

Problemi: calore -transizioni di fase

1. a) Quanto calore occorre per far passare del ghiaccio di massa $m = 720 \text{ g}$ e temperatura di -10°C allo stato liquido alla temperatura di 15°C ?

b) supponete di fornire al ghiaccio un calore totale di solo **210 kJ**. Quali sono lo stato finale e la temperatura dell'acqua finale ?

$$c_{\text{ghiaccio}} = 2220 \text{ J/(kg K)}$$

$$c_{\text{acqua}} = 4190 \text{ J/(kg K)}$$

$$L_F = 333 \text{ kJ/kg}$$

a) Idea chiave:

Divido il processo in 3 stadi:

stadio 1: il ghiaccio non può fondere a T inferiore al punto di congelamento.

Q_1 fornito innalza solo la temperatura da -10 a 0°C :

$$Q_1 = c_{\text{ghiaccio}} m (T_f - T_i) = [2220 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}](0.720 \text{ kg})[0^\circ\text{C} - (-10^\circ\text{C})] = 15984 \text{ J} \approx 15.98 \text{ kJ}$$

stadio 2: finchè il ghiaccio non è tutto sciolto la temperatura non cambia:

Q_2 ceduto cambia lo stato della sostanza, da solido a liquido:

$$Q_2 = mL_F = (333 \text{ kJ/kg})(0.720 \text{ kg}) = 239.8 \text{ kJ}$$

stadio 3: calore Q_3 fornito innalza ora la temperatura acqua, fino a 15°C :

$$Q_3 = c_{\text{acqua}} m (T_f - T_i) = [4190 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}](0.720 \text{ kg})[15^\circ\text{C} - (0^\circ\text{C})] = 45252 \text{ J} \approx 45.25 \text{ kJ}$$

Calore Q_{tot} richiesto:

$$Q_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (15.98 + 239.8 + 45.25) \text{ kJ} \approx 300 \text{ kJ}$$

b) Fornendo solo **210 kJ** porto il ghiaccio al punto di congelamento (uso 15.98 kJ) e mi resta $Q_{\text{res}} = 210 \text{ kJ} - 15.98 \text{ kJ} = 194 \text{ kJ}$. Non mi basta per fondere **TUTTO** il ghiaccio.

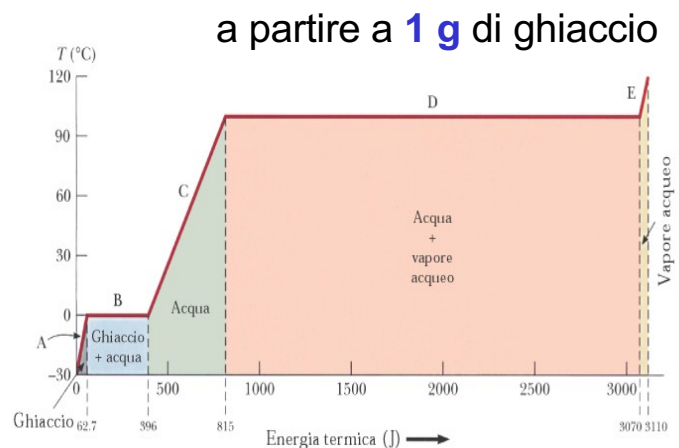
Idea chiave: in fusione incompleta il processo termina a $T = 0^\circ\text{C}$ con miscela di acqua e ghiaccio.

$$m = Q_{\text{res}}/L_F = 194 \text{ kJ}/(333 \text{ kJ/kg}) = 0.583 \text{ kg}$$

$$m_{\text{ghiaccio}} = 720 \text{ g} - 583 \text{ g} = 137 \text{ g}$$

massa di ghiaccio fusa

massa di ghiaccio restante



- 2.** Un ferro di cavallo di **1.5 kg** inizialmente a **600 °C** è lasciato cadere in un secchio contenente **20.0 kg** di acqua a **25.0 °C**. Quale è la temperatura finale ?
[Trascurare il calore specifico del contenitore e assumere che solo piccola parte di acqua vaporizzi]

$$\text{N.B. } c_{\text{acqua}} = 4186 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$$
$$c_{\text{Fe}} = 448 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$$

Il trasferimento di calore procede fino a che il ferro di cavallo e l'acqua arrivano alla stessa temperatura finale T .

L'energia persa dal ferro viene assorbita dall'acqua:

$$Q_{\text{Fe}} + Q_{\text{acqua}} = 0$$

$$m_{\text{Fe}} c_{\text{Fe}} (T - 600^\circ \text{C}) + m_{\text{acqua}} c_{\text{acqua}} (T - 25^\circ \text{C}) = 0$$

$$T = \frac{m_{\text{acqua}} c_{\text{acqua}} (25.0^\circ \text{C}) + m_{\text{Fe}} c_{\text{Fe}} (600^\circ \text{C})}{m_{\text{acqua}} c_{\text{acqua}} + m_{\text{Fe}} c_{\text{Fe}}}$$
$$= \frac{(20.0 \text{ kg})(4186 \text{ J/kg}^\circ \text{C})(25.0^\circ \text{C}) + (1.50 \text{ kg})(448 \text{ J/kg}^\circ \text{C})(600^\circ \text{C})}{(20.0 \text{ kg})(4186 \text{ J/kg}^\circ \text{C}) + (1.50 \text{ kg})(448 \text{ J/kg}^\circ \text{C})} = 29.6^\circ \text{C}$$

N.B. il calore specifico dell'acqua è 10 volte quello del Fe
e questo riduce le variazioni di temperatura dell'acqua.

- 3.** Un proiettile di piombo di massa **3.00 g** a **30.0 °C**, alla velocità di **240 m/s**, colpisce un blocco di ghiaccio a **0°C**, rimanendovi conficcato.
Quanto ghiaccio fonde ?

N.B. $c_{\text{acqua}} = 4186 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$
 $c_{\text{Pb}} = 128 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$

In un **sistema isolato** tutta l'energia cinetica iniziale e l'energia interna del proiettile si trasformano in energia interna di fusione del ghiaccio, la cui massa si determina dal calore latente di fusione.
Per raggiungere l'equilibrio termico il proiettile deve raffreddarsi a 0°C .

$$|\Delta K_p| + |Q_p| = Q_{\text{ghiaccio}}$$

$$\frac{1}{2} m_p v_p^2 + m_p c_{\text{Pb}} \Delta T = m_{\text{ghiaccio}} L_f$$

$$m_{\text{ghiaccio}} = m_p \frac{\frac{1}{2} v_p^2 + c_{\text{Pb}} \Delta T}{L_f}$$

$$\begin{aligned} m_{\text{ghiaccio}} &= (3.00 \times 10^{-3} \text{ kg}) \frac{\frac{1}{2} (240 \text{ m/s})^2 + (128 \text{ J/kg}^\circ\text{C})(30.0^\circ\text{C})}{3.33 \times 10^5 \text{ J/kg}} \\ &= \frac{86.4 \text{ J} + 11.5 \text{ J}}{3.33 \times 10^5 \text{ J/kg}} = 2.94 \times 10^{-4} \text{ kg} = 0.294 \text{ g} \end{aligned}$$

N.B. la maggior parte dell'energia proviene dall'energia cinetica del proiettile (88%), mentre l'energia interna del proiettile contribuisce solo per 12%.

4. Un adulto **a riposo** di dimensioni medie converte energia chimica del cibo in energia interna al tasso di **120 W**, detto **tasso metabolico basale**.

Per rimanere a temperatura costante, il corpo deve trasferire energia all'esterno con la stessa rapidità. Vi sono vari processi di espulsione di energia dal corpo:

- 1) conduzione termica nell'aria a contatto con la pelle esposta
(senza cappello si forma corrente di convezione verticale che parte dalla testa);
- 2) radiazione elettromagnetica;
- 3) espirazione di aria calda;
- 4) evaporazione nella traspirazione;
- 5) **umidità emessa dall'alito** [caso in questione] !!!

Supponiamo di compiere **22.0** respiri al minuto, ciascuno con un volume **V=0.600 l**.
Assumiamo di inalare aria secca e di emettere aria a **T = 37 °C**, contenente
vapore d'acqua con pressione **p = 3.20 kPa**

[**N.B.** il vapore proviene dalla evaporazione del liquido nel corpo]

Si assuma che il vapore sia un gas perfetto e che il suo calore latente di evaporazione a **37 °C** sia lo stesso del suo calore latente di ebollizione a **100 °C**.

Calcolare il tasso al quale si perde energia emettendo aria umida.

