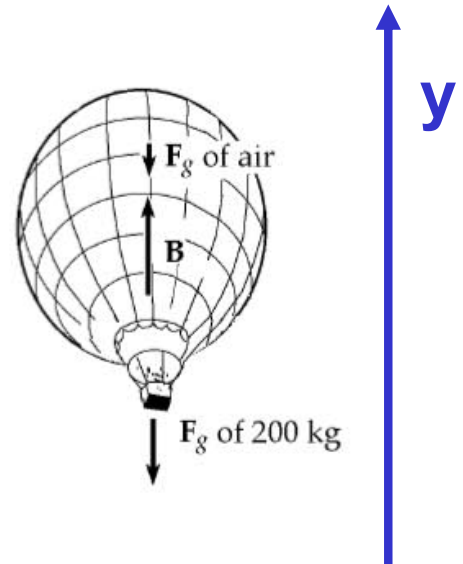


Problemi: **teoria cinetica dei gas**

- 1.** La massa totale di un pallone aerostatico e del suo carico (esclusa l'aria all'interno) è $m_p = 200 \text{ kg}$. Il volume del pallone è $V_p = 400 \text{ m}^3$.
L'aria esterna ha una temperatura $T = 10.0^\circ\text{C}$ e pressione $p = 1 \text{ atm} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.
Determinare a quale temperatura deve essere scaldata l'aria nel pallone affinché possa decollare.
[densità dell'aria a 10.0°C pari a 1.25 kg/m^3
composizione aria secca nel pallone:
 $20\% \text{ O}_2$ e $80\% \text{ N}_2$]

perché il pallone decolli devo avere **equilibrio nelle forze**
(forze peso e spinta idrostatica F_A):



$$(\vec{F}_g)_{aria} + (\vec{F}_g)_{pallone} + \vec{F}_A = 0$$

$$\sum F_y = -(\vec{F}_g)_{aria} - (\vec{F}_g)_{pallone} + F_A = 0$$

$$F_A = (\vec{F}_g)_{pallone} + (\vec{F}_g)_{aria} = (\vec{F}_g)_{pallone} + m_{aria}g$$

$$F_A = (m_{aria})_{spostata} g = \rho_{aria} V g$$

$$= (1.25 \text{ kg} / \text{m}^3)(400 \text{ m}^3)(9.8 \text{ m} / \text{s}^2) = 4900 \text{ N}$$

$$(\vec{F}_g)_{pallone} = m_p g = (200 \text{ kg})(9.8 \text{ m} / \text{s}^2) = 1960 \text{ N}$$

$$m_{aria} = \frac{(\vec{F}_g)_{pallone} - F_A}{g} = \frac{(1960 - 4900) \text{ N}}{9.8 \text{ m} / \text{s}^2} = 300 \text{ kg}$$

calcolo il **numero di moli** di aria entro il pallone

$$n = \frac{m_{aria}}{M_{aria}} = \frac{300 \text{ kg}}{(0.20 \times 32.0 \text{ g} / \text{mol}) + (0.80 \times 28.0 \text{ g} / \text{mol})}$$

$$= \frac{300 \text{ kg}}{28.8 \times 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{mol}}} = 1.04 \times 10^4 \text{ mol}$$

dall' **equazione di stato** dei gas perfetti:

$$T = \frac{pV}{nR} = \frac{(1.013 \times 10^5 \text{ Pa})(400 \text{ m}^3)}{(1.04 \times 10^4 \text{ mol})(8.315 \text{ J} / \text{mol} \cdot \text{K})} = 470 \text{ K}$$

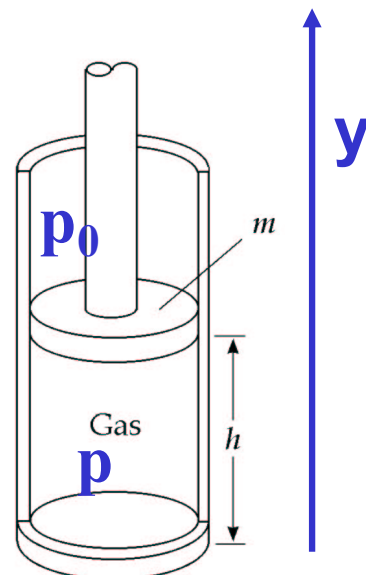
2. Un cilindro verticale di sezione A è limitato superiormente da un pistone di massa m , che può scorrere senza attrito.

