

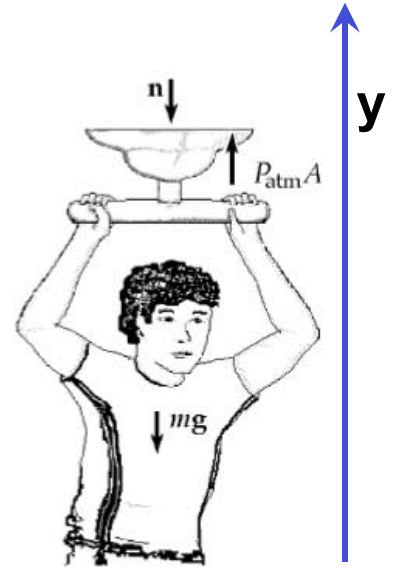
Problemi: meccanica dei fluidi

1. Calcolare l'area di contatto tra una ventosa completamente svuotata d'aria ed il soffitto, necessaria per sostenere il peso di una persona di **80.0 kg**.

idea chiave:

funzionamento di una ventosa:

- l'aria viene espulsa dalla ventosa quando essa viene premuta contro una superficie.
- quando viene rilasciata la ventosa torna indietro per un po', causando una diminuzione di pressione del gas intrappolato.
- differenza di pressione tra esterno ed interno ventosa causa una forza risultante che spinge la ventosa contro superficie.



La ventosa è tenuta in equilibrio dalle forze N , F_g , $F_{\text{pressione}}$.
Il vuoto fra ventosa e soffitto **NON** esercita alcuna forza.

$$\sum F_y = -N - mg + p_{\text{atm}} A = 0$$

Se la ventosa sostiene appena la persona, N è quasi nulla:

$$\sum F_y = 0 - mg + p_{\text{atm}} A = 0$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{mg}{p_{\text{atm}}} \\ &= \frac{(80.0 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2} \\ &= 7.74 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 7.74 \times 10^{-3} (10^2 \text{ cm})^2 = 77.4 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

2. Un inesperto sommozzatore in piscina, mentre si trova alla profondità L , si riempie i polmoni d'aria inspirando a fondo dalle sue bombole. Abbandona poi le bombole e risale in superficie senza espiare gradatamente l'aria. Arrivato a galla, la differenza fra la pressione interna nei suoi polmoni e la pressione esterna che preme su di lui è **9.3 kPa**.

a) quale era la profondità L da cui era partito ?

b) a quale rischio mortale va incontro il sommozzatore ?

idea chiave:

i tessuti corporei sono sempre in equilibrio con l'esterno



- ▶ la pressione esterna dell'acqua a **profondità L** è pari alla pressione all'interno dei polmoni

$$p = p_0 + \rho g L$$

ove

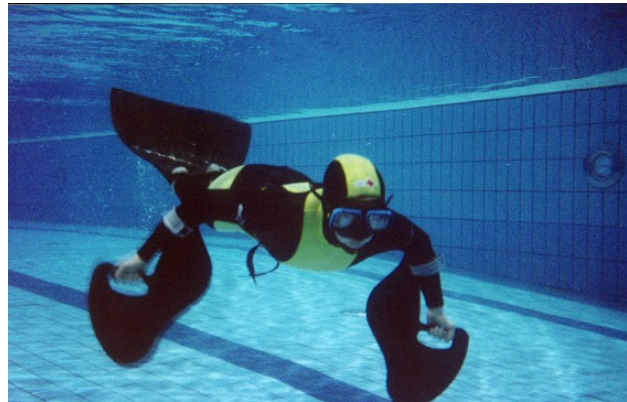
$p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ pressione atmosferica

$\rho = 998 \text{ kg/m}^3 \approx 10^3 \text{ kg/m}^3$ densità dell'acqua

- ▶ in superficie: $p = p_0$
e la differenza di pressione fra aria nei polmoni e esterno è:

$$\Delta p = p - p_0 = \rho g L \quad [\text{il sommozzatore } \textbf{NON} \text{ ha infatti espulso l'aria dai polmoni risalendo in superficie}]$$

$$L = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{9.3 \text{ kPa}}{(998 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)} = 0.95 \text{ m}$$