We find the quantity of water vapor in one exhaled breath.

$$PV = nRT: \quad n = \frac{PV}{RT} = \frac{(3.20 \times 10^3 \text{ N/m}^2)(0.600 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{(8.315 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(273 \text{ K} + 37 \text{ K})} = 7.45 \times 10^{-4} \text{ mol}$$

The molar mass of water (H_2O) is

$$M = (2(1.00) + 16.0) \text{ g/mol} = 0.0180 \text{ kg/mol}$$

The mass of water vapor exhaled in one breath is

$$m_{\text{sample}} = nM = 7.45 \times 10^{-4} \text{ mol}(0.0180 \text{ kg/mol}) = 1.34 \times 10^{-5} \text{ kg}$$

The energy it absorbs from your body in evaporating we estimate as

$$Q = mL = 1.34 \times 10^{-5} \text{ kg}(2.26 \times 10^6 \text{ J/kg}) = 30.3 \text{ J}$$

Your rate is of energy loss is

$$\mathcal{P} = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{30.3 \text{ J}}{\text{breath}} \left(\frac{22.0 \text{ breath}}{\text{min}} \right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) = \boxed{11.1 \text{ W}}$$

Note that a dog does not perspire, but maximizes energy loss through the pathway considered here, by panting.



Cane: contrasta aumento di temperatura non con sudore
ma con aumento frequenza respiratoria !!!

- 5.** Una persona mangia a cena una quantità di cibo pari a **2000 Calorie** di energia. Vuole fare un lavoro equivalente in palestra sollevando un oggetto di **50.0 kg**. Quante volte deve sollevare il peso per spendere tutta questa energia ?
Supporre che l'oggetto venga alzato di **h=2 m** ogni volta.

Idea chiave:

Si vuole trasferire 2000 Calorie di energia dal corpo compiendo lavoro sul sistema oggetto-Terra.

$$1 \text{ Cal} = 10^3 \text{ cal} = 1 \text{ kcal} \quad [\text{unità di misura del contenuto di energia del cibo}]$$

Calcolo il lavoro equivalente in Joule:

$$W = (2.00 \cdot 10^6 \text{ cal})(4.186 \text{ J/cal}) = 8.37 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Il lavoro svolto quando si solleva l'oggetto di altezza h è mgh , quindi il lavoro svolto per sollevare il peso n volte è

$$W = n mgh = 8.37 \cdot 10^6 \text{ J}$$

da cui ricavo

$$n = \frac{W}{mgh} = \frac{8.37 \cdot 10^6 \text{ J}}{(50.0 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(2 \text{ m})} = 8.54 \times 10^3 \text{ volte}$$



Se si solleva il peso una volta ogni 5 secondi, il tempo impiegato è :

$$t = n \times 5 \text{ s} = (8.54 \times 10^3) \times 5 \text{ s} = 42.7 \times 10^3 \text{ s} = \frac{42.7 \times 10^3}{3600} \text{ h} \approx 12 \text{ h}$$

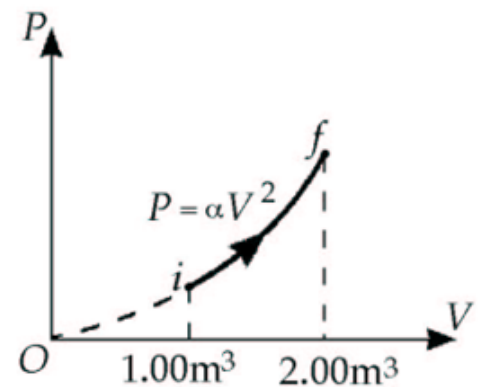
Problemi: lavoro nelle trasformazioni termodinamiche

6. Un gas ideale si espande al doppio del suo volume iniziale $V_i = 1 \text{ m}^3$, in una trasformazione quasi-statica, in cui $P = \alpha V^2$, con $\alpha = 5.00 \text{ atm/m}^6$, come mostrato in figura.
Quanto lavoro compie il gas nell'espansione ?

Idea chiave:

Il lavoro fatto dal gas nell'espansione è pari all'area sottesa dalla curva nel piano pV, valutata fra gli stati iniziale e finale:

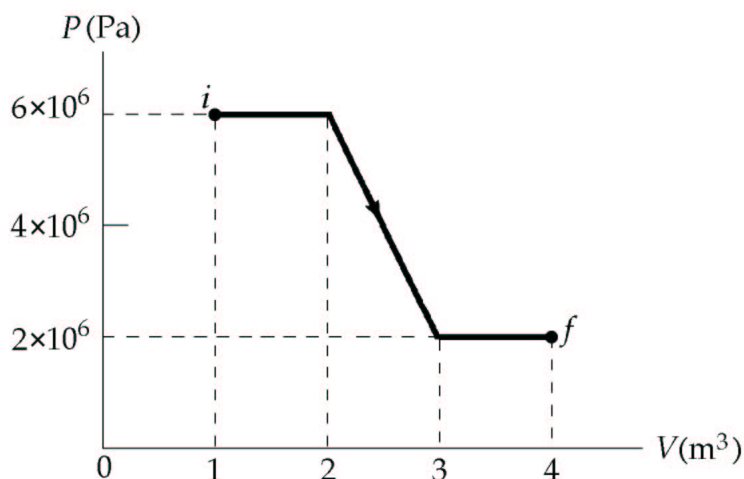
$$\begin{aligned} W_{if} &= \int_{V_i}^{V_f} p dV \\ &= \int_{V_i}^{V_f} \alpha V^2 dV \\ &= \frac{1}{3} \alpha [V^3]_{V_i}^{V_f} = \frac{1}{3} \alpha (V_f^3 - V_i^3) \end{aligned}$$



Sapendo che $V_f = 2 V_i = 2(1.00 \text{ m}^3) = 2.00 \text{ m}^3$

$$\begin{aligned} W_{if} &= \frac{1}{3} \alpha (V_f^3 - V_i^3) \\ &= \frac{1}{3} (5.00 \times 1.013 \times 10^5 \text{ Pa/m}^6) ((2.00 \text{ m}^3)^3 - (1.00 \text{ m}^3)^3) \\ &= 1.18 \times 10^6 \text{ J} = 1.18 \text{ MJ} \end{aligned}$$

7. Determinare il lavoro compiuto dal un fluido nell'espansione da **i** ad **f** mostrata in figura.
Quanto lavoro è compiuto sul fluido se esso è compresso da **f** ad **i** ?



Idea chiave:

Il lavoro fatto dal gas nell'espansione è pari all'area sottesa dalla curva nel piano pV , valutata fra gli stati iniziale e finale.

Calcolo il lavoro come **somma** delle 3 aree sottese da ciascun segmento della curva spezzata.

$$\begin{aligned}
 W_{if} &= \int_{V_i}^{V_f} p dV \\
 &= \int_{V_1}^{V_2} p dV + \int_{V_2}^{V_3} p dV + \int_{V_3}^{V_4} p dV \\
 &= (6.00 \times 10^6 \text{ Pa})(2.00 - 1.00)m^3 + \\
 &\quad \left(\frac{6.00 \times 10^6 + 2.00 \times 10^6}{2} \text{ Pa} \right) (3.00 - 2.00)m^3 + \\
 &\quad (2.00 \times 10^6 \text{ Pa})(4.00 - 3.00)m^3 \\
 &= 12.0 \times 10^6 \text{ J} = 12.0 \text{ MJ}
 \end{aligned}$$

Il lavoro compiuto sul fluido nel percorso **f** $\rightarrow$ **i** è uguale ed opposto:

$$W_{fi} = -\int_{V_i}^{V_f} p dV = -12.0 \text{ MJ}$$

Problemi: I principio Termodinamica

8. Si consideri l'apparecchio di Joule mostrato in figura. Le due masse hanno valore $m_p = 1.50 \text{ kg}$ ciascuna ed il recipiente, termicamente isolato, contiene $m_{\text{water}} = 200 \text{ g}$ di acqua.
Quale è l'aumento di temperatura dell'acqua dopo che le masse sono scese di $h = 3.00 \text{ m}$?

