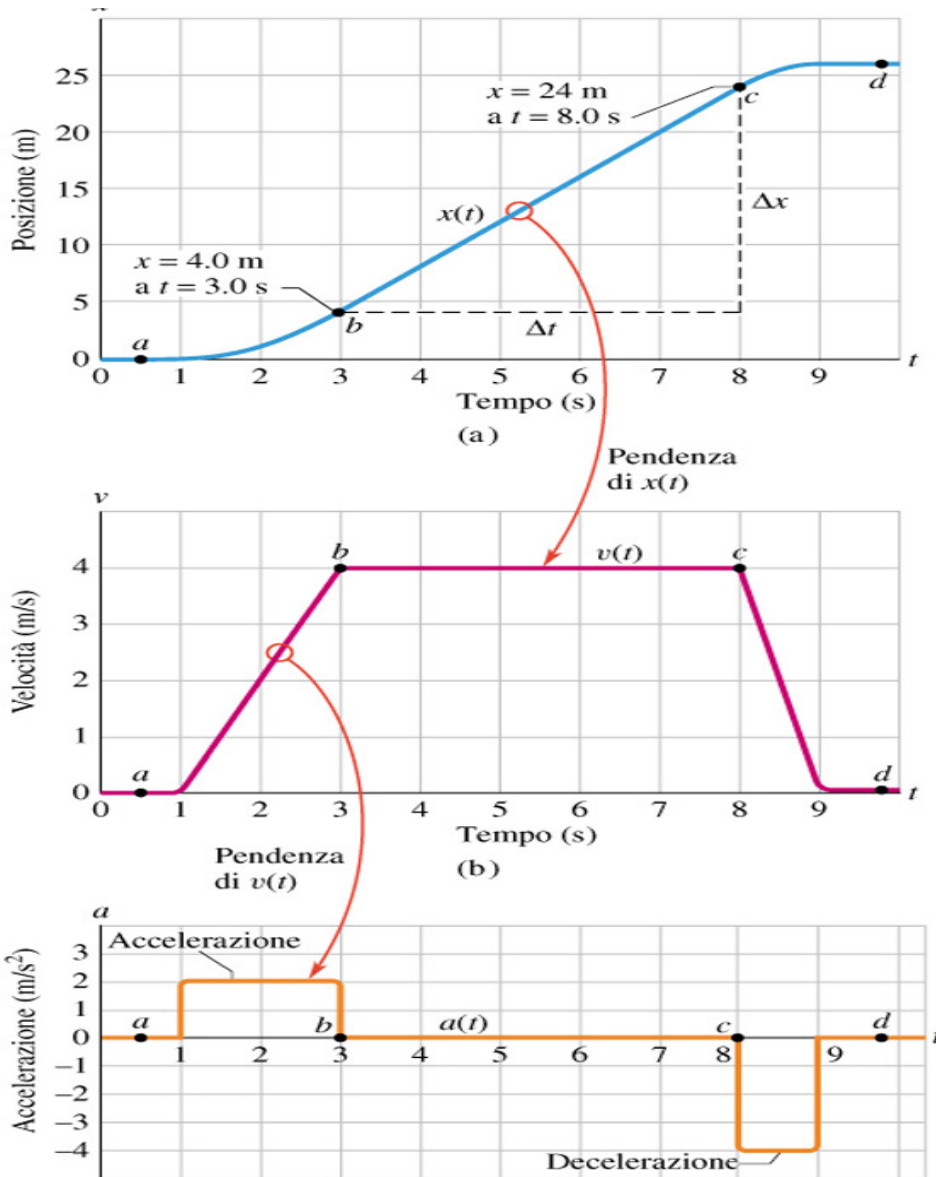


N.B. il **corpo umano** reagisce alle accelerazioni (**accelerometro**)
non alle velocità (non è un tachimetro)

esempio: macchina 90 km/h
aereo 900 km/h non sento la velocità costante
ma le accelerazioni e decelerazioni

sulle montagne russe del Luna Park sento i veloci
cambiamenti di velocità

Esempio, ascensore - accelerazione:



- Nel tratto in cui la velocità aumenta,
l'accelerazione è diversa da zero e positiva
- Quando la velocità rimane costante l'accelerazione è nulla
- Nel tratto in cui la velocità diminuisce,
l'accelerazione è diversa da zero e negativa

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad a_{ist}(t) = a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Moto rettilineo uniforme

- L'accelerazione è nulla. Questa è la definizione !

$$a(t) = 0$$

- La velocità è costante. E' uguale al valore all'istante iniziale $t=0$ (ovvero v_0):

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t a(t) dt = v_x(0) = v_0$$

- Lo spostamento è dato da una semplice formula, in cui s_0 è lo spostamento a $t=0$:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$s(t) = x(t) = x(0) + \int_0^t v(t) dt = x_0 + v_0 t$$

- E' un caso particolare delle formule precedenti.
Disegnare le leggi orarie !

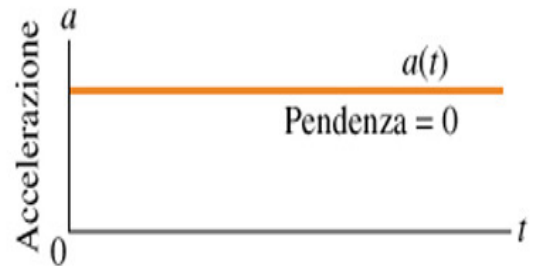
Il moto rettilineo uniforme è monodimensionale

Moto rettilineo uniform. accelerato

Moto unidimensionale: $s = x \mathbf{i}$

- L'accelerazione è costante

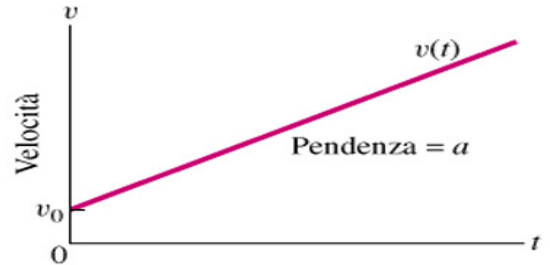
$$a(t) = a_x = a_0$$



- Velocità:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

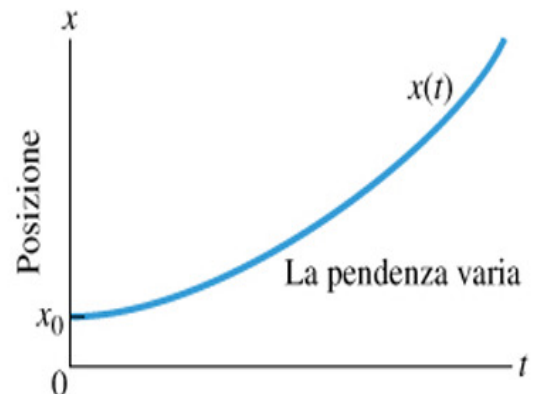
$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_x(t) &= \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a}_x(t) dt \\ &= \mathbf{v}_0 + a_0 t \end{aligned}$$



- Spostamento:

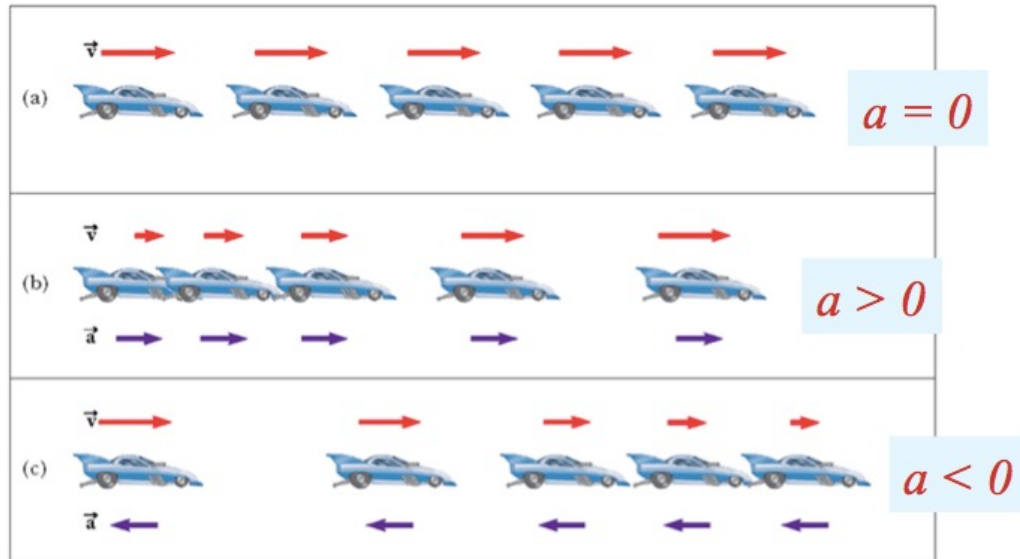
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned} s(t) = x(t) &= x_0 + \int_0^t \mathbf{v}(t) dt \\ &= x_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \end{aligned}$$

