

Un campione di **2.00 moli** di gas perfetto con $\gamma = 1.40$ si espande lentamente e **ADIABATICAMENTE** da pressione $p_i = 5.00 \text{ atm}$ e volume $V_i = 12.0 \text{ l}$ a volume finale $V_f = 30.0 \text{ l}$.

- Quale è la pressione finale del gas ?
- Quali sono le temperature finali ed iniziali ?
- Trovare Q , E e ΔE_{int}

[N.B. $1 \text{ litro} = 1 \text{ l} = 10^3 \text{ cm}^3 = 10^3 (10^{-2})^3 \text{ m}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$]

Idea chiave:

In una trasformazione adiabatica

$$p_i V_i^\gamma = p_f V_f^\gamma$$

- a) Determino la pressione finale del gas:

$$p_f = p_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^\gamma = (5.00 \text{ atm}) \left(\frac{12.0 \text{ l}}{30.0 \text{ l}} \right)^{1.40} = 1.39 \text{ atm}$$

- b) Determino le temperature utilizzando la legge dei gas perfetti:

$$T_i = \frac{p_i V_i}{nR} = \frac{(5.00 \times 1.013 \times 10^5 \text{ Pa})(12.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{2.00(8.31 \text{ J / mole} \cdot \text{K})} = 365 \text{ K}$$

$$T_f = \frac{p_f V_f}{nR} = \frac{(1.39 \times 1.013 \times 10^5 \text{ Pa})(30.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{2.00(8.31 \text{ J / mole} \cdot \text{K})} = 253 \text{ K}$$

- c) In una qualsiasi trasformazione termodinamica:

$$\Delta E_{\text{int}} = c_V n \Delta T$$

in questo caso:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{c_V + R}{c_V} = 1 + \frac{R}{c_V}$$

$$c_V = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{R}{0.40} = 2.5R = \frac{5}{2}R \quad \text{gas biatomico}$$

$$\Delta E_{\text{int}} = c_V n \Delta T = \frac{5}{2} (8.315 \text{ J / mole} \cdot \text{K}) (2.00 \text{ moli}) (253 - 365) \text{ K} = -4660 \text{ J}$$

$Q = 0$ **adiabatica**

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W_{\text{gas}} \Rightarrow W_{\text{sul gas}} = -W_{\text{gas}} = \Delta E_{\text{int}} = -4660 \text{ J}$$

è il **gas** che **compie lavoro**
infatti $W_{\text{gas}} > 0$

Due moli di gas perfetto monoatomico, inizialmente nello stato A a pressione $p_A = 4 \text{ atm}$ e volume $V_A = 1 \text{ l}$, compiono una espansione isoterma fino allo stato B a pressione $p_B = 1 \text{ atm}$.

Il gas viene poi compresso adiabaticamente fino allo stato C a pressione $p_C = p_A = 4 \text{ atm}$.

Dopo avere disegnato nel piano pV la trasformazione subita dal gas, si calcolino:

a) i volumi V_B e V_C occupati dal gas negli stati B e C;

b) Il calore scambiato nella intera trasformazione.

(Nota: $R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.0821 \text{ l atm /Kmole}$)

a) In una trasformazione isoterma $pV = \text{costante}$, quindi

$p_A V_A = p_B V_B$ da cui si ottiene:

$$V_B = p_A V_A / p_B = 4 \times 1 \text{ l} = 4 \text{ l}$$

Nella trasformazione adiabatica $pV^\gamma = \text{costante}$, quindi

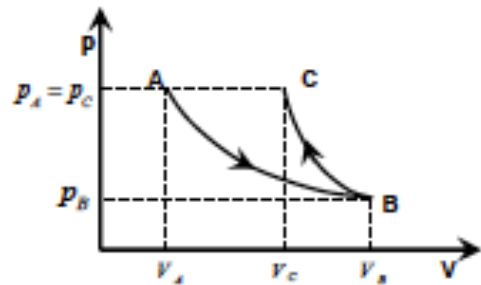
$p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma$ da cui si ottiene