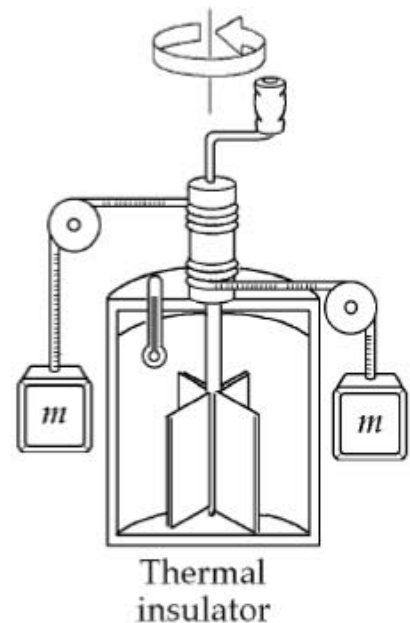
Idea chiave:

Applico il primo principio della termodinamica al sistema termicamente isolato.

$$Q = 0$$

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W_{\text{acqua}} = 0 + W_{\text{palette}}$$

$$W_{\text{palette}} = W_{\text{pesi}} = \Delta U = 2mgh$$



Infatti il lavoro fatto dai pesi è uguale al lavoro fatto dalle palette sull'acqua.
Il lavoro si traduce in un incremento della energia termica dell'acqua.

$$2mgh = \Delta E_{\text{int}} = cm_{\text{acqua}} \Delta T$$

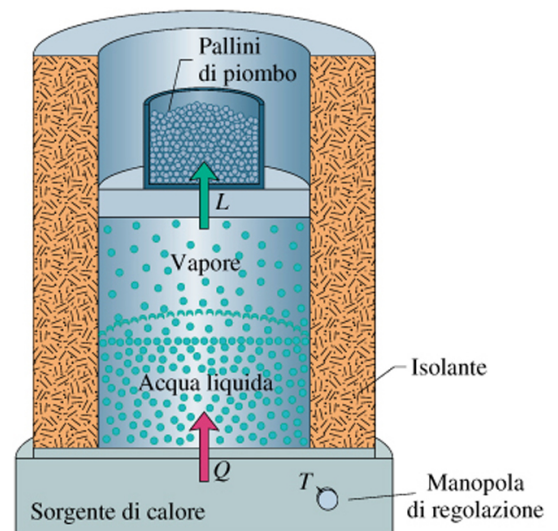
$$\Delta T = \frac{2mgh}{cm_{\text{acqua}}} = \frac{2 \times 1.50 \text{ kg} (9.8 \text{ m/s}^2) (3.00 \text{ m})}{0.200 \text{ kg} (4186 \text{ J/kg}^\circ\text{C})} = \frac{88.2 \text{ J}}{837 \text{ J/}^\circ\text{C}} = 0.105^\circ\text{C}$$

- 9.** 1 kg di acqua liquida alla temperatura di $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ si trasforma in vapore alla stessa temperatura bollendo a pressione atmosferica. Il volume passa da un valore iniziale di $1.00 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3$ dal liquido a 1.671 m^3 di vapore.
- quanto lavoro viene compiuto dal sistema durante questo processo ?
 - Quanto calore viene fornito al sistema durante il processo ?
 - quale è la variazione di energia interna del sistema durante il processo di ebollizione ?

Idea chiave:

il sistema compie lavoro positivo
in quanto il volume aumenta

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad W_{if} &= \int_{V_i}^{V_f} p dV \\
 &= p \int_{V_i}^{V_f} dV \\
 &= p(V_f - V_i) \\
 &= (1.013 \times 10^5 \text{ Pa})(1.671 \text{ m}^3 - 1.00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3) = \\
 &= 1.69 \times 10^5 \text{ J} = 169 \text{ kJ}
 \end{aligned}$$



b) Idea chiave:

La temperatura non cambia, dato che il processo è una transizione di fase:

$$Q = L_v m = (2260 \text{ kJ} / \text{kg})(1.00 \text{ kg}) = 2260 \text{ kJ}$$

c) Idea chiave:

Applico la prima legge della termodinamica:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W = 2260 \text{ kJ} - 169 \text{ kJ} \approx 2090 \text{ kJ} = 2.09 \text{ MJ}$$

Ho trovato una variazione di energia positiva: ciò è dovuto al lavoro interno compiuto per vincere le forze attrattive che le molecole di H_2O esercitano fra loro nel liquido.

10. Due moli di elio gassoso, inizialmente a $T_i = 300 \text{ K}$ e pressione $p = 0.400 \text{ atm}$, subiscono una compressione **ISOTERMA** fino alla pressione di 1.20 atm .

Assumendo che il gas si comporti come un gas perfetto determinare

- a) il volume finale del gas;
- b) il lavoro compiuto sul gas;
- c) l'energia trasferita tramite il calore.

a) Idea chiave:

applico equazione di stato dei gas perfetti

$$pV = nRT$$

ricordandomi che in una compressione isoterma il prodotto pV è costante

$$p_i V_i = p_f V_f$$

$$V_i = \frac{nRT}{p_i} = \frac{(2.00 \text{ mol})(8.31 \text{ J} / \text{mol} \cdot \text{K})(300 \text{ K})}{(0.400 \times 1.013 \times 10^5 \text{ Pa})} = 0.123 \text{ m}^3$$

quindi:

$$V_f = \frac{p_i}{p_f} V_i = \frac{0.400 \text{ atm}}{1.20 \text{ atm}} 0.123 \text{ m}^3 = 0.0410 \text{ m}^3$$

b) Il lavoro compiuto sul gas è:

$$W_{\text{sul gas}} = -W_{\text{gas}}$$

$$= -\int_{V_i}^{V_f} p dV = -\int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV$$

$$= -nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V} dV = -nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

$$= -(2.00 \text{ moli})(8.31 \text{ J} / \text{mole} \cdot \text{K})(300 \text{ K}) \ln \frac{0.0410}{0.123} = 5.48 \text{ kJ}$$

c) Dal I principio della termodinamica:

$$\Delta E_{\text{int}} = 0 = Q - W_{\text{gas}}$$

$$Q = W_{\text{gas}} = -5.48 \text{ J}$$

- 11.** Una mole di gas idrogeno è riscaldata **PRESSIONE COSTANTE** da 300 K a 420 K. Calcolare:
- a) energia trasferita al gas tramite il calore;
 - b) incremento di energia interna;
 - c) lavoro svolto sul gas.

Idea chiave:

Poiché la trasformazione è a pressione costante:

$$Q = c_p n \Delta T$$

- a)** Calcolo l'aumento di temperatura:

$$\Delta T = (420 - 300)K = 120K$$

$$Q = c_p n \Delta T = (28.8J / mol \cdot K)(1.00moli)(120K) = 3.46 kJ$$

- b)** In una qualunque trasformazione vale la relazione:

$$\Delta E_{\text{int}} = c_v n \Delta T$$

quindi

$$\Delta E_{\text{int}} = (20.4J / mole \cdot K)(1.00moli)(120K) = 2.45 kJ$$

- c)** Dal I principio della termodinamica:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W_{\text{gas}}$$

quindi

$$W_{\text{sul gas}} = -W_{\text{gas}} = \Delta E_{\text{int}} - Q = 2.45Kj - 3.26kJ = -1.01kJ$$

12. Un campione di **2.00 moli** di gas perfetto con $\gamma = 1.40$ si espande lentamente e **ADIABATICAMENTE** da pressione $p_i = 5.00 \text{ atm}$ e volume $V_i = 12.0 \text{ l}$ a volume finale $V_f = 30.0 \text{ l}$.

- a) Quale è la pressione finale del gas ?
- b) Quali sono le temperature finali ed iniziali ?
- c) Trovare Q , E e ΔE_{int}

[N.B. 1 litro = 1 l = $10^3 \text{ cm}^3 = 10^3 (10^{-2})^3 \text{ m}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$]

Idea chiave:

In una trasformazione adiabatica

$$p_i V_i^\gamma = p_f V_f^\gamma$$

a) Determino la pressione finale del gas:

$$p_f = p_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^\gamma = (5.00 \text{ atm}) \left(\frac{12.0 \text{ l}}{30.0 \text{ l}} \right)^{1.40} = 1.39 \text{ atm}$$

b) Determino le temperature utilizzando la legge dei gas perfetti:

$$T_i = \frac{p_i V_i}{nR} = \frac{(5.00 \times 1.013 \times 10^5 \text{ Pa})(12.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{2.00(8.31 \text{ J / mole} \cdot \text{K})} = 365 \text{ K}$$

$$T_f = \frac{p_f V_f}{nR} = \frac{(1.39 \times 1.013 \times 10^5 \text{ Pa})(30.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{2.00(8.31 \text{ J / mole} \cdot \text{K})} = 253 \text{ K}$$

c) In una qualsiasi trasformazione termodinamica:

$$\Delta E_{\text{int}} = c_V n \Delta T$$

in questo caso:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{c_V + R}{c_V} = 1 + \frac{R}{c_V}$$

$$c_V = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{R}{0.40} = 2.5R = \frac{5}{2} R \quad \text{gas biatomico}$$

$$\Delta E_{\text{int}} = c_V n \Delta T = \frac{5}{2} (8.315 \text{ J / mole} \cdot \text{K})(2.00 \text{ moli})(253 - 365) \text{ K} = -4660 \text{ J}$$

$$Q = 0 \quad \text{adiabatica}$$

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W_{\text{gas}} \Rightarrow W_{\text{sul gas}} = -W_{\text{gas}} = \Delta E_{\text{int}} = -4660 \text{ J}$$

è il **gas** che **compie lavoro**
infatti $W_{\text{gas}} > 0$

13. Un campione di gas perfetto monoatomico occupa **5.00 l** a pressione atmosferica e a **300 K** (punto **A** in figura). Esso è riscaldato a volume costante fino a **3.00 atm** (punto **B**). Poi si espande isotermicamente fino a **1.00 atm** (punto **C**) e infine è compresso isobaricamente fino allo stato iniziale.