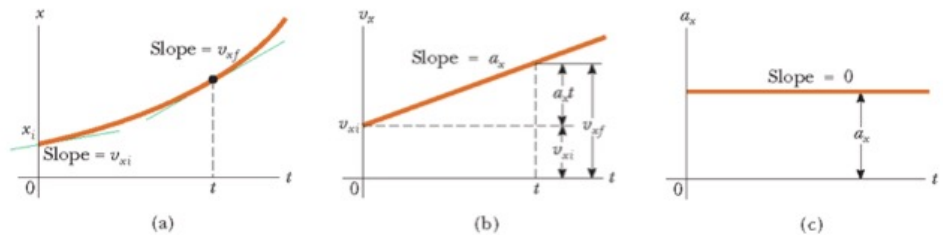


Esempio: moto con $a = \text{cost}$

FIGURA 2.11 (a) Diagramma del moto per una macchina che si muove con velocità costante. (b) Diagramma del moto per una macchina la cui accelerazione costante è nel verso della sua velocità. Il vettore velocità in ciascun istante è indicato da una freccia rossa e il vettore accelerazione costante da una freccia viola. (c) Diagramma del moto per una macchina la cui accelerazione costante è nel verso *opposto* alla velocità in ogni istante.



$$a = a_x = \text{cost} > 0$$



N.B. ci ricordiamo
interpretazione geometrica:
 spostamento totale Δx
 è **area** sotto la curva $v(t)$

$$\Delta x = \sum_n \Delta x_n = \sum_n v_n \Delta t_n$$

$$\Delta x = \lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \sum_n \Delta x_n = \lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \sum_n v_n \Delta t_n$$

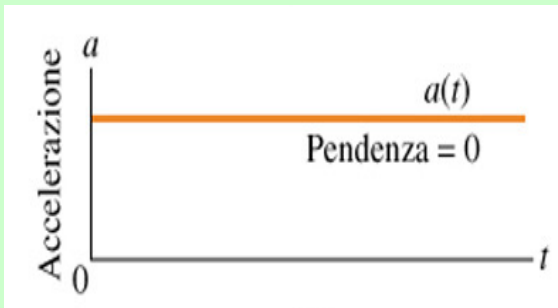
$$\begin{aligned} \Delta x &= v_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} (v_x - v_{x0}) \Delta t \\ &= \frac{1}{2} (v_x + v_{x0}) \Delta t \stackrel{\text{def}}{=} \langle v \rangle \Delta t \end{aligned}$$

$$\bar{v}_x = \frac{v_{x0} + v_x}{2} \quad \text{per } a_x \text{ costante}$$

Velocità media coincide con media delle velocità !

SOLO per $a = \text{cost}$

Caso particolare: accelerazione costante

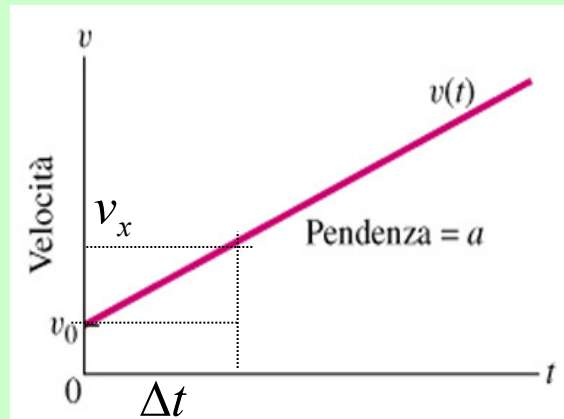


accelerazione **media** coincide con accelerazione **istantanea**

$$\bar{a}_x = a_x = \frac{(v_{xf} - v_{xi})}{t_f - t_i} = \frac{v_x - v_{x0}}{t}$$

$$t_i = 0, \quad t_f = t$$

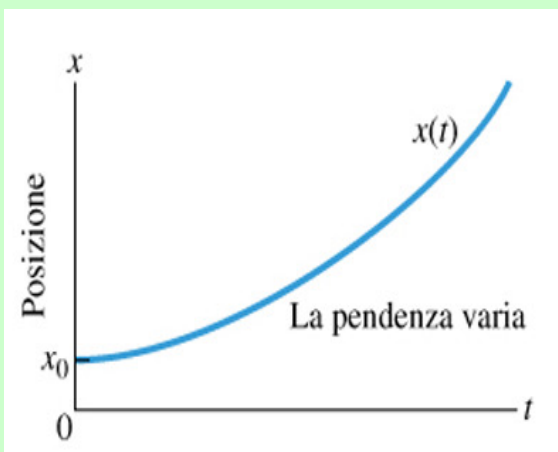
$$v_{xf} = v_x, \quad v_{xi} = v_{x0}$$



$$\rightarrow v_x = v_{x0} + a_x t$$

$$\Delta x = v_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} (v_x - v_{x0}) \Delta t = \frac{1}{2} (v_x + v_{x0}) \Delta t$$

$$\bar{v}_x = \frac{v_{x0} + v_x}{2} \quad (\text{per } a_x \text{ costante})$$



$$\Delta x = \bar{v}_x \Delta t = \left(\frac{v_{x0} + v_x}{2} \right) t$$

$$\rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2} (v_{x0} + v_x) t \quad (\text{per } a_x \text{ costante})$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2} (v_{x0} + v_{x0} + a_x t) t$$

$$x - x_0 = v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (\text{per } a_x \text{ costante})$$

espressione che **non** contiene il **tempo**:

$$x = x_0 + \frac{1}{2} (v_{x0} + v_x) \frac{(v_x - v_{x0})}{a_x} = x_0 + \frac{(v_x^2 - v_{x0}^2)}{2a_x} \rightarrow v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x (x - x_0)$$

le equazioni precedenti valgono solo per **a_x costante** !!!
moto UNIFORMEMENTE accelerato

Equazioni

moto con accelerazione costante

$\mathbf{a}_x$, $\mathbf{v}_{x0}$, $\mathbf{x}_0$ valori noti iniziali

$$a(t) = 0$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

1. $v_x = v_{x0} + a_x t$

velocità in funzione del tempo

2. $x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{x0} + v_x)t$

posizione in funzione di
tempo e velocità

3. $x - x_0 = v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

posizione in funzione di tempo

4. $v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$

velocità in funzione di posizione

se
 $\mathbf{a}_x = 0$
 $\mathbf{v}_{x0} = \mathbf{v}_x$

$$v_x = v_{x0} + \cancel{a_x} t = v_{x0}$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{x0} + v_x)t = \frac{1}{2}(2v_{x0})t = v_{x0}t$$

$$x - x_0 = v_{x0}t + \frac{1}{2}\cancel{a_x}t^2 = v_{x0}t$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2\cancel{a_x}(x - x_0) = v_{0x}^2$$

moto
rettilineo
uniforme

Esempio 1:

Una Ferrari arriva da ferma alla velocità di 100 km/h in 3 s.
Supponendo che l'accelerazione sia costante, determinare:

- 1) il valore dell'accelerazione;
- 2) la velocità raggiunta dopo 2 secondi.

Svolgimento

Sappiamo che

$$v(3\text{ s}) = 100 \text{ km/ora} = 10^5 \text{ [m]} / 3600 \text{ [s]} = 27.8 \text{ m/s}$$

Quindi

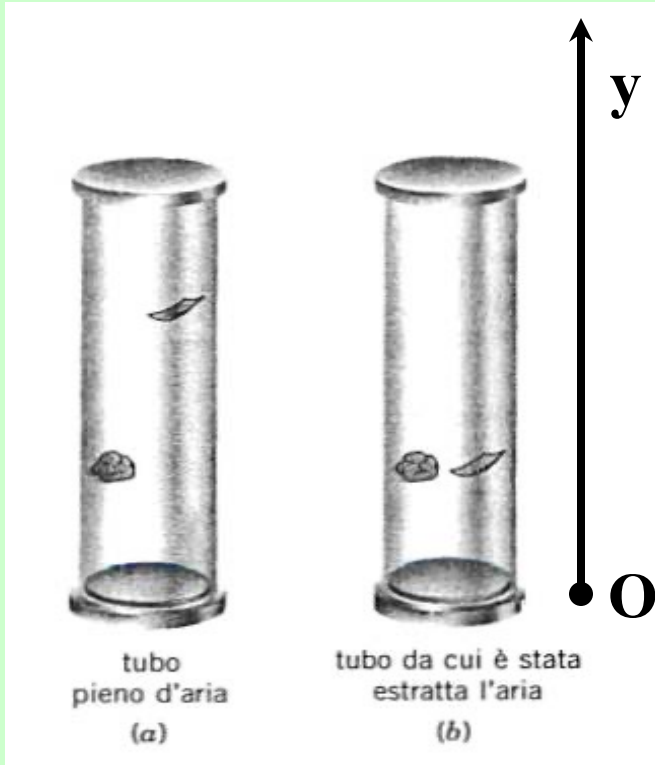
$$a = \text{cost} = v(3\text{ s}) \text{ [ms}^{-1}\text{]} / 3 \text{ [s]} = 27.8/3 \text{ [ms}^{-2}\text{]} = 9.27 \text{ [ms}^{-2}\text{]}$$