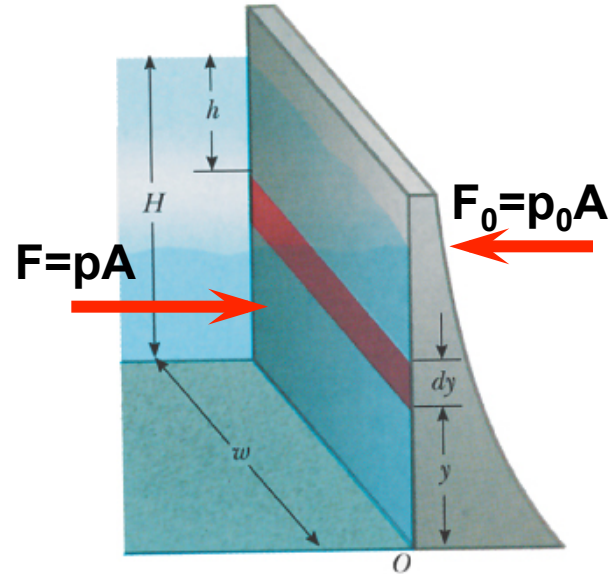
Anche a questa modesta profondità la differenza di pressione (9% pressione atmosferica) è sufficiente a rompere gli alveoli dei polmoni e a spingere l'aria dai polmoni nel sangue depressurizzato che la porta al cuore, causando la morte del sommozzatore **[embolia]**. Espirando gradualmente l'aria in risalita, la pressione dei polmoni eguaglia la Pressione esterna, e quindi non si corre alcun pericolo.

3. Una diga di larghezza $w = 1200 \text{ m}$ è piena d' acqua fino all' altezza $H = 150 \text{ m}$. Calcolare la forza risultante sulla diga.

idea chiave:

- $F = p A$
- p varia con la profondità

⇒ calcolo forza dF agente su striscia dy a profondità h e poi integro su altezza totale H .



$$p = p_0 + \rho g h = p_0 + \rho g (H - y)$$

$$F = pA = p_0 A + \rho g (H - y) A = F_0 + \rho g (H - y) A$$

considero solo la **forza idrostatica** $\rho g (H - y) A$, dato che la forza F_0 dovuta alla pressione atmosferica è la medesima su ambo i lati della diga, dando un contributo nullo.

$$F = \rho g (H - y) A$$

$$dF = p dA = p w dy = \rho g (H - y) w dy$$

$$F = \int_0^H dF = \int_0^H \rho g (H - y) w dy = \frac{1}{2} \rho g w H^2$$

$$= \frac{1}{2} (998 \text{ kg} / \text{m}^3) (9.8 \text{ m} / \text{s}^2) (1200 \text{ m}) (150)^2 \text{ m}^2$$

$$= 1.32 \cdot 10^{11} \text{ N}$$

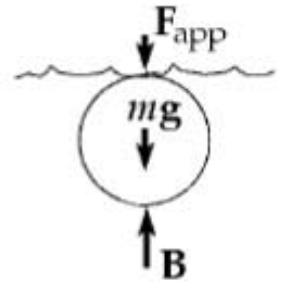
N.B. le dighe sono costruite in modo tale da **aumentare lo spessore con la profondità**, dato che p cresce con la profondità.

Problemi: spinta idrostatica

4. Una pallina da ping-pong ha un diametro di **3.80 cm** e una densità media di **0.084 g/cm³**. Quale forza è necessaria per tenerla completamente immersa in acqua?

All' equilibrio:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{app} + \vec{F}_g + \vec{F}_A = 0$$
$$F_{app} + mg - F_A = 0$$



ove F_A è la spinta idrostatica

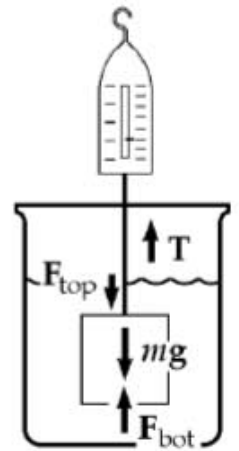
$$F_A = V \rho_{acqua} g$$

$$F_{app} = -mg + F_A = -\rho_{palla} Vg + \rho_{acqua} Vg = \frac{4}{3} \pi R^3 g (\rho_{acqua} - \rho_{palla})$$

$$F_{app} = \frac{4}{3} \pi (1.90 \times 10^{-2} m)^3 (9.80 m/s^2) (1000 kg/m^3 - 0.084 \frac{10^{-3} kg}{(10^{-2} cm)^3})$$
$$= 0.258 N$$

5. Un blocco di metallo di **10 kg** e di dimensioni **12.0 cm x 10.0 cm x 10.0 cm** è sospeso ad una bilancia a molla ed immerso in acqua. La dimensione di **12.0 cm** è verticale e la parte superiore del blocco è a **5.0 cm** sotto il pelo dell'acqua.