- Quale è il numero di moli del campione ?
- Trovare la temperatura nei punti B e C ed il volume in C
- Assumendo che il calore specifico non dipenda da T ($E_{\text{int}} = \frac{3}{2} nRT$), trovare l'energia interna nei punti A, B, C.
- Trovare Q, W e ΔE_{int} per le trasformazioni A→B, B→C, C→A;
- trovare Q, W e ΔE_{int} per l'intero ciclo.

[N.B. 1 litro = 1 l = $10^3 \text{ cm}^3 = 10^3 (10^{-2})^3 \text{ m}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$]

a) Calcolo il numero di moli dalla equazione di stato dei gas perfetti:

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{(1.013 \times 10^5 \text{ Pa})(5.00 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{(8.315 \text{ J / mole} \cdot \text{K})(300 \text{ K})} = 0.203 \text{ moli}$$

b) Trovo la temperatura:

$$\left. \begin{array}{l} p_A V_A = nRT_A \\ p_B V_B = nRT_B \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{p_A}{p_B} = \frac{T_A}{T_B} \quad \text{A} \rightarrow \text{B} \text{ isocora}$$

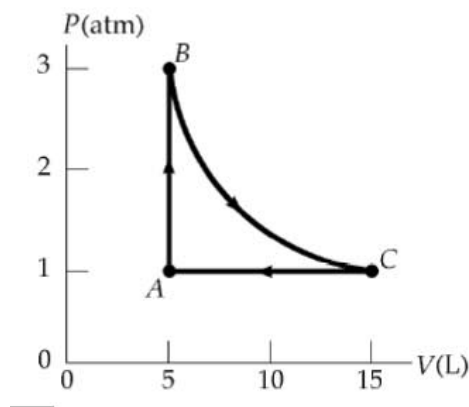
$$T_B = \frac{p_B}{p_A} T_A = \frac{3 \text{ atm}}{1 \text{ atm}} 300 \text{ K} = 900 \text{ K}$$

$$T_C = T_B = 900 \text{ K} \quad \text{B} \rightarrow \text{C} \text{ isoterma}$$

Trovo il volume in C:

$$\left. \begin{array}{l} p_A V_A = nRT_A \\ p_C V_C = nRT_C \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{V_A}{V_C} = \frac{T_A}{T_C}$$

$$V_C = \frac{T_C}{T_A} V_A = \frac{900 \text{ K}}{300 \text{ K}} 5.00 \text{ l} = 15.0 \text{ l}$$



c) Calcolo le energie interne:

$$E_{\text{int},A} = \frac{3}{2} nRT_A = \frac{3}{2} (0.203 \text{ moli})(8.315 \text{ J / mole} \cdot \text{K})(300 \text{ K}) = 760 \text{ J}$$

$$E_{\text{int},B} = E_{\text{int},C} = \frac{3}{2} nRT_B = \frac{3}{2} (0.203 \text{ moli})(8.315 \text{ J / mole} \cdot \text{K})(900 \text{ K}) = 2.28 \text{ kJ}$$

d) Trovo Q , W e ΔE_{int} nei vari tratti del ciclo:

A→B [isocora]:

$$W=0$$

$$\Delta E_{\text{int}} = E_{\text{int},B} - E_{\text{int},A} = (2.28 - 0.760) \text{ kJ} = 1.52 \text{ kJ}$$

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W \Rightarrow Q = \Delta E_{\text{int}} = 1.52 \text{ kJ}$$

B→C [isoterma]:

$$\Delta E_{\text{int}} = 0$$

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_B}^{V_C} p dV = \int_{V_B}^{V_C} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_B}^{V_C} \frac{1}{V} dV = nRT \ln \frac{V_C}{V_B} = \\ &= (0.239 \text{ mol})(8.315 \text{ J / mole} \cdot \text{K})(300 \text{ K}) \ln \frac{15.0 \text{ l}}{5.00 \text{ l}} = 1.67 \text{ kJ} \end{aligned}$$

$$Q = \Delta E_{\text{int}} + W = 0 + 1.67 \text{ kJ}$$

C→A [isobara]:

$$\Delta E_{\text{int}} = E_{\text{int},A} - E_{\text{int},C} = (0.760 - 2.28) \text{ kJ} = -1.52 \text{ kJ}$$

$$W = \int_{V_C}^{V_A} p dV = p \int_{V_C}^{V_A} dV = p(V_A - V_C) = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}(5.00 - 15.00)(10^{-3} \text{ m}^3) = -1.013 \text{ kJ}$$

$$Q = \Delta E_{\text{int}} + W = -1.52 \text{ kJ} - 1.01 \text{ kJ} = -2.53 \text{ kJ}$$

e) Trovo Q , W e ΔE_{int} per l'intero ciclo, sommando i contributi relativi ai vari tratti:

$$\Delta E_{\text{int}} = 0 = \Delta E_{\text{int},AB} + \Delta E_{\text{int},BC} + \Delta E_{\text{int},CA} = 1.52 \text{ kJ} + 0 - 1.52 \text{ kJ}$$

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = 0 + 1.67 \text{ kJ} - 1.013 \text{ kJ} = 0.656 \text{ kJ}$$

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 1.52 \text{ kJ} + 1.67 \text{ kJ} - 2.53 \text{ kJ} = 0.656 \text{ kJ}$$

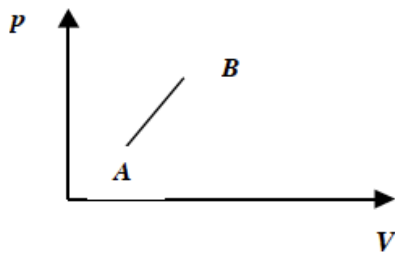
ESEMPIO Tema d'esame

D. Un gas perfetto monoatomico subisce la trasformazione descritta dall'equazione $p = k V$, p è la pressione, V il volume e k una costante positiva. Lo stato iniziale è il punto A in cui $p_A = 4 \text{ atm}$, $V_A = 8.21 \text{ litri}$ e $T_A = 200 \text{ K}$. Lo stato finale è il punto B dove $V_B = 2 V_A$.

1. Disegnare in un diagramma (p, V) la trasformazione AB e calcolare la corrispondente variazione di energia interna del gas.