$$\left(\frac{V_C}{V_B}\right)^\gamma = \frac{p_B}{p_C}$$

Per un gas monoatomico $\gamma = 5/3$, quindi

$$\left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\frac{5}{3}} = \frac{p_B}{p_C} \Rightarrow \frac{V_C}{V_B} = \left(\frac{p_B}{p_C}\right)^{\frac{3}{5}}$$

$$V_C = V_B \left(\frac{p_B}{p_C}\right)^{\frac{3}{5}} = 4 \text{ l} \times \left(\frac{1 \text{ atm}}{4 \text{ atm}}\right)^{\frac{3}{5}} = 4 \text{ l} \times 0.44 = 1.71$$



b)

Il calore scambiato è dato dalla somma dei calori nelle trasformazioni AB e BC:

$$Q_{\text{tot}} = Q_{AB} + Q_{BC} = Q_{AB}$$

Infatti $Q_{BC} = 0$ essendo la trasformazione adiabatica.

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= nRT_A \ln(V_B/V_A) \\ &= nR p_A V_A / (nR) \ln(V_B/V_A) \\ &= p_A V_A \ln(V_B/V_A) \\ &= 4 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} \ln(4) \text{ J} \\ &= 555 \text{ J} \end{aligned}$$

Due moli di gas perfetto monoatomico passano dallo stato iniziale A allo stato finale C attraverso una espansione isobara AB, seguita da una espansione adiabatrica BC.

La temperatura in A e C è la medesima e vale $T_A = T_C = 18^\circ\text{C}$, inoltre $p_A = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$ e $V_B = 2 V_A$.

Calcolare:

- Il valore assunto dalle variabili termodinamiche (p,V,T) nei tre punti e disegnare il grafico della trasformazione nel piano p-V;
- La quantità di calore scambiata nelle trasformazioni da A a C.

[Nota : $R = 8.31 \text{ J/moleK}$]

Punto A:

$$T_A = 18^\circ\text{C} = (18+273) \text{ K} = 291 \text{ K}$$

$$p_A = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_A = nRT_A/p_A = 0.024 \text{ m}^3$$

Punto B:

$$p_B = p_A = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_B = 2 V_A = 0.048 \text{ m}^3$$

$$T_B = p_B V_B / nR = p_A 2V_A / nR = 2 T_A = 582 \text{ K}$$

Punto C:

$$T_C = T_A = 291 \text{ K}$$

$$p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma$$

$$\frac{nRT_B}{V_B} V_B^\gamma = \frac{nRT_C}{V_C} V_C^\gamma$$

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

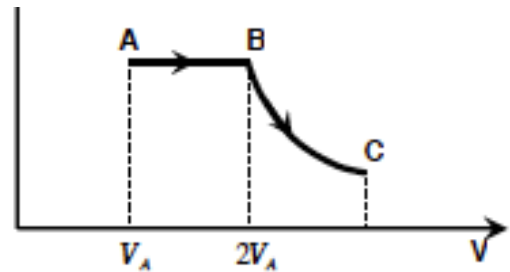
$$V_C^{\gamma-1} = \frac{T_B}{T_C} V_B^{\gamma-1} = \frac{T_B}{T_A} V_B^{\gamma-1} = \frac{p_B V_B}{nR} \frac{nR}{p_A V_A} V_B^{\gamma-1} = 2 V_B^{\gamma-1}$$

Dato che $\gamma = c_p/c_v = 5/3$, si ottiene $\gamma - 1 = 2/3$ da cui segue:

$$V_C^{2/3} = 2 V_B^{2/3}$$

$$V_C = 2^{3/2} V_B = 0.14 \text{ m}^3$$

$$p_C = \frac{nRT_C}{V_C} = 0.35 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$



- b) Essendo la trasformazione BC adiabatrica ($Q=0$), il calore scambiato lungo la trasformazione AC è pari al calore scambiato lungo la trasformazione AB, ossia:

$$Q = n c_p (T_B - T_A) = 2 \frac{5}{2} R (T_B - T_A) = 12091 \text{ J}$$

13. Un campione di gas perfetto monoatomico occupa **5.00 l** a pressione atmosferica e a **300 K** (punto A in figura). Esso è riscaldato a volume costante fino a **3.00 atm** (punto B). Poi si espande isotermicamente fino a **1.00 atm** (punto C) e infine è compresso isobaricamente fino allo stato iniziale.