La velocità dopo 2 secondi è:

$$\begin{aligned} v(2\text{ s}) &= a_o t = 9.27 \text{ [ms}^{-2}\text{]} 2 \text{ [s]} = 18.5 \text{ [m/s]} \\ &= 18.5(3600/10^3) \text{ [km/h]} = 68 \text{ km/h} \end{aligned}$$

Corpi in caduta libera

Galileo: in assenza di attrito (aria) **tutti i corpi** cadono con la **stessa accelerazione**, indipendentemente dalla forma e dalla massa



$$\vec{a} = -g \vec{j}$$

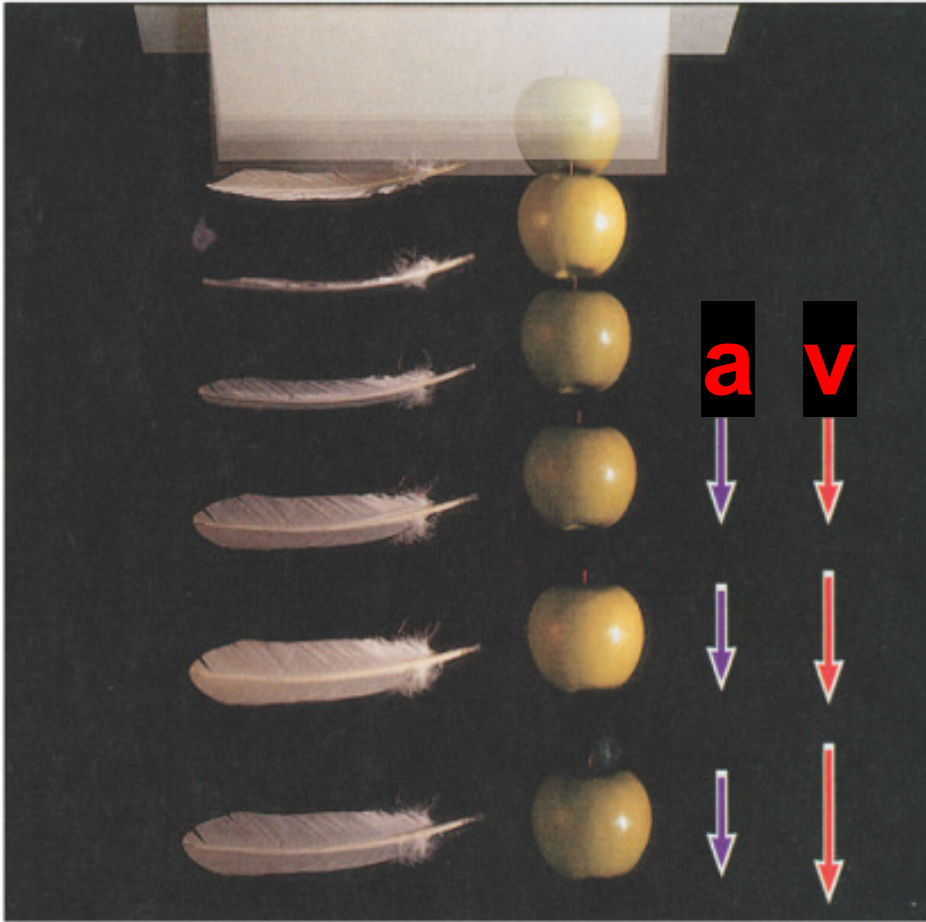
accelerazione di **gravità**
 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$



1971- filmato fatto dagli astronauti sulla Luna:
<http://www.history.nasa.gov/alsj/a15/a15v.1672206.mov>

- Alt – Invio -

valgono le equazioni cinematiche precedenti con
 $x \rightarrow y$ e $a_y \rightarrow -g$

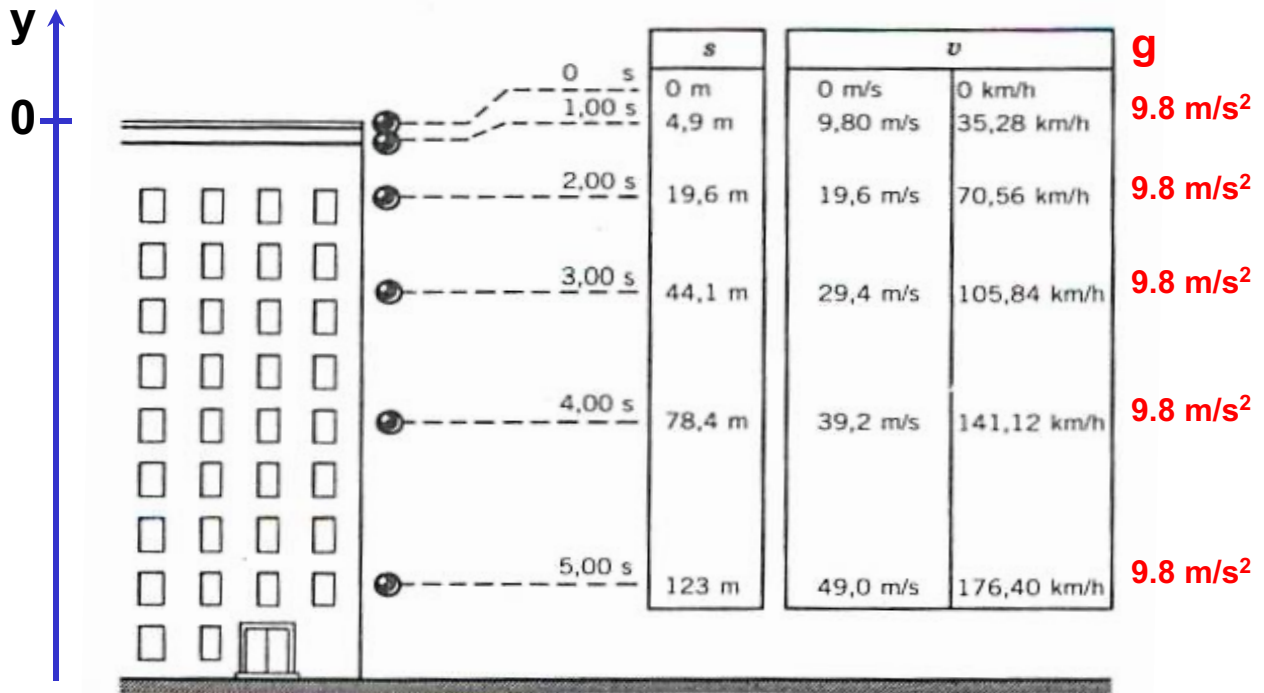


Corpi in caduta libera nel vuoto:

- ✗ accelerazione costante
- ✗ velocità aumenta linearmente nel tempo

esempio: caduta libera

Calcolare **posizione**, **velocità** ed **accelerazione** di un corpo di massa **M** in caduta libera dopo **1,2,3,4,5 secondi**



accelerazione

$$a = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$$

spostamento

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = -\frac{1}{2} g t^2$$

velocità

$$v = v_0 - g t = -g t$$

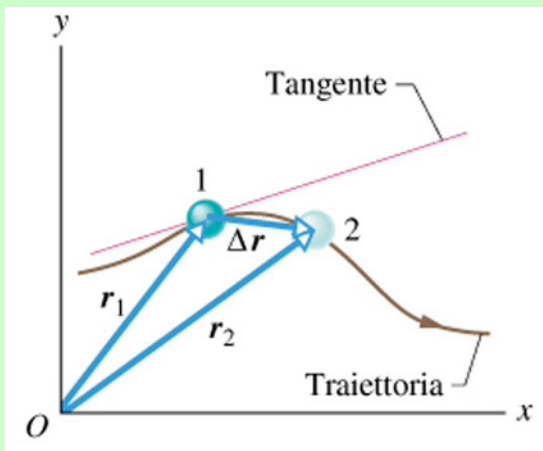
$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) = -2g y$$

vale per ogni corpo, indipendentemente dalla massa !!!