2. Calcolare il lavoro compiuto dal gas durante la trasformazione AB.

$$R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.0821 \text{ atm/Kmole} \quad \epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N m}^2$$



Nella trasformazione AB $p = k V$, pertanto se $V_B = 2 V_A$, $p_B = k V_B = k 2 V_A = 2 p_A$
Inoltre $T_A = p_A V_A / nR$, $T_B = p_B V_B / nR = 4 p_A V_A / nR = 4 T_A = 800 \text{ K}$

La variazione di energia interna $\Delta E = n c_V \Delta T = n (3/2) R (4 T_A - T_A) = n (9/2) R T_A$
 $= (9/2) p_A V_A = 4.5 \cdot 4 \cdot 8.21 = 147.8 \text{ litri atm} = 147.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 1.01 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 14926 \text{ J}$

2. Il lavoro compiuto dal gas è pari all'area delimitata dalla trasformazione tra il punto A e il punto B, quindi:

$$L = (V_B - V_A) (p_B + p_A) / 2 = 3 V_A p_A / 2 = 1.5 p_A V_A = 49.26 \text{ litri atm} = 4975.3 \text{ J}.$$

ESEMPIO Tema d'esame

3) Una mole di un gas ideale monoatomico compie le seguenti trasformazioni:

A → B: compressione isoterma, dal volume $V_A = 3 \text{ dm}^3$ e temperatura $T_A = 192.5 \text{ K}$, al volume $V_B = 2 \text{ dm}^3$;

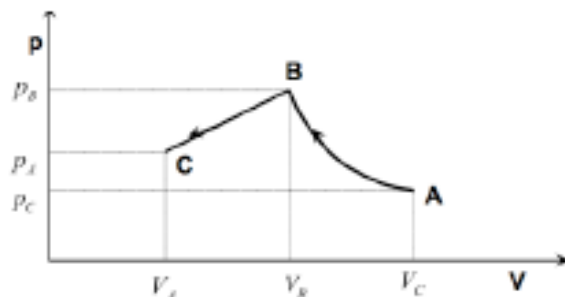
B → C: compressione in cui la pressione decresce linearmente fino a $p_C = 6 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ e $V_C = 1 \text{ dm}^3$.

a) Si disegnino nel piano (p,V) le trasformazioni termodinamiche, si calcolino per ogni stato le coordinate termodinamiche (p,V,T) ed il lavoro totale compiuto dal gas da A a C;

b) Si calcolino la variazione di energia interna e il calore scambiato dal gas da A a C, specificando se il calore sia assorbito o ceduto.

(N.B. $R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.082 \text{ l atm /K mol}$)

a) Il grafico delle trasformazioni AB-BC nel diagramma (p,V) è il seguente :



Le coordinate termodinamiche (p,V,T) dei vari stati si ottengono dai dati iniziali e dalla equazione di stato dei gas perfetti ($pV = nRT$):

$$\begin{aligned} p_A &= 5.3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \\ V_A &= 3 \text{ dm}^3 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \\ T_A &= 192.5 \text{ K} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_B &= 8 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \\ V_B &= 2 \text{ dm}^3 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \\ T_B &= 192.5 \text{ K} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_C &= 6 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \\ V_C &= 1 \text{ dm}^3 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \\ T_C &= 72.2 \text{ K} \end{aligned}$$

Il Lavoro totale è $L = L_{AB} + L_{BC}$, ove

$$\begin{aligned} L_{AB} &= nR T_A \ln(V_B / V_A) = -648.7 \text{ J (la trasformazione AB è isoterma)} \\ L_{BC} &= \frac{1}{2} (p_B + p_C) (V_C - V_B) = -700 \text{ J} \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$L = -1348.6 \text{ J}$$

b) La variazione di energia interna ΔE_{AC} è:

$$\Delta E_{AC} = n c_V (T_C - T_A) = \frac{3R}{2} (T_C - T_A) = -1499.5 \text{ J}$$

Dal primo principio della termodinamica si ha:

$$\Delta E = Q - L \text{ e pertanto } Q = L + \Delta E$$

$$Q = -2848.7 \text{ J}$$

Q è negativo, pertanto il calore è ceduto dal gas.

ESEMPIO Tema d'esame

Due moli di gas perfetto monoatomico, inizialmente nello stato A a pressione $p_A = 4 \text{ atm}$ e volume $V_A = 1 \text{ l}$, compiono una espansione isoterma fino allo stato B a pressione $p_B = 1 \text{ atm}$.

Il gas viene poi compresso adiabaticamente fino allo stato C a pressione $p_C = p_A = 4 \text{ atm}$.

Dopo avere disegnato nel piano pV la trasformazione subita dal gas, si calcolino:

- i volumi V_B e V_C occupati dal gas negli stati B e C;
 - la variazione totale di entropia ΔS subita dal gas durante l'intera trasformazione.
- (Nota: $R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.0821 \text{ l atm /Kmole}$)

- a) In una trasformazione isoterma $pV = \text{costante}$, quindi

$$p_A V_A = p_B V_B \text{ da cui si ottiene:}$$

$$V_B = p_A V_A / p_B = 4 \times 1 \text{ l} = 4 \text{ l}$$

Nella trasformazione adiabatica $pV^\gamma = \text{costante}$, quindi

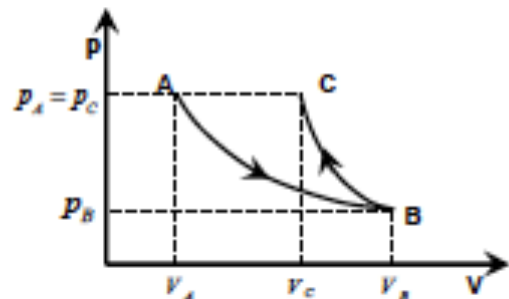
$$p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma \text{ da cui si ottiene}$$

$$\left(\frac{V_C}{V_B}\right)^\gamma = \frac{p_B}{p_C}$$

Per un gas monoatomico $\gamma = 5/3$, quindi

$$\left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\frac{5}{3}} = \frac{p_B}{p_C} \Rightarrow \frac{V_C}{V_B} = \left(\frac{p_B}{p_C}\right)^{\frac{3}{5}}$$

$$V_C = V_B \left(\frac{p_B}{p_C}\right)^{\frac{3}{5}} = 4 \text{ l} \times \left(\frac{1 \text{ atm}}{4 \text{ atm}}\right)^{\frac{3}{5}} = 4 \text{ l} \times 0.44 = 1.71$$



- b) La variazione totale di entropia del sistema è pari alla somma delle variazioni entropiche lungo la trasformazione isoterma e lungo la trasformazione adiabatica:

$$\Delta S = \Delta S_{\text{isoterma}} + \Delta S_{\text{adiabatica}}$$

Dato che $\Delta S_{\text{adiabatica}} = 0$ si ha:

$$\Delta S = \Delta S_{\text{isoterma}} = \frac{Q}{T}$$

In una trasformazione isoterma $Q = W = nRT \ln(V_f/V_i)$, quindi:

$$\Delta S = \Delta S_{\text{isoterma}} = \frac{Q}{T}$$

$$= \frac{W}{T} = \frac{nRT}{T} \ln \frac{V_B}{V_A} = nR \ln \frac{V_B}{V_A} = 2 \times 8.31 \text{ J/(mole} \cdot \text{K)} \ln \frac{4 \text{ l}}{1 \text{ l}} = 23 \text{ J/K}$$

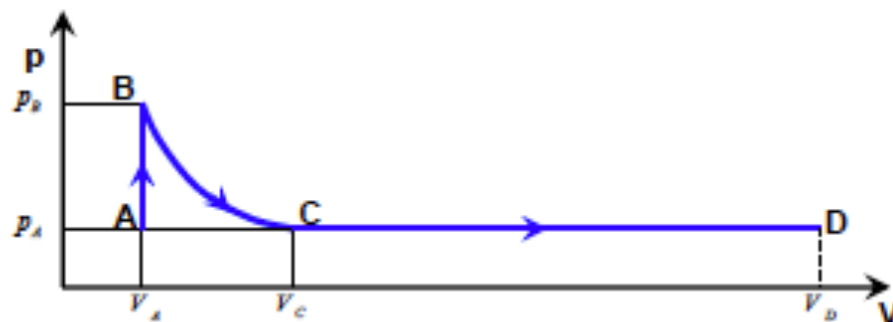
ESEMPIO Tema d'esame

Un gas perfetto monoatomico ($n=2$ moli) passa dallo stato iniziale A a quello finale D compiendo le trasformazioni reversibili AB (isocora con aumento di pressione), BC (isoterma) e CD (isobara).

Inoltre in A è $p_A = 6 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$, $V_A = 1 \text{ m}^3$, $p_C = p_A = p_D$, $V_C = 3 V_A$ e $V_D = 4 V_C$.