- Quale è il numero di moli del campione?
- Trovare la temperatura nei punti B e C ed il volume in C
- Assumendo che il calore specifico non dipenda da T ($E_{\text{int}} = \frac{3}{2} nRT$), trovare l'energia interna nei punti A, B, C.
- Trovare Q, W e ΔE_{int} per le trasformazioni A→B, B→C, C→A;
- trovare Q, W e ΔE_{int} per l'intero ciclo.

[N.B. 1 litro = 1 l = $10^3 \text{ cm}^3 = 10^3 (10^{-2})^3 \text{ m}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$]

a) Calcolo il numero di moli dalla equazione di stato dei gas perfetti:

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{(1.013 \times 10^5 \text{ Pa})(5.00 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{(8.315 \text{ J / mole} \cdot \text{K})(300 \text{ K})} = 0.203 \text{ moli}$$

b) Trovo la temperatura:

$$\left. \begin{aligned} p_A V_A &= nRT_A \\ p_B V_B &= nRT_B \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{p_A}{p_B} = \frac{T_A}{T_B} \quad \text{A} \rightarrow \text{B} \text{ isocora}$$

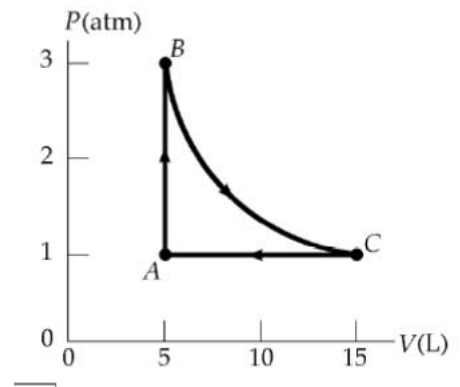
$$T_B = \frac{p_B}{p_A} T_A = \frac{3 \text{ atm}}{1 \text{ atm}} 300 \text{ K} = 900 \text{ K}$$

$$T_C = T_B = 900 \text{ K} \quad \text{B} \rightarrow \text{C} \text{ isoterma}$$

Trovo il volume in C:

$$\left. \begin{aligned} p_A V_A &= nRT_A \\ p_C V_C &= nRT_C \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_A}{V_C} = \frac{T_A}{T_C}$$

$$V_C = \frac{T_C}{T_A} V_A = \frac{900 \text{ K}}{300 \text{ K}} 5.00 \text{ l} = 15.0 \text{ l}$$



c) Calcolo le energie interne:

$$E_{\text{int},A} = \frac{3}{2} nRT_A = \frac{3}{2} (0.203 \text{ moli})(8.315 \text{ J / mole} \cdot \text{K})(300 \text{ K}) = 760 \text{ J}$$

$$E_{\text{int},B} = E_{\text{int},C} = \frac{3}{2} nRT_B = \frac{3}{2} (0.203 \text{ moli})(8.315 \text{ J / mole} \cdot \text{K})(900 \text{ K}) = 2.28 \text{ kJ}$$

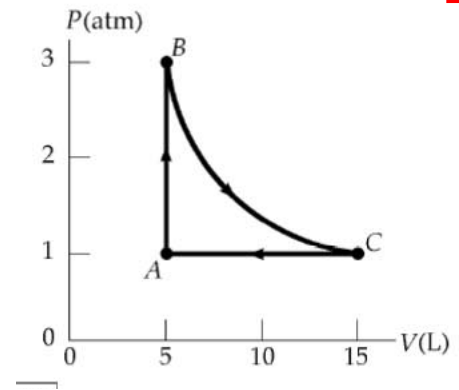
d) Trovo Q , W e ΔE_{int} nei vari tratti del ciclo:

A→B [isocora]:

$$W=0$$

$$\Delta E_{\text{int}} = E_{\text{int},B} - E_{\text{int},A} = (2.28 - 0.760) \text{ kJ} = 1.52 \text{ kJ}$$

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W \Rightarrow Q = \Delta E_{\text{int}} = 1.52 \text{ kJ}$$



B→C [isoterma]:

$$\Delta E_{\text{int}} = 0$$

$$W = \int_{V_B}^{V_C} p dV = \int_{V_B}^{V_C} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_B}^{V_C} \frac{1}{V} dV = nRT \ln \frac{V_C}{V_B} =$$

$$= (0.239 \text{ mol})(8.315 \text{ J / mole} \cdot \text{K})(300 \text{ K}) \ln \frac{15.0 \text{ l}}{5.00 \text{ l}} = 1.67 \text{ kJ}$$

$$Q = \Delta E_{\text{int}} + W = 0 + 1.67 \text{ kJ}$$

C→A [isobara]:

$$\Delta E_{\text{int}} = E_{\text{int},A} - E_{\text{int},C} = (0.760 - 2.28) \text{ kJ} = -1.52 \text{ kJ}$$

$$W = \int_{V_C}^{V_A} p dV = p \int_{V_C}^{V_A} dV = p(V_A - V_C) = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}(5.00 - 15.00)(10^{-3} \text{ m}^3) = -1.013 \text{ kJ}$$

$$Q = \Delta E_{\text{int}} + W = -1.52 \text{ kJ} - 1.01 \text{ kJ} = -2.53 \text{ kJ}$$

e) Trovo Q , W e ΔE_{int} per l'intero ciclo, sommando i contributi relativi ai vari tratti:

$$\Delta E_{\text{int}} = 0 = \Delta E_{\text{int},AB} + \Delta E_{\text{int},BC} + \Delta E_{\text{int},CA} = 1.52 \text{ kJ} + 0 - 1.52 \text{ kJ}$$

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = 0 + 1.67 \text{ kJ} - 1.013 \text{ kJ} = 0.656 \text{ kJ}$$

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 1.52 \text{ kJ} + 1.67 \text{ kJ} - 2.53 \text{ kJ} = 0.656 \text{ kJ}$$

3) Due moli di un gas perfetto biatomico compiono il ciclo **ABCA** in cui: AB è una trasformazione in cui la pressione aumenta linearmente all'aumentare del volume ($p_A = 2 \text{ atm}$, $V_A = 3 \text{ l}$, $V_B = 2 V_A$ e $p_B = 3 p_A$);

BC è isocora e CA è isobara. Calcolare:

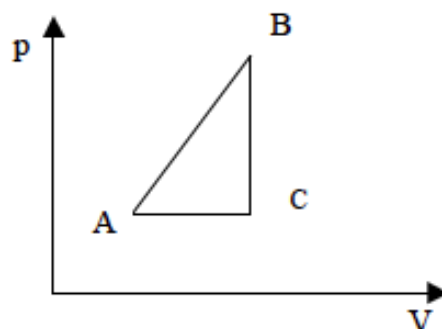
- a) la quantità di calore scambiata nell'intero ciclo;
- b) la variazione di energia interna nella trasformazione AB

[Nota: $R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.082 \text{ l atm /Kmole}$]