a) Se nel cilindro ci sono n moli di gas perfetto a temperatura T , determinare l'altezza h a cui il pistone sarà in equilibrio sotto l'azione del proprio peso.

b) quanto vale h se $n = 0.200$ moli, $T = 400$ K, $A = 0.00800$ m² e $m = 20.0$ kg ?

a) all'equilibrio, devo avere risultante nulla delle forze sul pistone

$$\sum_y F_y = -p_0 A - mg + pA = 0 \quad (1)$$



applico equazione di stato dei gas perfetti

$$pV = pAh = nRT$$

$$p = \frac{nRT}{Ah}$$

che sostituita in (1) fornisce:

$$-p_0 A - mg + \frac{nRT}{Ah} A = 0$$

$$h = \frac{nRT}{p_0 A + mg}$$

b)

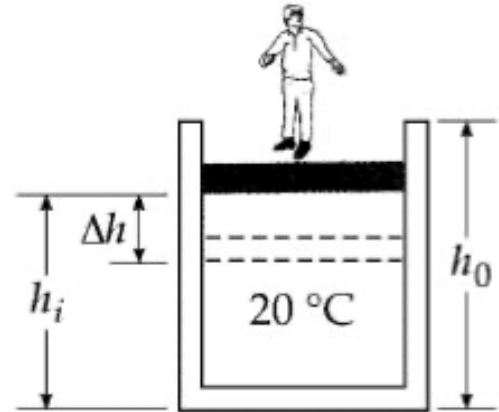
$$\begin{aligned} h &= \frac{nRT}{p_0 A + mg} \\ &= \frac{(0.2 \text{ mol})(8.315 \text{ J} / \text{mol} \cdot \text{K})(400 \text{ K})}{(1.013 \times 10^5 \text{ Pa})(0.00800 \text{ m}^2) + (20.0 \text{ kg})(9.8 \text{ m} / \text{s}^2)} \\ &= \frac{665 \text{ Nm}}{810 \text{ N} + 196 \text{ N}} = 0.661 \text{ m} \end{aligned}$$

3. Un cilindro di raggio $R=40.0\text{ cm}$ e profondo $h_0=50.0\text{ cm}$ è riempito d'aria a $T=20.0\text{ }^\circ\text{C}$ e $p_0=1\text{ atm}$.

Un pistone di 20.0 kg viene abbassato nel cilindro, comprimendo l'aria intrappolata all'interno. Infine, un uomo di 75.0 kg sale sul pistone comprimendo ulteriormente l'aria che rimane a $20.0\text{ }^\circ\text{C}$.

a) di quanto si abbassa (Δh) il pistone quando l'uomo sale su di esso?

b) a quale temperatura si deve riscaldare il gas perché sollevi il pistone e l'uomo di nuovo alla quota h_i ?
[quota originaria del pistone]



a) applico l'equazione di stato dei gas perfetti

$$pV = nRT$$

con $T = \text{costante}$.

Nel caso di solo pistone:

$$pV = p_0V_0$$

$$p(Ah_i) = p_0(Ah_0) \quad \text{con } p = p_0 + m_p g / A \quad [m_p = 20.0\text{ kg massa pistone}]$$

Ricavo h_i :

$$h_i = \frac{p_0 A h_0}{p A} = \frac{p_0 h_0}{p_0 + \frac{m_p g}{A}} = \frac{h_0}{1 + \frac{m_p g}{p_0 A}} = \frac{0.5\text{ m}}{1 + \frac{(20.0\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)}{(1.013 \cdot 10^5\text{ N/m}^2)\pi(0.4\text{ m})^2}} = 49.81\text{ cm}$$

Ora sale l'uomo sul pistone: rifaccio i calcoli precedenti utilizzando la massa $M + m_p$

$$h' = \frac{p_0 A h_0}{p A} = \frac{p_0 h_0}{p_0 + \frac{(M + m_p)g}{A}} = \frac{h_0}{1 + \frac{(M + m_p)g}{p_0 A}} = \frac{0.5\text{ m}}{1 + \frac{(95.0\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)}{(1.013 \cdot 10^5\text{ N/m}^2)\pi(0.4\text{ m})^2}} = 49.10\text{ cm}$$

$$\Delta h = h_i - h' = 49.81\text{ cm} - 49.10\text{ cm} = 7.06\text{ mm}$$

b) nel processo di riscaldamento p rimane costante. Dalla eq. dei gas perfetti:

$$\frac{V_f}{T_f} = \frac{V_i}{T_i} \Rightarrow \frac{Ah_i}{T_f} = \frac{Ah'}{T_i}$$

$$T_f = T_i \frac{h_i}{h'} = (20.0 + 273.0)\text{ K} \frac{49.81 \times 10^{-2}\text{ m}}{49.10 \times 10^{-2}\text{ m}} = 297\text{ K} = 24\text{ }^\circ\text{C}$$

4. Fare una stima della massa d'aria contenuta nella vostra stanza da letto.
Assumere come dimensioni **4 m x 4 m x 2.4 m**.