- Si rappresenti nel diagramma (p,V) la trasformazione ABCD e si calcoli il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione ABCD;
 - Si calcoli la variazione di energia interna del gas tra lo stato iniziale A e quello finale D.
- (Nota: $R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.082 \text{ l atm /Kmole}$)

a) Nel piano pV la trasformazione ha il seguente andamento:



Il lavoro fatto dal gas è pari all'area sottesa sotto la curva della trasformazione:

$$L_{tot} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD}$$

$$L_{AB} = 0$$

$$L_{BC} = \int_B^C p dV = \int_B^C \frac{nRT_C}{V} dV = nRT_C \int_B^C \frac{dV}{V} = nRT_C \ln \frac{V_C}{V_B}$$

Ricavo la temperatura T_C della curva isoterma applicando l'equazione dei gas perfetti al punto C,

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR}, \text{ da cui segue che il lavoro relativo alla trasformazione BC è pari a :}$$

$$\begin{aligned} L_{BC} &= nRT_C \ln \frac{V_C}{V_B} = nR \frac{p_C V_C}{nR} \ln \frac{V_C}{V_B} = p_C V_C \ln \frac{3V_A}{V_A} = 3p_A V_A \ln 3 = \\ &= 3 \times (6 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}) \times (1 \times \text{m}^3) \ln 3 = 19.77 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

Il lavoro relativo alla trasformazione CD è invece pari a:

$$\begin{aligned} L_{CD} &= p_C (V_D - V_C) = p_A (4V_C - V_C) = \\ &= 3p_A V_C = 3p_A \times 3V_A = 9p_A V_A = 9 \times (6 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}) \times (1 \times \text{m}^3) = 54 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

Il lavoro totale è quindi:

$$L_{tot} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} = L_{BC} + L_{CD} = 19.77 \times 10^3 \text{ J} + 54 \times 10^3 \text{ J} = 73.77 \times 10^3 \text{ J}$$

- La variazione di energia interna del sistema fra i punti A e D dipende solo dalla temperatura del sistema in A e D, secondo la relazione:

$$\begin{aligned} \Delta E &= nc_v \Delta T = nc_v (T_D - T_A) = n \frac{3}{2} R \left(\frac{p_D V_D}{nR} - \frac{p_A V_A}{nR} \right) = \\ &= \frac{3}{2} (p_D V_D - p_A V_A) = \frac{3}{2} (p_A 4 \times 3V_A - p_A V_A) = \frac{3}{2} \times 11 p_A V_A = \\ &= \frac{33}{2} (6 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}) \times (1 \times \text{m}^3) = 99 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

ESEMPIO Tema d'esame

Due moli di gas perfetto monoatomico passano dallo stato iniziale A allo stato finale C attraverso una espansione isobara AB, seguita da una espansione adiabatrica BC.

La temperatura in A e C è la medesima e vale $T_A = T_C = 18^\circ\text{C}$, inoltre $p_A = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$ e $V_B = 2 V_A$. Calcolare:

- Il valore assunto dalle variabili termodinamiche (p,V,T) nei tre punti e disegnare il grafico della trasformazione nel piano p-V;
 - La quantità di calore scambiata nelle trasformazioni da A a C.
- [Nota : $R = 8.31 \text{ J/moleK}$]

Punto A:

$$T_A = 18^\circ\text{C} = (18+273) \text{ K} = 291 \text{ K}$$

$$p_A = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_A = nRT_A/p_A = 0.024 \text{ m}^3$$

Punto B:

$$p_B = p_A = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_B = 2 V_A = 0.048 \text{ m}^3$$

$$T_B = p_B V_B / nR = p_A 2V_A / nR = 2 T_A = 582 \text{ K}$$

Punto C:

$$T_C = T_A = 291 \text{ K}$$

$$p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma$$

$$\frac{nRT_B}{V_B} V_B^\gamma = \frac{nRT_C}{V_C} V_C^\gamma$$

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

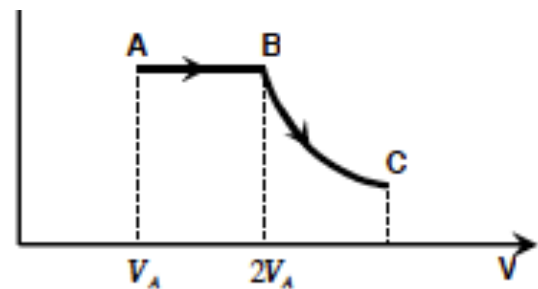
$$V_C^{\gamma-1} = \frac{T_B}{T_C} V_B^{\gamma-1} = \frac{T_B}{T_A} V_B^{\gamma-1} = \frac{p_B V_B}{nR} \frac{nR}{p_A V_A} V_B^{\gamma-1} = 2 V_B^{\gamma-1}$$

Dato che $\gamma = c_p/c_v = 5/3$, si ottiene $\gamma - 1 = 2/3$ da cui segue:

$$V_C^{2/3} = 2 V_B^{2/3}$$

$$V_C = 2^{3/2} V_B = 0.14 \text{ m}^3$$

$$p_C = \frac{nRT_C}{V_C} = 0.35 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$



- Essendo la trasformazione BC adiabatrica ($Q=0$), il calore scambiato lungo la trasformazione AC è pari al calore scambiato lungo la trasformazione AB, ossia:

$$Q = n c_p (T_B - T_A) = 2 \frac{5}{2} R (T_B - T_A) = 12091 \text{ J}$$

ESEMPIO Tema d'esame

- Due moli di un gas perfetto monoatomico compiono, a partire dallo stato iniziale A di coordinate termodinamiche ($p_A = 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, $V_A = 10 \text{ dm}^3$), il ciclo reversibile ABCA, in cui AB è una trasformazione in cui la pressione decresce linearmente all'aumentare del volume, con $p_B = (1/2) p_A$ e $V_B = 4V_A$ ed inoltre BC è una compressione isobara e CA è una compressione isoterma.
- a) Si disegni l'intero ciclo in un diagramma (V, p). Si calcolino le coordinate termodinamiche di C e la variazione di energia interna relativa alla trasformazione AB.
- b) Si calcoli la quantità di calore scambiata durante l'intero ciclo.

[Nota: $R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.0821 \text{ atm/Kmole}$]

- a) Le variabili termodinamiche (p,V,T) per lo stato C possono essere ricavate applicando l'equazione di stato dei gas perfetti

$$pV = nRT$$

sapendo che:

$$p_A = 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2, V_A = 10^{-2} \text{ m}^3;$$

$$p_B = 10^5 \text{ N/m}^2, V_B = 4 \times 10^{-2} \text{ m}^3;$$

$$p_C = p_B = 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ (essendo BC isobara)}$$

$$p_C V_C = p_A V_A \text{ (essendo AC isoterma)}, \text{ da cui}$$

$$V_C = p_A V_A / p_C = 2 \times 10^{-2} \text{ m}^3$$

Inoltre:

$$T_A = T_C = p_A V_A / nR = (2 \times 10^5 \text{ N/m}^2) (10^{-2} \text{ m}^3) / (2 \text{ moli} \times 8.31 \text{ J/K mole}) = 120.3 \text{ K}$$

La variazione di energia interna ΔU nella trasformazione AB è :

$$\Delta U = n c_V \Delta T = n c_V (T_B - T_A) = n (3R/2) (p_B V_B - p_A V_A) / nR = 3000 \text{ J}$$

- b) La quantità di calore scambiata nell'intero ciclo Q_{ciclo} è:

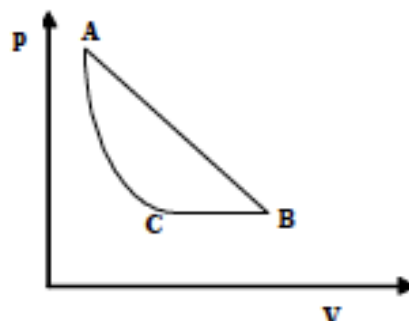
$$Q_{\text{ciclo}} = L_{\text{ciclo}} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA}$$

$$L_{AB} = (p_A + p_B) (V_B - V_A) / 2 = 4500 \text{ J}$$

$$L_{BC} = p_B (V_C - V_B) = -2000 \text{ J}$$

$$L_{CA} = \int p dV = nRT_A \ln (V_A / V_C) = -1386 \text{ J}$$

$$Q_{\text{ciclo}} = 1114 \text{ J}$$



ESEMPIO Tema d'esame

3) Due moli di un gas perfetto biatomico compiono il ciclo **ABCA** in cui: AB è una trasformazione in cui la pressione aumenta linearmente all'aumentare del volume ($p_A = 2 \text{ atm}$, $V_A = 3 \text{ l}$, $V_B = 2 V_A$ e $p_B = 3p_A$); BC è isocora e CA è isobara. Calcolare:

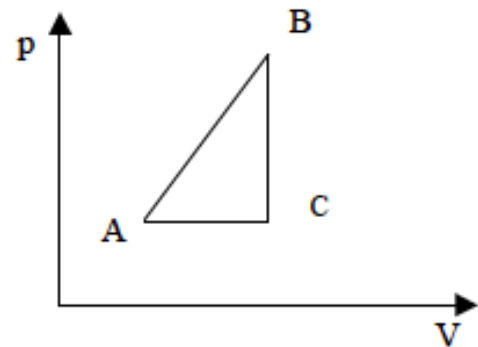
- a) la quantità di calore scambiata nell'intero ciclo;
- b) la variazione di energia interna nella trasformazione **AB**