Moto in due dimensioni

- moto in un **piano** (esempio: proiettile, satellite ...)
- si trascurano le **forze**
- oggetto in moto assimilabile ad una **particella**
[tutte le parti si muovono **solidali** nella stessa direzione]

traiettoria della particella



$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ vettore **posizione**

$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ vettore **spostamento**
nell'intervallo Δt

dalla **composizione** di vettori:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) \\ &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} \\ &= \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}\end{aligned}$$

N.B. il formalismo può essere facilmente
esteso a **3 dimensioni**:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \Delta\vec{r} &= \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}\end{aligned}$$

Velocità media e istantanea

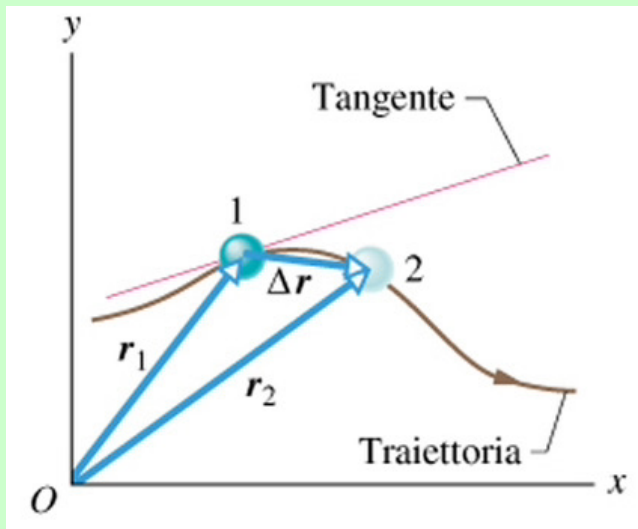
velocità media

(indipendente dal percorso)

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

per componenti:

$$\begin{aligned}\bar{\vec{v}} &= \frac{\Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}}{\Delta t} \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j}\end{aligned}$$



velocità istantanea

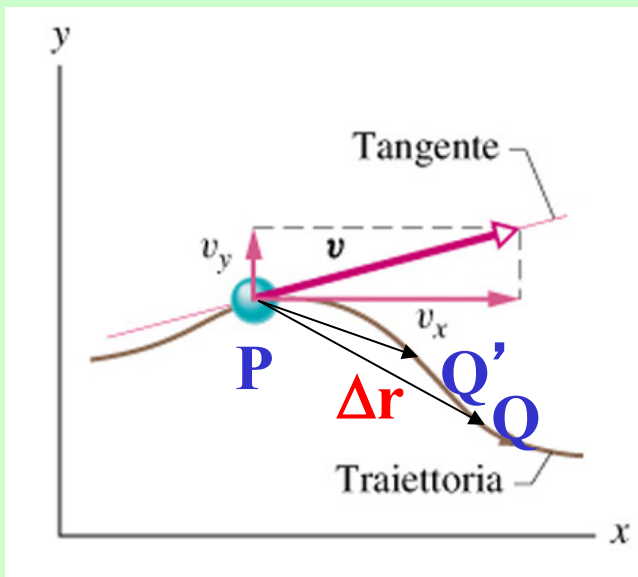
- direzione **tangente** alla traiettoria
- verso del moto

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

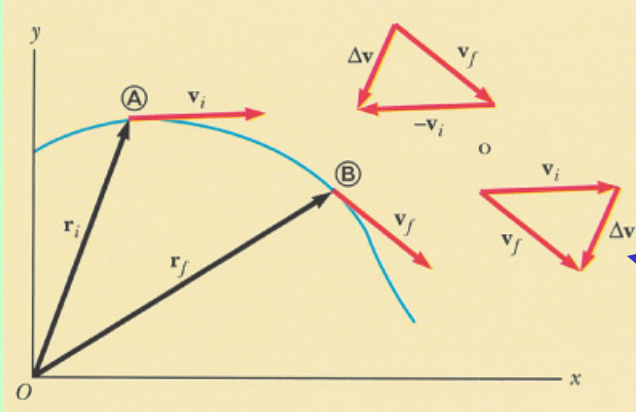
per componenti:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j}) = \\ &= \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j}\end{aligned}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$



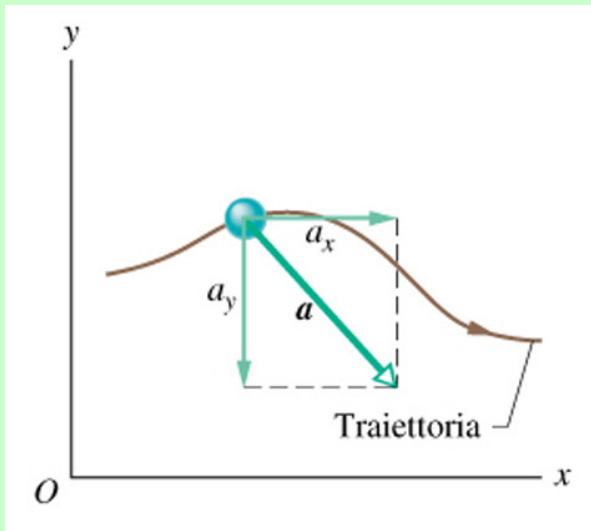
Accelerazione media e istantanea



accelerazione media

$$\bar{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$\bar{a}$ ha stessa direzione di Δv



accelerazione istantanea

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$a \neq 0$ se **v** cambia **intensità**
o **direzione**

per componenti:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d}{dt} (v_x \vec{i} + v_y \vec{j}) = \\ &= \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} \end{aligned}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

Moto in Due dimensioni con accelerazione costante

*si generalizzano le leggi del moto
in una dimensione con accelerazione costante*

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = \text{costante} \Rightarrow \begin{cases} a_x = \text{costante} \\ a_y = \text{costante} \end{cases}$$

- applico le **equazioni** della **cinematica**
separatamente per le **componenti x** ed **y**
del vettore velocità

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{xf} = v_{xi} + a_x t \\ v_y &= v_{yf} = v_{yi} + a_y t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{v}_f = v_{xf}\vec{i} + v_{yf}\vec{j} = \vec{v}_i + \vec{a}t$$

- analogamente per il vettore **posizione**

$$\left. \begin{aligned} x_f &= x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y_f &= y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{r}_f = x_f\vec{i} + y_f\vec{j} = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

moto in due dimensioni con accelerazione costante:

equivale a **due moti indipendenti** nelle direzioni **x** ed **y**
con **accelerazioni costanti** a_x ed a_y

→ moto in **x** non influenza moto in **y** e viceversa ←

Applicazione: moto del proiettile

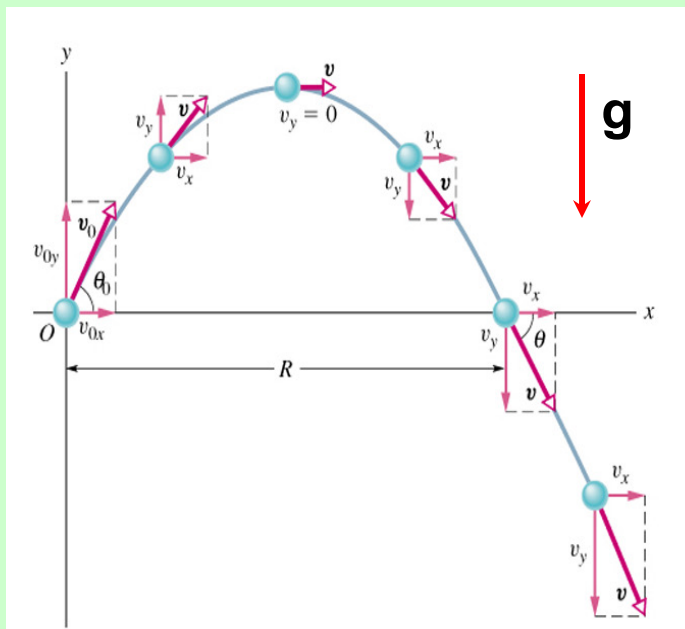
[qualunque oggetto lanciato in aria]

Ipotesi:

- accelerazione di gravità **g** costante
- resistenza dell'aria trascurabile



- ✗ moto **orizzontale** e **verticale** sono **indipendenti**
- ✗ la **traiettoria** è sempre una **parabola** [da dimostrare !!!]



velocità iniziale:

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0$$

accelerazione:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = -g\vec{j}$$

$$a_x = 0 \quad \leftarrow$$

$$a_y = -g \quad \leftarrow$$

applico le equazioni della cinematica **monodimensionale**:

moto **orizzontale** [rettilineo ed uniforme]:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$$

$$x = \cancel{x_0} + v_{0x}t = (v_0 \cos \theta_0)t$$

NON ho accelerazione in x $\Rightarrow$ **v costante**

moto **verticale** [caduta di un grave]:

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \theta_0 - gt$$

$$y = \cancel{y_0} + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

verifica indipendenza dei moti

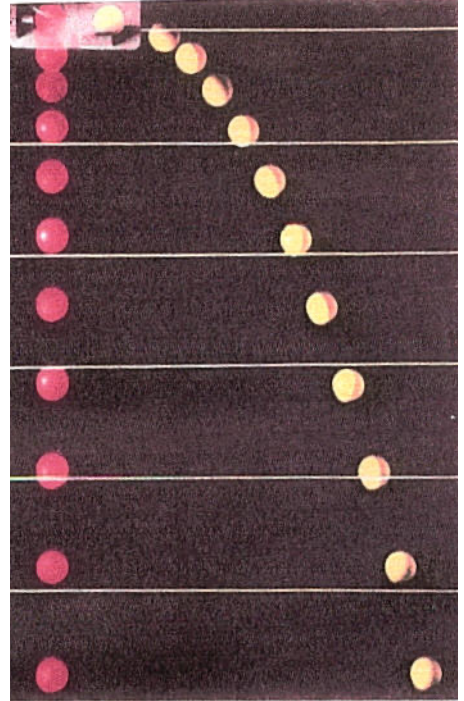
due palle da golf

palla **rossa**: in caduta libera

palla **gialla**: lanciata orizzontalmente

raggiungono terra nello **stesso tempo**

⇒ moto verticale **indipendente**
da moto orizzontale

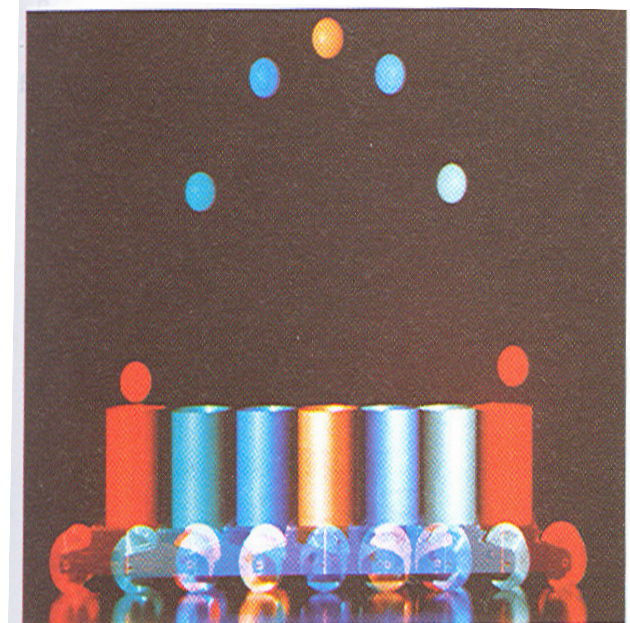


palla lanciata verso l' **alto**
da **carrello** in moto
con velocità costante **v**:

palla mantiene
velocità orizzontale iniziale

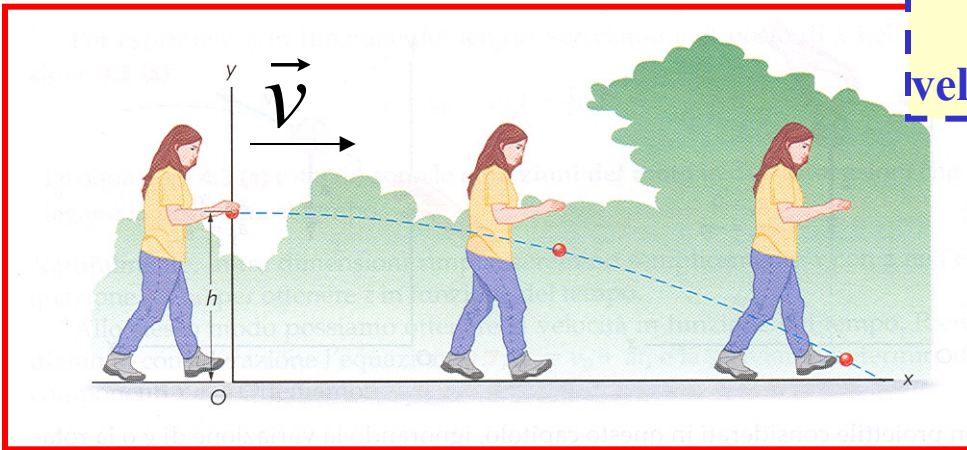
⇒ è sempre sopra carrello

⇒ atterra dentro il carrello



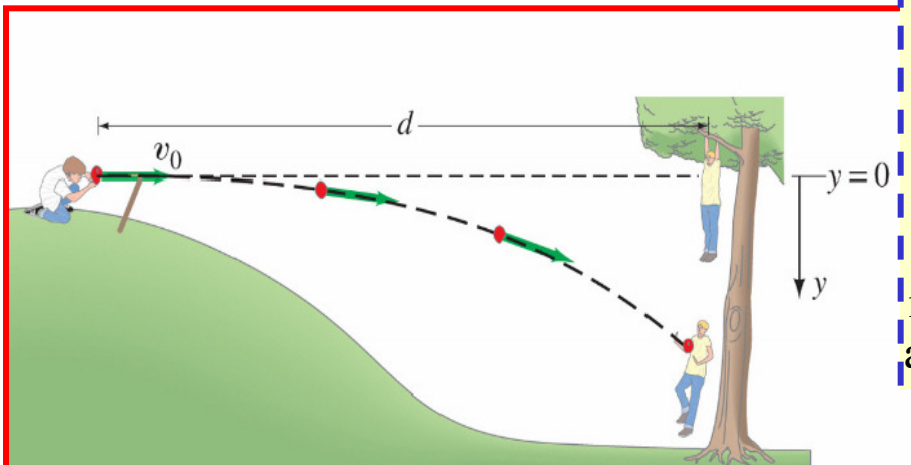
Esempi di indipendenza dei moti

- 1. pallina di gomma** lasciata cadere
rimbalza e **torna SEMPRE in mano**,
anche se la persona è in moto
con velocità costante !!!



persona e palla
hanno **stessa**
velocità orizzontale

- 2. ragazzo punta** con fionda amico appeso a **distanza d**:
se l'amico si lascia andare appena la fionda parte
viene **SEMPRE colpito!!!**



ragazzo e fionda
percorrono **stessa**
distanza verticale

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

in tempo **tempo t**
impiegato dalla fionda
a percorrere **distanza d**

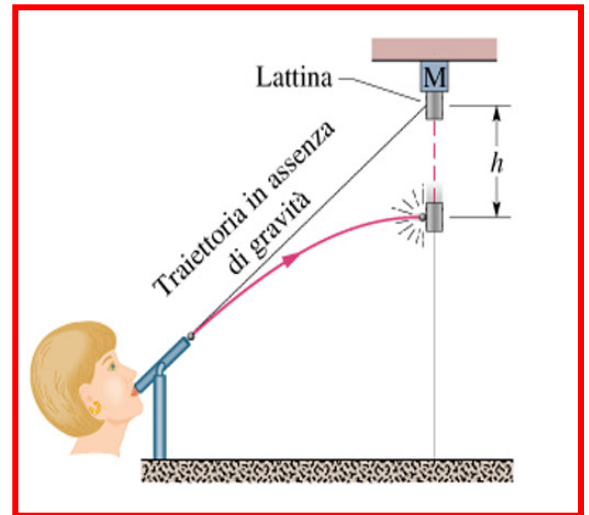
Esperienza in Laboratorio

3. la pallina colpisce **SEMPRE** la lattina !!!

- ▶ cerbottana spara pallina mirando lattina
- ▶ lattina è rilasciata quando sparo pallina

pallina e lattina sono soggette a **stessa** accelerazione g

⇒ tutte e due coprono **uguale traiettoria verticale** [indipendente dalla massa]



traiettoria del proiettile:

$$x = v_{0x} t = (v_0 \cos \theta_0) t$$

$$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = (v_0 \sin \theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2$$

risolvo rispetto a t:

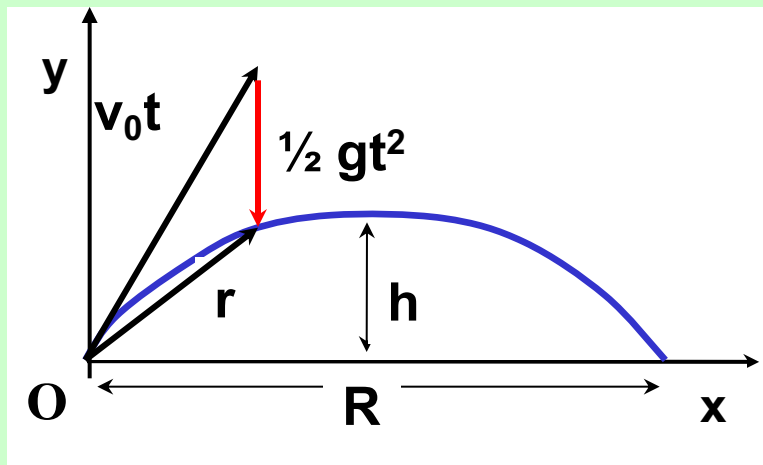
$$t = \frac{x}{v_0 \cos \theta_0}$$

$$y = v_0 \sin \theta_0 \frac{x}{v_0 \cos \theta_0} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{(v_0 \cos \theta_0)^2}$$

$$y = \tan \theta_0 x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2 = a x - b x^2$$

parabola

[completamente nota
per v_0 e θ_0 noti]



$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \\ &= \vec{r}_0 + \\ &\quad \vec{v}_0 t + \\ &\quad \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \end{aligned}$$

posizione del proiettile $\left[\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \right]$