Nell'intero ciclo la variazione di energia interna è nulla. Quindi il calore scambiato è pari al lavoro svolto dal gas:

$$\Delta Q = \Delta L$$

Il lavoro è pari all'area sottesa dalla curva che descrive la trasformazione nel piano pV. In questo caso è pari all'area del triangolo ABC:



$$\Delta L = \text{Area}(ABC) = \frac{1}{2} (V_B - V_A) \cdot (p_B - p_A) = \frac{1}{2} (2 \cdot V_A - V_A) \cdot (3 \cdot p_A - p_A) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot V_A \cdot 2 \cdot p_A = \frac{1}{2} 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 600 \text{ J}$$

Ricordando che l'energia interna per un gas biatomico è data da

$$U = \frac{5}{2} n \cdot R \cdot T$$

si ottiene per la variazione di energia interna

$$\Delta U = \frac{5}{2} (n \cdot R \cdot T_B - n \cdot R \cdot T_A) = \frac{5}{2} (p_B \cdot V_B - p_A \cdot V_A) =$$

$$\frac{5}{2} (6 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 - 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3) = 7500 \text{ J}$$

Due moli di gas perfetto biatomico, inizialmente a pressione $p_A = 10^5 \text{ N/m}^2$ e volume $V_A = 5 \text{ l}$, compiono un ciclo termodinamico così composto:

AB: compressione isoterma fino a dimezzare il volume iniziale;

BC: espansione isobara fino al volume iniziale;

CA: decompressione isocora fino alla pressione iniziale.

a) Si calcoli il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione BC, specificandone il segno.

b) Si calcoli il lavoro totale svolto ed il calore assorbito durante il ciclo

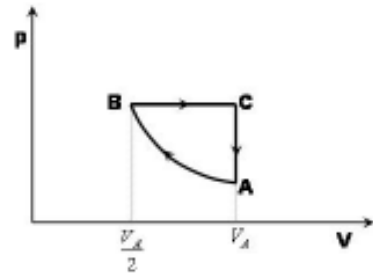
(Nota: $R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.082 \text{ l atm /Kmole}$)

a) In una trasformazione isoterma $pV = \text{costante}$, quindi

$$p_A V_A = p_B V_B = p_B \frac{V_A}{2} \quad \text{da cui si ottiene:}$$

$$p_B = 2p_A = 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$V_B = V_A/2 = 2.5 \text{ litri} = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$



Il lavoro fatto dal gas in una trasformazione termodinamica è pari all'area sottesa dalla curva nel piano pV. Nella trasformazione BC, a pressione costante, il lavoro è dato da:

$$L_{BC} = \int_B^C p dV = p_B (V_C - V_B) = 2p_A (V_A - \frac{V_A}{2}) = p_A V_A = 10^5 \text{ N/m}^2 \times 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 500 \text{ J}$$

Il lavoro fatto dal gas è positivo, trattandosi di una espansione.

b) Il lavoro totale L svolto è dato dalla somma dei lavori lungo le 3 trasformazioni:

$$L = L_{AB} + L_{BC} \quad \text{poiché lungo CA (isocora) il lavoro è nullo.}$$

Calcoliamo il lavoro lungo AB (isoterma), utilizzando la legge dei gas perfetti $pV = nRT_A$:

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_A^B p dV = \int_A^B nRT_A \frac{dV}{V} = nRT_A \int_A^B \frac{dV}{V} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = nRT_A \ln \frac{V_A/2}{V_A} \\ &= nRT_A \ln \frac{1}{2} = -nRT_A \ln 2 = -p_A V_A \ln 2 = -346.6 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\text{Il lavoro totale è quindi } L = L_{AB} + L_{BC} = -346.6 \text{ J} + 500 \text{ J} = 153.4 \text{ J}$$

Valuto ora gli scambi di calore lungo le 3 trasformazioni, applicando, il primo principio:

$$AB: \Delta E_{int} = Q_{AB} - L_{AB} = 0 \Rightarrow Q_{AB} = L_{AB} < 0$$

$$BC: Q_{BC} = nc_p (T_C - T_B) = \frac{7}{2} nR (T_C - T_B) = \frac{7}{2} (p_C V_C - p_B V_B) = \frac{7}{2} 2p_A (V_A - \frac{V_A}{2}) = \frac{7}{2} p_A V_A = 1750 \text{ J} > 0$$

$$CA: T \text{ diminuisce}, L_{CA} = 0 \Rightarrow \Delta E_{int} = Q_{CA} - L_{CA} = Q_{CA} < 0$$