[Nota: $R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.082 \text{ l atm /Kmole}$]

Nell'intero ciclo la variazione di energia interna è nulla. Quindi il calore scambiato è pari al lavoro svolto dal gas:

$$\Delta Q = \Delta L$$

Il lavoro è pari all'area sottesa dalla curva che descrive la trasformazione nel piano pV. In questo caso è pari all'area del triangolo ABC:



$$\Delta L = \text{Area}(\text{ABC}) = \frac{1}{2}(V_B - V_A) \cdot (p_B - p_A) = \frac{1}{2}(2 \cdot V_A - V_A) \cdot (3 \cdot p_A - p_A) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot V_A \cdot 2 \cdot p_A = \frac{1}{2} 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 600 \text{ J}$$

Ricordando che l'energia interna per un gas biatomico è data da

$$U = \frac{5}{2} n \cdot R \cdot T$$

si ottiene per la variazione di energia interna

$$\Delta U = \frac{5}{2} (n \cdot R \cdot T_B - n \cdot R \cdot T_A) = \frac{5}{2} (p_B \cdot V_B - p_A \cdot V_A) =$$

$$\frac{5}{2} \left(6 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 - 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \right) = 7500 \text{ J}$$

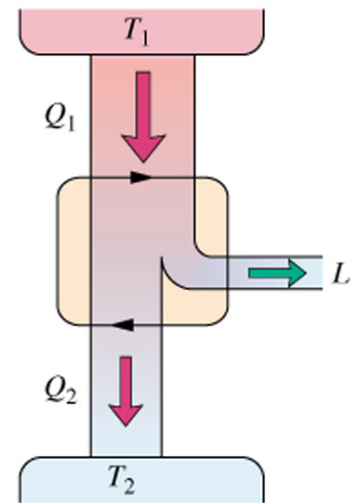
Problemi: **II principio Termodinamica**

15. Una macchina di Carnot opera tra due sorgenti di temperatura $T_1 = 850 \text{ K}$ e $T_2 = 300 \text{ K}$. Ad ogni ciclo, della durata di 0.25 s , eroga 1200 J di lavoro.

- a) quale è il rendimento del motore ?
- b) quale è la potenza media del motore ?
- c) quanto vale il calore Q_1 fornito dalla sorgente calda durante il ciclo ?
- d) quanto vale il calore Q_2 ceduto alla sorgente fredda ?

a) In un ciclo di Carnot il rendimento dipende solo dalle temperature:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{L}{|Q_1|} = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} \\ &= 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300 \text{ K}}{850 \text{ K}} = 0.647 \approx 65\%\end{aligned}$$



b) La potenza è data da L/t

$$P = \frac{L}{t} = \frac{1200 \text{ J}}{0.25 \text{ s}} = 4800 \text{ W} = 4.8 \text{ kW}$$

c) Il rendimento è definito come il rapporto fra il lavoro fatto ed il calore assorbito:

$$\eta = \frac{L}{|Q_1|} \Rightarrow |Q_1| = \frac{L}{\eta} = \frac{1200 \text{ J}}{0.647} = 1855 \text{ J}$$

d) Il lavoro compiuto equivale alla differenza di calore scambiato:

$$\begin{aligned}L &= |Q_1| - |Q_2| \\ |Q_2| &= |Q_1| - L = 1855 \text{ J} - 1200 \text{ J} = 655 \text{ J}\end{aligned}$$

- 16.** Quanto lavoro deve compiere un frigorifero ideale di Carnot per trasformare **0.500 kg** di acqua potabile a **10.0 °C** in ghiaccio a **-20 °C** ?
Si assuma che lo scomparto del frigorifero sia mantenuto a **-20.0 °C** e che il frigorifero ceda energia a una stanza a **20.0 °C**.

N.B. $c_{\text{acqua}} = 4186 \text{ J/kg } ^\circ\text{C}$
 $L_F = 333 \text{ kJ/kg}$
 $c_{\text{ghiaccio}} = 2090 \text{ J/kg } ^\circ\text{C}$

calore specifico acqua
 calore latente di fusione
 calore specifico ghiaccio

Per trasformare l'acqua in ghiaccio devo seguire 3 stadi:

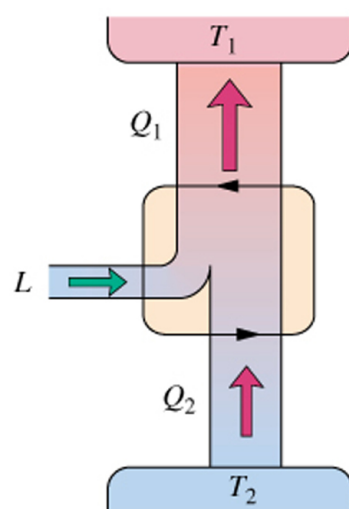
- 1) Raffreddamento acqua a 0°C ;
- 2) Trasformazione in ghiaccio a 0°C ,
- 3) Raffreddamento del ghiaccio a -20°C .

calore che deve essere prelevato da sorgente fredda per trasformare acqua in ghiaccio:

$$\begin{aligned} Q_f &= Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ &= mc_{\text{acqua}}\Delta T + mL_F + mc_{\text{ghiaccio}}\Delta T \\ &= (0.500\text{kg})(4186\text{ J/kg } ^\circ\text{C})(0^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C}) \\ &\quad - (0.500\text{kg})(333\text{ kJ/kg}) \\ &\quad + (0.500\text{kg})(2090\text{ J/kg } ^\circ\text{C})(-20^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}) \\ &= -2.08 \times 10^5 \text{ J} \end{aligned}$$

$$COP = \frac{\text{energia estratta}}{\text{lavoro svolto}} = \frac{|Q_f|}{W} = \frac{|Q_f|}{|Q_c| - |Q_f|} = \frac{|T_f|}{|T_c| - |T_f|}$$

$$W = Q_f \frac{|T_c| - |T_f|}{|T_f|} = \frac{(2.08 \times 10^5 \text{ J})(20.0^\circ\text{C} - (-20.0^\circ\text{C}))}{(-20.0 + 273)\text{K}} = 32.9\text{ kJ}$$



17. Nel 1827 Robert Sterling inventò il “motore a Sterling”, che ha trovato fin da allora numerose applicazioni.

Il carburante viene bruciato esternamente per riscaldare uno dei due cilindri della macchina. Una quantità fissa di gas inerte si muove ciclicamente fra i cilindri, espandendosi in quello caldo e comprimendosi in quello freddo, secondo il ciclo termodinamico rappresentato in figura.

Date n moli di gas perfetto monoatomico che compie un ciclo reversibile fra le isoterme a temperatura $3T_i$ e T_i , e due trasformazioni a volume costante, determinare

- l'energia trasferita tramite il calore al gas, in funzione di n , R e T_i ;
- il rendimento della macchina.

a) In un processo isotermico

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W = 0$$

$$Q = W = \int_{V_i}^{V_f} p dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

quindi:

$$Q_1 = nR(3T_i) \ln \frac{2V_i}{V_i} = 3nRT_i \ln 2$$

$$Q_3 = nRT_i \ln \frac{V_i}{2V_i} = nRT_i \ln \frac{1}{2}$$

In un processo a volume costante:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W = Q = \frac{3}{2} nR \Delta T$$

quindi:

$$Q_2 = \Delta E_{\text{int},2} = \frac{3}{2} nR \Delta T_2 = \frac{3}{2} nR(T_i - 3T_i)$$

$$Q_4 = \Delta E_{\text{int},4} = \frac{3}{2} nR \Delta T_4 = \frac{3}{2} nR(3T_i - T_i)$$

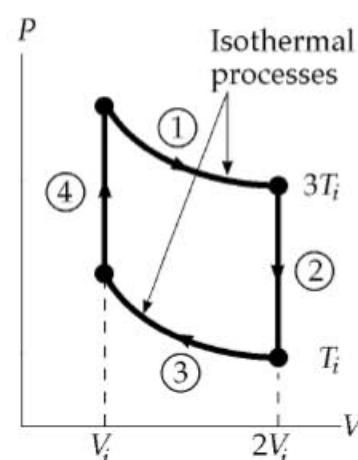
Il calore complessivo trasferito al gas è quindi:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

$$= 3nRT_i \ln 2 + nRT_i \ln \frac{1}{2} - 3nRT_i + 3nRT_i = 2nRT_i \ln 2$$

b) Il rendimento della macchina è $\eta = L / |Q_c|$ ove $L = Q$ (trasformazione ciclica) e Q_c è la somma dei contributi positivi a Q :

$$\begin{aligned} \eta &= Q / Q_c = Q / (Q_1 + Q_4) = (2nRT_i \ln 2) / (3nRT_i \ln 2 + 3nRT_i) = \\ &= 2 \ln 2 / 3(\ln 2 + 1) = 0.273 = 27.3\% \end{aligned}$$



ESEMPIO Tema d'esame

Due moli di gas perfetto biatomico, inizialmente a pressione $p_A = 10^5 \text{ N/m}^2$ e volume $V_A = 5 \text{ l}$, compiono un ciclo termodinamico così composto:

AB: compressione isoterma fino a dimezzare il volume iniziale;

BC: espansione isobara fino al volume iniziale;

CA: decompressione isocora fino alla pressione iniziale.

a) Si calcoli il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione BC, specificandone il segno.

b) Si calcoli il rendimento per questo ciclo.