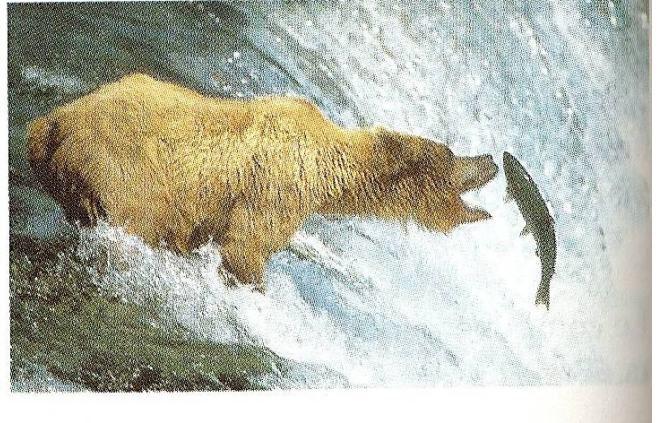
posizione **iniziale**

spostamento in **assenza** di **accelerazione**

spostamento dovuto ad **accelerazione**

$$\vec{g} = -g \vec{j}$$

Esempi di moto del proiettile



la traiettoria
dei corpi in volo
è di tipo parabolico

altezza h massima raggiunta dal proiettile:

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \theta_0 - gt = 0$$

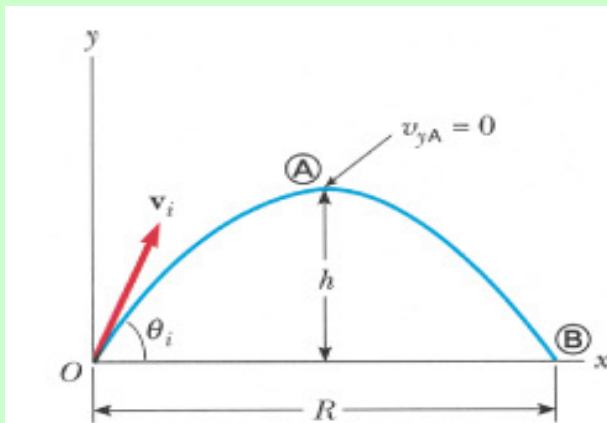
$$\Rightarrow t_1 = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}$$

$$y = h = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = h = v_0 \sin \theta_0 \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \right)^2$$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$$

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \quad \text{per} \quad \theta_0 = 90^\circ$$



h = altezza massima raggiunta
R = gittata
[distanza orizzontale coperta]

gittata R del proiettile [distanza orizzontale coperta]:

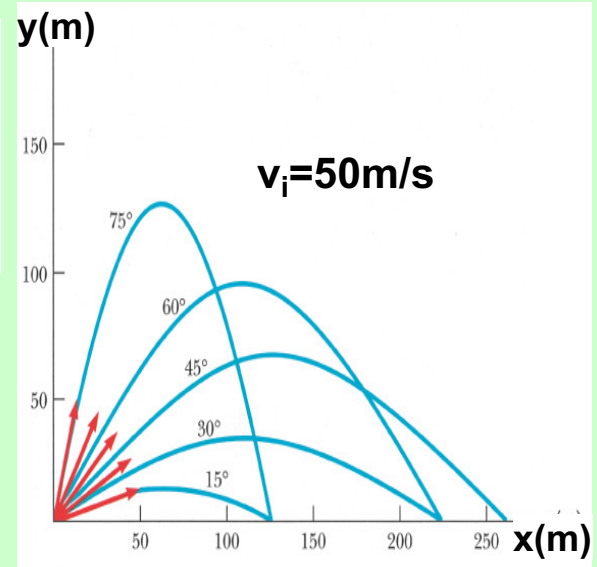
$$x = R \quad \text{per} \quad t = 2t_1$$

$$x = v_{0x}t = (v_0 \cos \theta_0) 2t_1$$

$$= (v_0 \cos \theta_0) \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g}$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

$$R_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \quad \text{per} \quad \theta_0 = 45^\circ$$



Attenzione

Le formule di

traiettoria

$$y = \operatorname{tg} \theta_0 x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2 = a x - b x^2$$

gittata

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

quota massima

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$$

NON sono formule generali !!!

Valgono solo nelle condizioni

$$y_{\text{iniziale}} = y(0) = 0$$

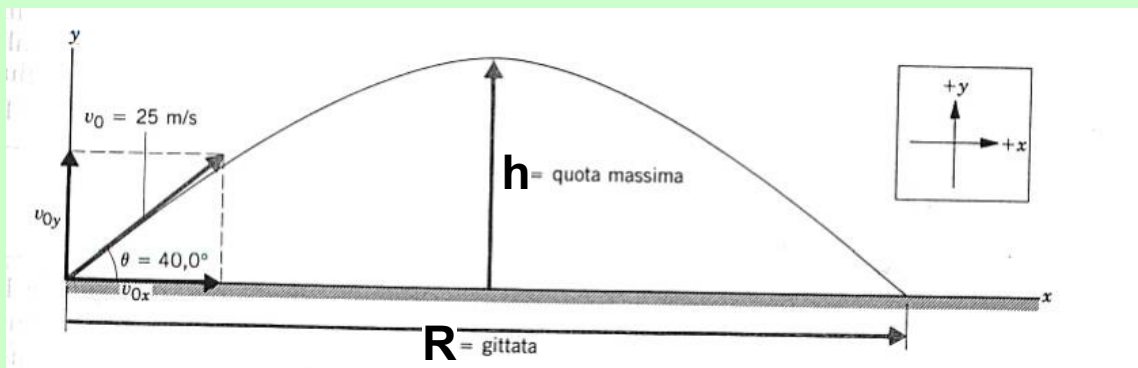
$$y_{\text{finale}} = y(0) = 0$$

applicazione: gittata e quota massima

Un proiettile di massa **m**, viene sparato con velocità **v = 25 m/s** ad un angolo di **40°** rispetto al suolo.

- a) quale è la massima quota **h** raggiunta dal proiettile ?
- b) quale è la gittata **R** del cannone ?
- c) quale sarebbe l'angolo che massimizza la gittata ?

[trascurare l' attrito]



a) quota **h**

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} = \frac{(25 \text{ m/s})^2 \sin^2(40^\circ)}{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2} = 13.2 \text{ m}$$

b) gittata **R**

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{(25 \text{ m/s})^2 \sin(80^\circ)}{9.8 \text{ m/s}^2} = 62.8 \text{ m}$$

c) gittata massima per $\theta_0 = 45^\circ$

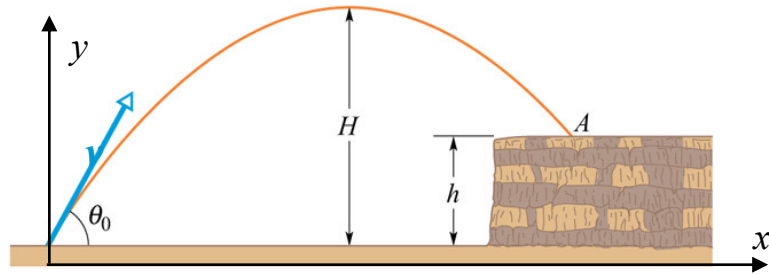
$$R_{\max} = \left. \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g} \right|_{\theta_0=45^\circ} = \frac{(25 \text{ m/s})^2}{9.8 \text{ m/s}^2} = 63.8 \text{ m}$$

esempio: lancio su un terrapieno

Un proiettile è lanciato verso un **terrapieno di altezza h** con **velocità iniziale $v_0 = 42.0 \text{ m/s}$** e angolo di lancio **$\theta_0 = 60^\circ$** sopra il piano orizzontale. Il proiettile cade nel punto A, **5 s** dopo il lancio. Calcolare: *a) l'altezza del terrapieno, b) la velocità del proiettile all'impatto, c) la massima altezza, H , che esso ha raggiunto sopra il livello del terreno.* Si trascuri la resistenza dell'aria.

I dati del problema sono:

- $x_0 = y_0 = 0$
- $t_f = 5 \text{ s}$
- $\theta_0 = 60^\circ$
- $v_{0,x} = 42.0 \cos(\theta_0) = 21.0 \text{ m/s}$
- $v_{0,y} = 42.0 \sin(\theta_0) = 36.4 \text{ m/s}$
- $y(t_f) = h$?



Utilizzando le equazioni del moto parabolico, calcolo i valori di $x(t)$ e $y(t)$ all'istante $t = t_f$

$$v_x(t_f) = v_{0,x} = 21.0 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad x(t_f) = v_{0,x} t_f = 21 \cdot 5 [m] = 105 \text{ m}$$

$$v_y(t_f) = a_y t_f + v_{0,y} = -g t_f + v_{0,y} = -11.1 \text{ m/s} \Rightarrow y(t_f) = -\frac{1}{2} g t_f^2 + v_{0,y} t_f = h = -\frac{9.83}{2} \cdot 5^2 + 36.4 \cdot 5 = 59.1 \text{ m}$$

La massima quota H si ottiene quando la sua velocità verticale si annulla, per passare da ascendente ($v_y > 0$) a discendente ($v_y < 0$).