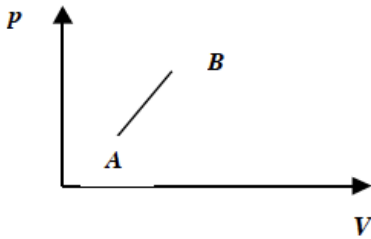
Il calore assorbito (ossia il Q positivo) è quindi il calore relativo alla sola trasformazioni BC ed è pari a 1750 J.

D. Un gas perfetto monoatomico subisce la trasformazione descritta dall'equazione $p = k V$, p è la pressione, V il volume e k una costante positiva. Lo stato iniziale è il punto A in cui $p_A = 4 \text{ atm}$, $V_A = 8.21 \text{ litri}$ e $T_A = 200 \text{ K}$. Lo stato finale è il punto B dove $V_B = 2 V_A$.

1. Disegnare in un diagramma (p, V) la trasformazione AB e calcolare la corrispondente variazione di energia interna del gas.

2. Calcolare il lavoro compiuto dal gas durante la trasformazione AB.

$$R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.0821 \text{ atm/Kmole} \quad \epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N m}^2$$



Nella trasformazione AB $p = k V$, pertanto se $V_B = 2 V_A$, $p_B = k V_B = k 2 V_A = 2 p_A$
Inoltre $T_A = p_A V_A / nR$, $T_B = p_B V_B / nR = 4 p_A V_A / nR = 4 T_A = 800 \text{ K}$

La variazione di energia interna $\Delta E = n c_V \Delta T = n (3/2) R (4 T_A - T_A) = n (9/2) R T_A$
 $= (9/2) p_A V_A = 4.5 \cdot 4 \cdot 8.21 = 147.8 \text{ litri atm} = 147.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 1.01 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 14926 \text{ J}$

2. Il lavoro compiuto dal gas è pari all'area delimitata dalla trasformazione tra il punto A e il punto B, quindi:

$$L = (V_B - V_A) (p_B + p_A) / 2 = 3 V_A p_A / 2 = 1.5 p_A V_A = 49.26 \text{ litri atm} = 4975.3 \text{ J}.$$

3) Una mole di un gas ideale monoatomico compie le seguenti trasformazioni:

A $\rightarrow$ B: compressione isoterma, dal volume $V_A = 3 \text{ dm}^3$ e temperatura $T_A = 192.5 \text{ K}$, al volume $V_B = 2 \text{ dm}^3$;

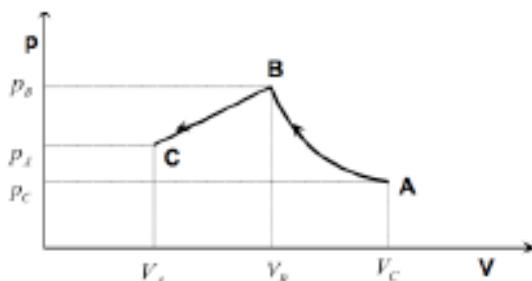
B $\rightarrow$ C: compressione in cui la pressione decresce linearmente fino a $p_C = 6 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ e $V_C = 1 \text{ dm}^3$.

a) Si disegnino nel piano (p,V) le trasformazioni termodinamiche, si calcolino per ogni stato le coordinate termodinamiche (p,V,T) ed il lavoro totale compiuto dal gas da A a C;

b) Si calcolino la variazione di energia interna e il calore scambiato dal gas da A a C, specificando se il calore sia assorbito o ceduto.