- quali sono le forze agenti alla sommità e sul fondo del blocco?
- quale è la lettura sulla scala graduata della molla?
- mostrare che la forza di Archimede è pari alla differenza fra le forze alla sommità e sul fondo del blocco.



a) $p = p_0 + \rho gh$

sulla sommità del cubo:

$$h = 5.0 \text{ cm}$$

$$p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$\begin{aligned} p_{top} &= 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2 + (998 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(5.0 \times 10^{-2} \text{ m}) \\ &= 1.0179 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

$$F_{top} = p_{tot} A = (1.0179 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(10.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2 = 1.0179 \times 10^3 \text{ N}$$

alla base del cubo:

$$h = (5.0 + 12.0) \text{ cm} = 17.0 \text{ cm}$$

$$p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$\begin{aligned} p_{bottom} &= 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2 + (998 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(17.0 \times 10^{-2} \text{ m}) \\ &= 1.0297 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

$$F_{bottom} = p_{bottom} A = (1.0297 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(10.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2 = 1.0297 \times 10^3 \text{ N}$$

b) sulla scala graduata si legge la tensione **T** del filo:

$$\sum F_y = T - mg + F_A = 0$$

$$F_A = \rho_{acqua} V g = (10^3 \text{ kg/m}^3)(12 \times 10 \times 10 \times 10^{-6} \text{ m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2) = 11.8 \text{ N}$$

$$mg = (10 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 98 \text{ N}$$

$$T = mg - F_A = (98.0 - 11.8) \text{ N} = 86.2 \text{ N}$$

N.B. $T < mg$

c) $F_{top} - F_{bottom} = (1.0179 - 1.0297) \times 10^3 \text{ N} = 11.8 \text{ N} = F_A$

6. Una molla leggera di costante $k = 90.0 \text{ N/m}$ è ferma verticalmente su un tavolo. Un pallone di 2.00 g è riempito di elio per un volume di 5.00 m^3 ed è collegato alla molla, causandone un allungamento. Determinare la lunghezza di espansione L quando il pallone è in equilibrio.

All' equilibrio:

$$\sum F_y = 0$$

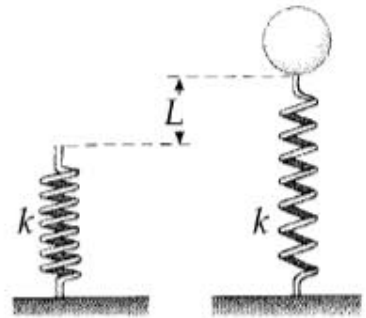
$$F_A - F_{molla} - F_{g,He} - F_{g,pallone} = 0$$

$$F_{molla} = kL$$

$$F_A = \rho_{aria} Vg$$

$$F_{g,He} = \rho_{He} Vg$$

$$F_{g,pallone} = m_{pallone} g$$



$$F_{molla} = kL = F_A - F_{g,He} - F_{g,pallone}$$

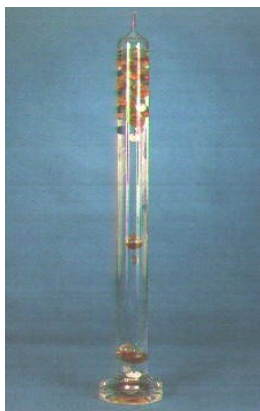
$$kL = \rho_{aria} Vg - \rho_{He} Vg - m_{pallone} g$$

$$L = \frac{(\rho_{aria} - \rho_{He})V - m_{pallone}}{k} g$$

$$= \frac{(1.29 \text{ kg} / \text{m}^3 - 0.180 \text{ kg} / \text{m}^3) 5.00 \text{ m}^3 - 2.00 \times 10^{-3} \text{ kg}}{90.0 \text{ N} / \text{m}} (9.80 \text{ m} / \text{s}^2)$$

$$= 0.604 \text{ m}$$

7. Termometro di Galileo



Descrizione

Il dispositivo è costituito da un cilindro di vetro contenente un liquido la cui densità aumenta sensibilmente al decrescere della temperatura. All'interno del cilindro sono contenute delle ampolline di vetro contenenti del liquido colorato. Tali ampolline hanno densità medie differenti fra di loro e ad esse sono appese delle targhette su cui viene indicata la temperatura.

Spiegazione

Quando il dispositivo ha raggiunto l'equilibrio termico con l'ambiente esterno, si può leggere la temperatura osservando il numero riportato sulla più bassa fra le ampolline rimaste a galla. Se l'ambiente esterno si trova a temperatura molto bassa, il liquido all'interno del cilindro risulta avere una densità maggiore di quella di qualsiasi ampollina, e quindi rimarranno tutte a galla. Al contrario ad alte temperature andranno tutte a fondo.