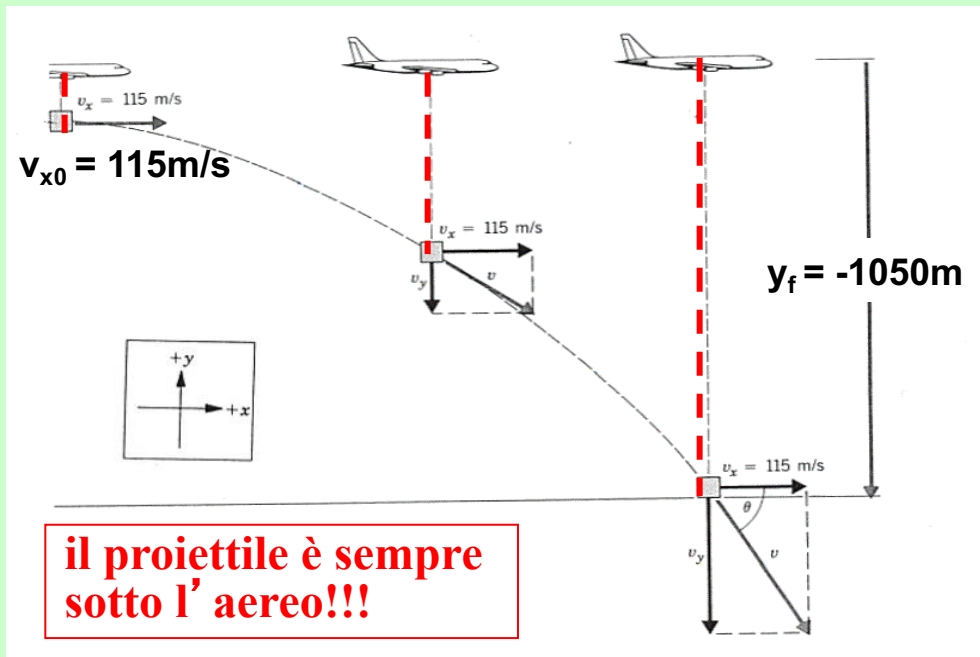
Calcolo il tempo t_H al quale $v_y = 0$ e poi sostituisco il valore trovato nella $y(t)$ poiché $H = y(t_H)$

$$v_y(t_H) = -g t_H + v_{0,y} = 0 \Rightarrow t_H = \frac{v_{0,y}}{g} = \frac{36.4 [\text{m s}^{-1}]}{9.83 [\text{m s}^{-2}]} = 3.70 \text{ s} \Rightarrow$$

$$H = y(t_H) = -\frac{1}{2} g t_H^2 + v_{0,y} t_H = -\frac{1}{2} \cdot 9.83 [\text{ms}^{-2}] \cdot 3.7^2 [\text{s}^2] + 36.4 [\text{ms}^{-1}] \cdot 3.7 [\text{s}] = 67.4 \text{ m}$$

applicazione: lancio di gravi da aereo

[bomber, lancio di materiale di soccorso, ...]



calcolare: t_{volo} del grave, distanza x_{finale}

$$\begin{cases} x_f = x_i + v_{x0} t \\ y_f = y_i + v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

moto orizzontale: rettilineo ed uniforme

moto verticale: uniformemente accelerato

$$\begin{cases} x_f = 0 + (115 \text{ m/s}) \cdot t \\ -1050 \text{ m} = 0 + 0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$



$$t^2 = \frac{2 \times 1050 \text{ m}}{9.8 \text{ m/s}^2} = 214.3 \text{ s}^2$$

$$t = 14.6 \text{ s}$$

$$x_f = (115 \text{ m/s}) \times 14.6 \text{ s} = 1679 \text{ m}$$

$$\text{N.B. } v_x = v_{x0} = 115 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_{y0} - g t = -g t$$

V_x è **costante**

V_y **aumenta** al passare del tempo

Moto circolare uniforme

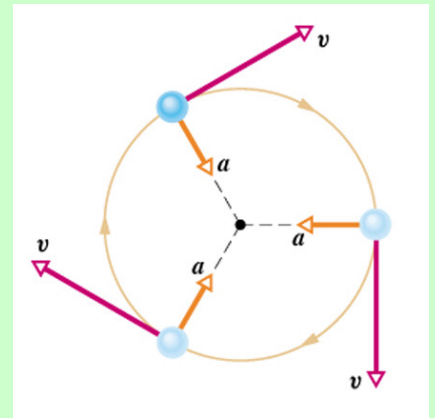
Ipotesi:

moto su una circonferenza con
velocità costante in **modulo**



✗ ho **accelerazione centripeta**
[v cambia di **direzione**]

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$



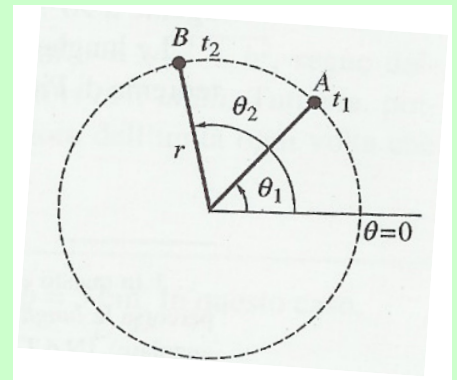
✗ **periodo** di rivoluzione:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

✗ **velocità angolare:**

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \text{ rad / s}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \text{ rad / s} \Rightarrow \theta = \omega t$$

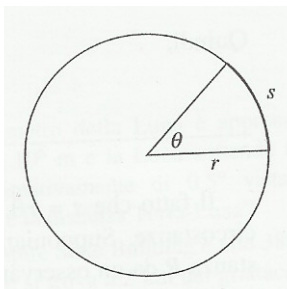


in un periodo T:

$$\theta = 2\pi = \omega \cdot T = \omega \cdot \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow$$

$$v = \omega r$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$



$$s = \theta r$$

radiante

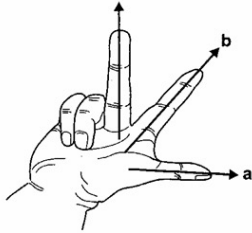
$$\text{se } s = r \quad \theta = 1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \cong 57.3^\circ$$

$$\text{se } s = 2\pi r \quad \theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

velocità angolare - notazione vettoriale

ω è un vettore

FUORI PROGRAMMA



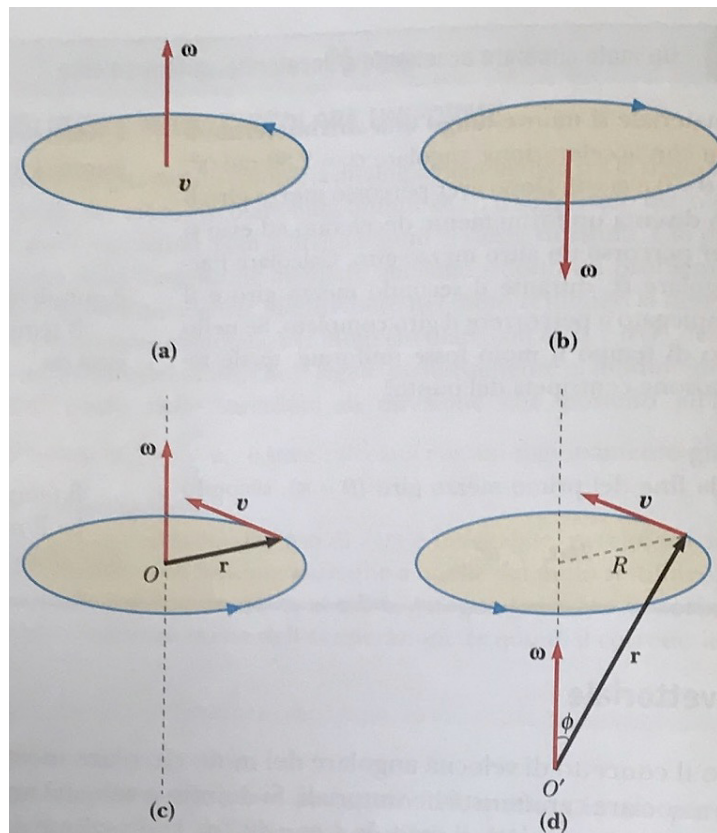
$$|\omega| = \frac{d\theta}{dt}$$

modulo

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

prodotto vettore

[regola della mano destra]



ω applicato
al centro della
circonferenza

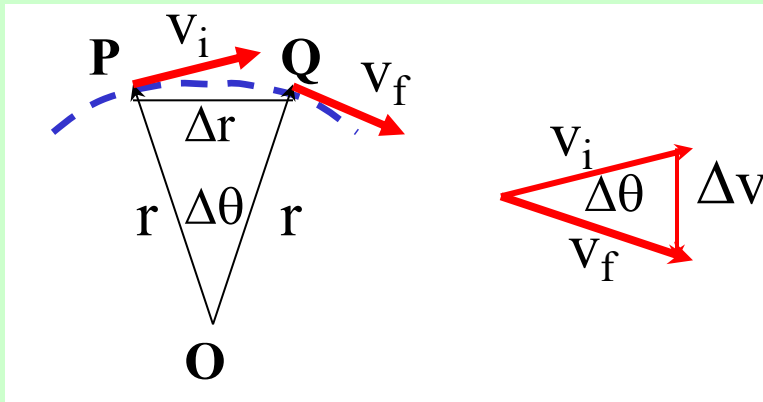
ω applicato
al in punto O'
asse rotazione
($R=r \sin\phi$)

origine accelerazione centripeta [interpretazione geometrica]