(N.B. $R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.082 \text{ l atm /K mol}$)

a) Il grafico delle trasformazioni AB-BC nel diagramma (p,V) è il seguente :



Le coordinate termodinamiche (p,V,T) dei vari stati si ottengono dai dati iniziali e dalla equazione di stato dei gas perfetti ($pV = nRT$):

$$\begin{aligned} p_A &= 5.3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \\ V_A &= 3 \text{ dm}^3 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \\ T_A &= 192.5 \text{ K} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_B &= 8 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \\ V_B &= 2 \text{ dm}^3 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \\ T_B &= 192.5 \text{ K} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_C &= 6 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \\ V_C &= 1 \text{ dm}^3 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \\ T_C &= 72.2 \text{ K} \end{aligned}$$

Il Lavoro totale è $L = L_{AB} + L_{BC}$, ove

$$\begin{aligned} L_{AB} &= nR T_A \ln(V_B / V_A) = -648.7 \text{ J (la trasformazione AB è isoterma)} \\ L_{BC} &= \frac{1}{2} (p_B + p_C) (V_C - V_B) = -700 \text{ J} \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$L = -1348.6 \text{ J}$$

b) La variazione di energia interna ΔE_{AC} è:

$$\Delta E_{AC} = n c_V (T_C - T_A) = 3R/2 (T_C - T_A) = -1499.5 \text{ J}$$

Dal primo principio della termodinamica si ha:

$$\Delta E = Q - L \text{ e pertanto } Q = L + \Delta E$$

$$Q = -2848.7 \text{ J}$$

Q è negativo, pertanto il calore è ceduto dal gas.

Un gas perfetto monoatomico ($n=2$ moli) passa dallo stato iniziale A a quello finale D compiendo le trasformazioni reversibili AB (isocora con aumento di pressione), BC (isoterma) e CD (isobara).

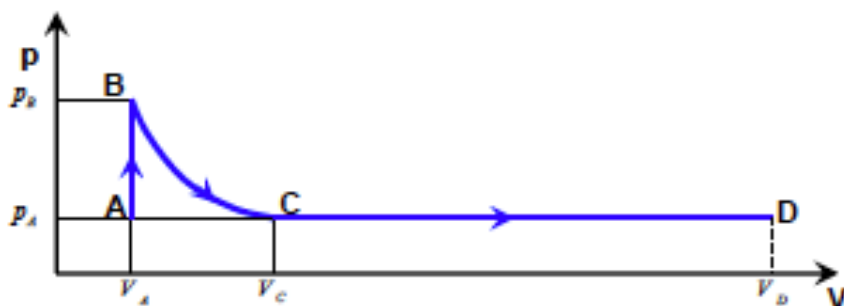
Inoltre in A è $p_A = 6 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$, $V_A = 1 \text{ m}^3$, $p_C = p_A = p_D$, $V_C = 3 V_A$ e $V_D = 4 V_C$.

a) Si rappresenti nel diagramma (p, V) la trasformazione ABCD e si calcoli il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione ABCD;

b) Si calcoli la variazione di energia interna del gas tra lo stato iniziale A e quello finale D.

(Nota: $R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.082 \text{ l atm /Kmole}$)

a) Nel piano pV la trasformazione ha il seguente andamento:



Il lavoro fatto dal gas è pari all'area sottesa sotto la curva della trasformazione:

$$L_{tot} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD}$$

$$L_{AB} = 0$$

$$L_{BC} = \int_B^C p dV = \int_B^C \frac{nRT_C}{V} dV = nRT_C \int_B^C \frac{dV}{V} = nRT_C \ln \frac{V_C}{V_B}$$

Ricavo la temperatura T_C della curva isoterma applicando l'equazione dei gas perfetti al punto C,

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR}, \text{ da cui segue che il lavoro relativo alla trasformazione BC è pari a :}$$

$$\begin{aligned} L_{BC} &= nRT_C \ln \frac{V_C}{V_B} = nR \frac{p_C V_C}{nR} \ln \frac{V_C}{V_B} = p_C V_C \ln \frac{3V_A}{V_A} = 3p_A V_A \ln 3 = \\ &= 3 \times (6 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}) \times (1 \times \text{m}^3) \ln 3 = 19.77 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