My bedroom is 4 m long, 4 m wide, and 2.4 m high, enclosing air at 100 kPa and 20 °C = 293 K. Think of the air as 80.0% N₂ and 20.0% O₂. (N.B. A(N) = 14, A(O) = 16)

Avogadro's number of molecules has mass

$$M = (0.800)(28.0 \text{ g/mol}) + (0.200)(32.0 \text{ g/mol}) = 0.0288 \text{ kg/mol} \quad \text{massa di una mole di aria}$$

Then $PV = nRT = (m/M)RT$

gives $m = \frac{PVM}{RT} = \frac{(1.00 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(38.4 \text{ m}^3)(0.0288 \text{ kg/mol})}{(8.315 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(293 \text{ K})} = 45.4 \text{ kg} \quad \boxed{\sim 10^2 \text{ kg}}$

5. **25.0 m** al di sotto della superficie del mare ($\rho_{\text{mare}} = 1025 \text{ kg/m}^3$ e $T = 0.00^\circ\text{C}$), un sommozzatore emette una bolla d'aria di volume **1.00 cm³**.
Se la temperatura della superficie del mare è **20.0 °C**, quale è il volume della bolla appena prima che scoppi ?

At depth, $P = P_0 + \rho gh$ and $PV_i = nRT_i$

At the surface, $P_0 V_f = nRT_f$: $\frac{P_0 V_f}{(P_0 + \rho gh)V_i} = \frac{T_f}{T_i}$

Therefore $V_f = V_i \left(\frac{T_f}{T_i} \right) \left(\frac{P_0 + \rho gh}{P_0} \right)$

$$V_f = 1.00 \text{ cm}^3 \left(\frac{293 \text{ K}}{278 \text{ K}} \right) \left(\frac{1.013 \times 10^5 \text{ Pa} + (1025 \text{ kg/m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2)(25.0 \text{ m})}{1.013 \times 10^5 \text{ Pa}} \right)$$

$$V_f = \boxed{3.67 \text{ cm}^3}$$

- 6. a)** Quanti atomi di elio riempiono un pallone di un diametro di **30.0 cm** a **20.0 °C** e **1 atm**
b) quale è l'energia cinetica media per ciascun atomo di elio ?
c) quale è la velocità quadratica media di ciascun atomo ?

- a)** Il numero N di atomi del pallone è pari a $N = n N_A$, con n = numero di moli ed N_A numero di Avogadro.

Ricavo n dalla equazione di stato dei gas perfetti:

$$n = pV/RT$$

ove il volume del pallone è pari a :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(15.0 \times 10^{-2} m)^3 = 1.41 \times 10^{-2} m^3$$

da cui:

$$n = \frac{(1.013 \times 10^5 Pa)(1.41 \times 10^{-2} m^3)}{(8.315 Nm / mol \cdot K)(20.0 + 273.0)K} = 0.588 mol$$

$$N = nN_A = (0.588 mol)(6.02 \times 10^{23} molecole / mol) = 3.54 \times 10^{23} atomi$$

- b)** Energia cinetica media:

$$\bar{K} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} (1.38 \times 10^{-23} J / K)(293 K) = 6.07 \times 10^{-21} J$$

- c)** Calcolo la velocità quadratica media dalla energia cinetica:

$$v_{rqm} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{2\bar{K}}{m}}$$

Un atomo di He ha massa:

$$m = M/N_A = (4.0026 g/mol)/(6.02 \times 10^{23} molecole/mol) \\ = 6.65 \times 10^{-24} g = 6.65 \times 10^{-27} kg$$

ove $M = 4.0026 g/mol$ è la massa molare

da cui:

$$v_{rqm} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{2(6.07 \times 10^{-21} J)}{6.65 \times 10^{-27} kg}} = 1.35 km / s$$