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

accelerazione media:

$$\bar{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$



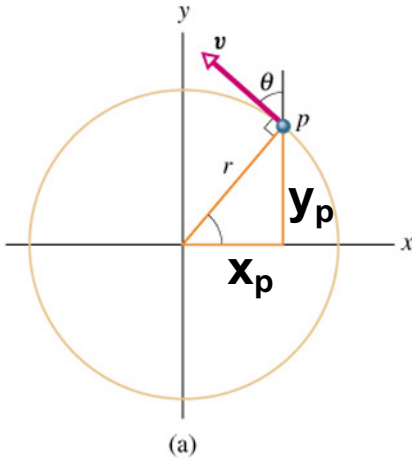
triangoli simili: $\frac{|\Delta \vec{r}|}{r} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{v}$ [infatti $\mathbf{r}$ è sempre $\perp$ a $\mathbf{v}$]

$$|\vec{a}| = \left| \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right| = \frac{v}{r} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v^2}{r} \quad \text{punta verso il } \mathbf{centro} \text{ della circonferenza}$$

$$[\mathbf{N.B.} \quad [a] = [v]^2 / L = [L/T]^2 / L = L/T^2]$$

origine accelerazione centripeta

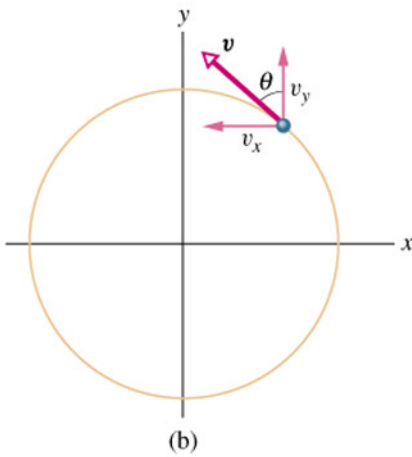
$$a_r = \frac{v^2}{r}$$



$$\vec{r} = x_p \vec{i} + y_p \vec{j}$$

$$x_p = r \cos \theta$$

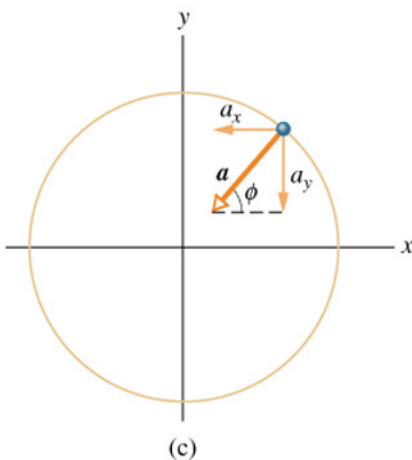
$$y_p = r \sin \theta$$



$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

$$= (-v \sin \theta) \vec{i} + (v \cos \theta) \vec{j}$$

$$= \left(-v \frac{y_p}{r}\right) \vec{i} + \left(v \frac{x_p}{r}\right) \vec{j}$$



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \left(-\frac{v}{r} \frac{dy_p}{dt}\right) \vec{i} + \left(\frac{v}{r} \frac{dx_p}{dt}\right) \vec{j}$$

$$= \left(-\frac{v}{r} v_y\right) \vec{i} + \left(\frac{v}{r} v_x\right) \vec{j}$$

$$= \left(-\frac{v^2}{r} \cos \theta\right) \vec{i} + \left(-\frac{v^2}{r} \sin \theta\right) \vec{j}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r} \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{v^2}{r}$$

$$\tan \phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \Rightarrow \theta = \phi \Rightarrow \mathbf{a \text{ è diretta come } r !!}$$

applicazione: g-LOC

[g-induced loss of consciousness]



aereo che compie il cerchio della morte:

il corpo del pilota subisce una **accelerazione centripeta** con la testa rivolta verso il centro di curvatura

- ▶ cala la pressione sanguigna al cervello
- ▶ perdita funzioni cerebrali

$$a_c = 2g - 3g \rightarrow \text{pesantezza}$$

$$a_c = 4g \rightarrow \text{perdita percezione colori / si restringe il campo visivo}$$

$$a_c > 4g \rightarrow \text{cessa la visione / perdita di conoscenza}$$

esempio: qual è l' accelerazione centripeta a cui è sottoposto un pilota di F-22 che vola a velocità di **694 m/s** percorrendo un arco di cerchio di raggio di curvatura **$r = 5.8 \text{ km}$** ?

sebbene la velocità scalare sia costante, esiste accelerazione centripeta causata da traiettoria circolare.

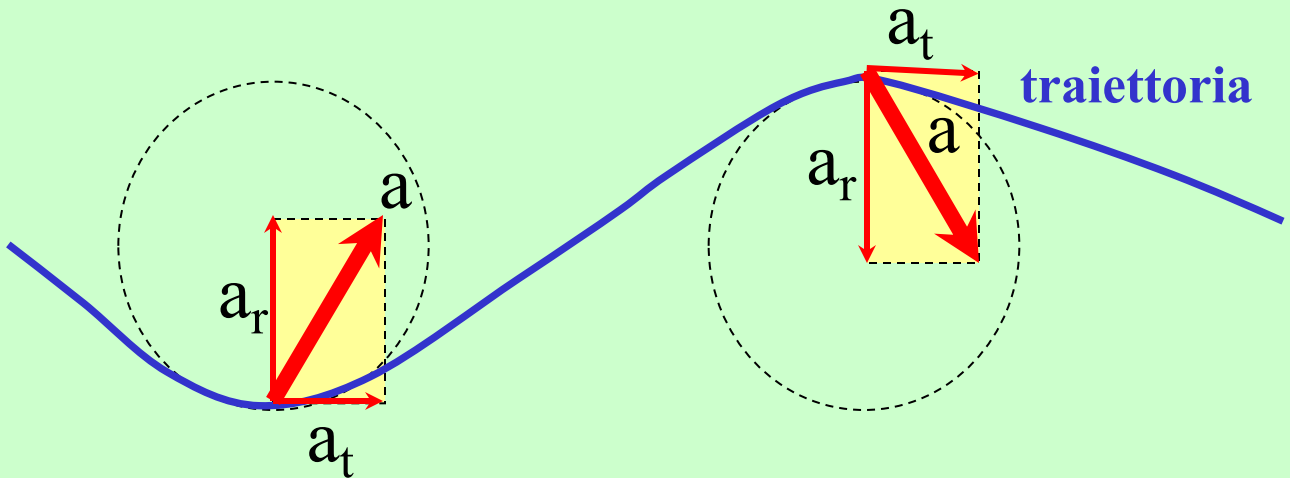
$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(649 \text{ m/s})^2}{(5.8 \cdot 10^3 \text{ m})} = 83.0 \text{ m/s}^2 = 8.5 \text{ g}$$

il pilota cade incosciente prima di avvertire il segnale di allarme !!!

Traiettoria curva arbitraria

[velocità variabile in direzione e modulo]

approssimo la curva con **archi** di **circonferenza**:



$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

$$|\vec{a}_t| = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

accelerazione tangenziale:

dovuta a
variazione del **modulo** della velocità

$$|\vec{a}_r| = \frac{v^2}{r}$$

accelerazione radiale [o centripeta]:

dovuta a
variazione della **direzione** della velocità

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$$

N.B. moto circolare uniforme [v costante]:

$a_t = 0$ sempre; ho solo a_r

Ordini di grandezza

velocità

luce nel vuoto	$300\,000\text{ km/s} = 3\,10^8\text{ m/s}$
suono (in aria)	330 m/s
(in acqua)	1493 m/s
aereo (record NASA)	$7\,v_{\text{suono}} \approx 2310\text{ m/s}$
aereo di linea	$800\text{ km/h} = 222\text{ m/s}$
auto in città	$30\text{ km/h} = 8.3\text{ m/s}$
a piedi	2 m/s
paracadutista (caduta libera)	$50\text{ km/h} = 65\text{ m/s}$
cavallo al galoppo	$250\text{ m/min} = 4.2\text{ m/s}$
palla da baseball.....	40 m/s

accelerazione

gravità g_{Terra}	9.8 m/s^2
gravità g_{Luna}	1.7 m/s^2
a_c centripeta Terra (attorno asse)	$3.37\,10^{-2}\text{ m/s}^2$
a_c centripeta Terra (attorno Sole)	$4.4\,10^{-3}\text{ m/s}^2$
treno.....	1.2 m/s^2
auto..... (da 0 a 100 km/h in 7 sec)	4 m/s^2
palla da baseball 100 g.....	$\approx 10^4\text{ m/s}^2$