Il lavoro relativo alla trasformazione CD è invece pari a:

$$\begin{aligned} L_{CD} &= p_C (V_D - V_C) = p_A (4V_C - V_C) = \\ &= 3p_A V_C = 3p_A \times 3V_A = 9p_A V_A = 9 \times (6 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}) \times (1 \times \text{m}^3) = 54 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

Il lavoro totale è quindi:

$$L_{tot} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} = L_{BC} + L_{CD} = 19.77 \times 10^3 \text{ J} + 54 \times 10^3 \text{ J} = 73.77 \times 10^3 \text{ J}$$

c) La variazione di energia interna del sistema fra i punti A e D dipende solo dalla temperatura del sistema in A e D, secondo la relazione:

$$\begin{aligned} \Delta E &= nc_V \Delta T = nc_V (T_D - T_A) = n \frac{3}{2} R \left(\frac{p_D V_D}{nR} - \frac{p_A V_A}{nR} \right) = \\ &= \frac{3}{2} (p_D V_D - p_A V_A) = \frac{3}{2} (p_A 4 \times 3V_A - p_A V_A) = \frac{3}{2} \times 11 p_A V_A = \\ &= \frac{33}{2} (6 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}) \times (1 \times \text{m}^3) = 99 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

Due moli di un gas perfetto monoatomico compiono, a partire dallo stato iniziale A di coordinate termodinamiche ($p_A = 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, $V_A = 10 \text{ dm}^3$), il ciclo reversibile ABCA, in cui AB è una trasformazione in cui la pressione decresce linearmente all'aumentare del volume, con $p_B = (1/2) p_A$ e $V_B = 4V_A$ ed inoltre BC è una compressione isobara e CA è una compressione isoterma.

- a) Si disegni l'intero ciclo in un diagramma (V, p). Si calcolino le coordinate termodinamiche di C e la variazione di energia interna relativa alla trasformazione AB.
b) Si calcoli la quantità di calore scambiata durante l'intero ciclo.

[Nota: $R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.0821 \text{ atm/Kmole}$]

- a) Le variabili termodinamiche (p,V,T) per lo stato C possono essere ricavate applicando l'equazione di stato dei gas perfetti

$$pV = nRT$$

sapendo che:

$$p_A = 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2, V_A = 10^{-2} \text{ m}^3;$$

$$p_B = 10^5 \text{ N/m}^2, V_B = 4 \times 10^{-2} \text{ m}^3;$$

$$p_C = p_B = 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ (essendo BC isobara)}$$

$$p_C V_C = p_A V_A \text{ (essendo AC isoterma), da cui}$$

$$V_C = p_A V_A / p_C = 2 \times 10^{-2} \text{ m}^3$$

Inoltre:

$$T_A = T_C = p_A V_A / nR = (2 \times 10^5 \text{ N/m}^2) (10^{-2} \text{ m}^3) / (2 \text{ moli} \times 8.31 \text{ J/K mole}) = 120.3 \text{ K}$$

La variazione di energia interna ΔU nella trasformazione AB è:

$$\Delta U = n c_V \Delta T = n c_V (T_B - T_A) = n (3R/2) (p_B V_B - p_A V_A) / nR = 3000 \text{ J}$$

- b) La quantità di calore scambiata nell'intero ciclo Q_{ciclo} è:

$$Q_{\text{ciclo}} = L_{\text{ciclo}} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA}$$

$$L_{AB} = (p_A + p_B) (V_B - V_A) / 2 = 4500 \text{ J}$$

$$L_{BC} = p_B (V_C - V_B) = -2000 \text{ J}$$

$$L_{CA} = \int p dV = nRT_A \ln (V_A / V_C) = -1386 \text{ J}$$

$$Q_{\text{ciclo}} = 1114 \text{ J}$$