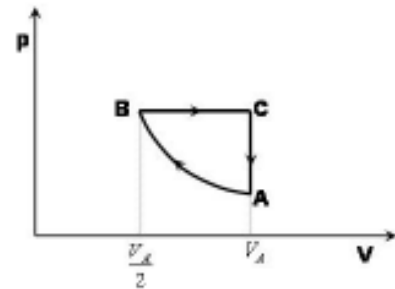
(Nota: $R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.082 \text{ l atm /Kmole}$)

a) In una trasformazione isoterma $pV = \text{costante}$, quindi

$$p_A V_A = p_B V_B = p_B \frac{V_A}{2} \quad \text{da cui si ottiene:}$$

$$p_B = 2p_A = 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$V_B = V_A/2 = 2.5 \text{ litri} = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$



Il lavoro fatto dal gas in una trasformazione termodinamica è pari all'area sottesa dalla curva nel piano pV. Nella trasformazione BC, a pressione costante, il lavoro è dato da:

$$L_{BC} = \int_B^C p dV = p_B (V_C - V_B) = 2p_A (V_A - \frac{V_A}{2}) = p_A V_A = 10^5 \text{ N/m}^2 \times 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 500 \text{ J}$$

Il lavoro fatto dal gas è positivo, trattandosi di una espansione.

b) Il rendimento in un ciclo termodinamico è pari al rapporto fra il lavoro svolto ed il calore assorbito. Nel ciclo in questione, il lavoro totale è dato

$L = L_{AB} + L_{BC}$ poiché lungo CA (isocora) il lavoro è nullo.

Calcoliamo il lavoro lungo AB (isoterma), utilizzando la legge dei gas perfetti $pV = nRT_A$:

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_A^B p dV = \int_A^B nRT_A \frac{dV}{V} = nRT_A \int_A^B \frac{dV}{V} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = nRT_A \ln \frac{V_A/2}{V_A} \\ &= nRT_A \ln \frac{1}{2} = -nRT_A \ln 2 = -p_A V_A \ln 2 = -346.6 \text{ J} \end{aligned}$$

Il lavoro totale è quindi $L = L_{AB} + L_{BC} = -346.6 \text{ J} + 500 \text{ J} = 153.4 \text{ J}$

Valuto ora gli scambi di calore lungo le 3 trasformazioni, applicando, il primo principio:

$$AB: \Delta E_{int} = Q_{AB} - L_{AB} = 0 \Rightarrow Q_{AB} = L_{AB} < 0$$

$$BC: Q_{BC} = nc_p (T_C - T_B) = \frac{7}{2} nR (T_C - T_B) = \frac{7}{2} (p_C V_C - p_B V_B) = \frac{7}{2} 2p_A (V_A - \frac{V_A}{2}) = \frac{7}{2} p_A V_A = 1750 \text{ J} > 0$$

$$CA: T \text{ diminuisce}, L_{CA} = 0 \Rightarrow \Delta E_{int} = Q_{CA} - L_{CA} = Q_{CA} < 0$$

Il rendimento del ciclo è quindi dato da: $\eta = L/Q_{BC} = 153.4 \text{ J}/1750 \text{ J} = 8.76 \%$

Problemi: entropia

- 18.** Una mole di azoto si trova confinata nella parte sinistra di un recipiente. Dopo avere aperto il rubinetto il volume del gas raddoppia. Quale è la variazione di entropia per questa trasformazione irreversibile ?

[N.B. Supporre che l'azoto si comporti come un gas ideale]

Idea chiave:

Determino la variazione entropica del processo irreversibile riferendola ad un altro processo reversibile che opera tra gli stessi stati termodinamici.

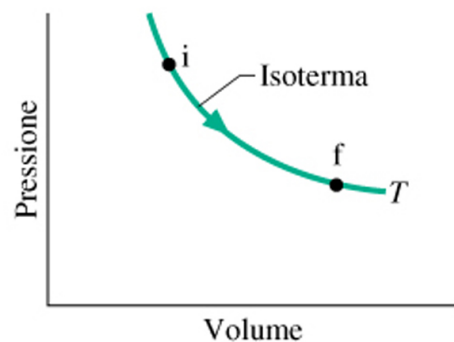
Dato che la temperatura non cambia nell'espansione libera di un gas, utilizzo una **espansione isoterma reversibile**:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W = 0$$

$$Q = W = \int_{V_i}^{V_f} p dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{rev}} &= \frac{Q}{T} = \frac{nRT \ln \frac{V_f}{V_i}}{T} = nR \ln \frac{V_f}{V_i} \\ &= (1.00 \text{ mol})(8.315 \text{ J / mole K}) \ln 2 = +5.76 \text{ J / K} \end{aligned}$$



Questa è anche la variazione di entropia per l'espansione libera e per qualunque altra Trasformazione tra i medesimi punti iniziali e finali.

$$\Delta S_{\text{irrev}} = \Delta S_{\text{rev}} = +5.76 \text{ J / K}$$

- 19.** Determinare la variazione di entropia quando **0.30 kg** di piombo fondono a **327 °C**, assumendo per il piombo un calore latente di fusione **$L_F = 24.5 \text{ kJ/kg}$** .

Idea chiave:

Suppongo che il processo di fusione avvenga così lentamente da poter essere considerato reversibile. In questo caso la temperatura è costante e pari a $T_f = 327 \text{ °C}$.

La quantità di calore richiesta dal processo di fusione è quindi:

$$Q = mL_F$$

a cui corrisponde una variazione di entropia:

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int \frac{dQ_{rev}}{T} = \frac{1}{T_f} \int dQ_{rev} = \frac{Q}{T_f} = \frac{mL_F}{T_f} \\ &= \frac{(0.30 \text{ kg})(24.5 \times 10^3 \text{ J/kg})}{(327 + 273) \text{ K}} = 12.25 \text{ J/K}\end{aligned}$$

- 20.** Una mole di gas perfetto monoatomico, inizialmente alla pressione di **1.00 atm** e volume **0.025 m³**, viene riscaldata fino allo stato finale che ha pressione di **2.00 atm** e volume **0.040 m³**.
Determinare la variazione di entropia del gas.

In ogni processo termodinamico, ad ogni step infinitesimo posso applicare il I principio:

$$dE_{\text{int}} = dQ - dW$$

$$dQ = dE_{\text{int}} + dW = nc_V dT + p dV = nc_V dT + nRT \frac{dV}{V}$$

$$\frac{dQ}{T} = \frac{nc_V dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

Se il processo è reversibile:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_i^f \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \\ &= \int_i^f \left(\frac{nc_V dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \right) \\ &= nc_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \end{aligned}$$

Dalla equazione di stato dei gas perfetti si ha inoltre:

$$\left. \begin{aligned} p_i V_i &= nRT_i \\ p_f V_f &= nRT_f \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{p_f V_f}{p_i V_i} = \frac{T_f}{T_i}$$

da cui segue:

$$\begin{aligned} \Delta S &= nc_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = n \frac{3}{2} R \ln\left(\frac{p_f V_f}{p_i V_i}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = \\ &= (1.00 \text{ moli}) \frac{3}{2} (8.315 \text{ J / mole} \cdot \text{K}) \ln\left(\frac{2.00 \text{ atm} \times 0.040 \text{ m}^3}{1.00 \text{ atm} \times 0.025 \text{ m}^3}\right) \\ &\quad + (1.00 \text{ moli}) (8.315 \text{ J / mole} \cdot \text{K}) \ln\left(\frac{0.040 \text{ m}^3}{0.025 \text{ m}^3}\right) \\ &= 18.4 \text{ J / K} \end{aligned}$$