A temperature intermedie cadranno sul fondo solo le ampolline con densità superiore a quella del liquido: quella che si trova al livello più basso fra quelle galleggianti avrà densità appena inferiore a quella del liquido e quindi ne indicherà approssimativamente la temperatura.

Ci si può chiedere **perchè** le ampolline non cambino densità, in quanto la temperatura cambia anche per loro. La risposta è molto semplice: il vetro di cui è costituito il loro "guscio" si dilata e si contrae in modo del tutto trascurabile per queste variazioni di temperatura (il termometro lavora con temperature vicine a quella ambiente). Risulta quindi che il volume delle ampolline può essere considerato sempre costante e quindi anche la loro densità.

Supponiamo che il tubo del termometro di Galileo sia riempito con alcool etilico, la cui densità è **0.78945 g/cm³** a **20.0 °C** e decresca a **0.78097 g/cm³** a **30.0 °C**.

- a)** Se una delle sfere ha raggio **1.000 cm** ed è in equilibrio galleggiando nel mezzo del tubo a **20.0 °C**, determinarne la massa.
- b)** Quando la temperatura aumenta a **30.0 °C**, quale massa deve avere una seconda sfera dello stesso raggio per essere in equilibrio nel punto di mezzo?
- c)** A **30.0 °C** la prima sfera è caduta sul fondo del tubo. Quale forza verso l'alto esercita il fondo del tubo su questa sfera ?

- (a) Since the upward buoyant force is balanced by the weight of the sphere,

$$m_1 g = \rho V g = \rho \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) g$$

In this problem, $\rho = 0.78945 \text{ g/cm}^3$ at 20.0°C , and $R = 1.00 \text{ cm}$ so we find:

$$m_1 = \rho \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = (0.78945 \text{ g/cm}^3) \left[\frac{4}{3} \pi (1.00 \text{ cm})^3 \right] = \boxed{3.307 \text{ g}}$$

- (b) Following the same procedure as in part (a), with $\rho' = 0.78097 \text{ g/cm}^3$ at 30.0°C , we find:

$$m_2 = \rho' \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = (0.78097 \text{ g/cm}^3) \left[\frac{4}{3} \pi (1.00 \text{ cm})^3 \right] = \boxed{3.271 \text{ g}}$$

- (c) When the first sphere is resting on the bottom of the tube,

$$n + B = F_{g1} = m_1 g, \text{ where } n \text{ is the normal force.}$$

Since $B = \rho' V g$,

$$n = m_1 g - \rho' V g = \left[3.307 \text{ g} - (0.78097 \text{ g/cm}^3) (1.00 \text{ cm})^3 \right] 980 \text{ cm/s}^2$$

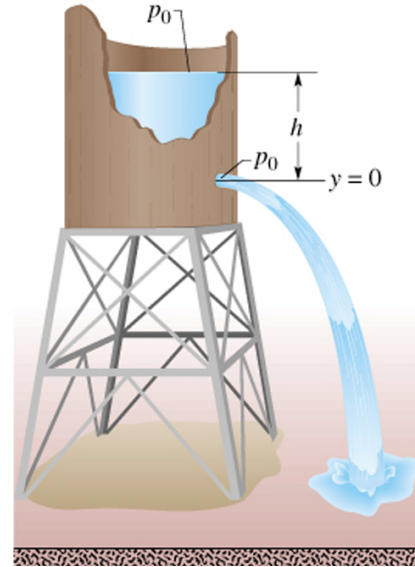
$$n = 34.8 \text{ g} \cdot \text{cm/s}^2 = \boxed{3.48 \times 10^{-4} \text{ N}}$$

Problemi: teorema di Bernoulli

8. Nel vecchio West un bandito spara una pallottola contro un serbatoio d'acqua aperto in alto, producendo un buco a distanza h al di sotto della superficie dell'acqua. A quale velocità sgorga l'acqua dal buco ?

idea chiave:

- acqua fluisce prima in tubo molto largo (serbatoio) verso il basso con velocità v_0 e sezione A . poi fluisce in tubo stretto (buco) orizzontalmente con velocità v e sezione a .
- applico equazione di continuità (portata volumica è uguale)
- applico il teorema di Bernoulli per legare v a v_0 .



$$Av_0 = av$$

$$v_0 = \frac{av}{A} \quad \text{se } a \ll A \text{ allora } v_0 \ll v$$

equazione di Bernoulli

$$\underbrace{p_0 + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_0^2} + \rho gh}_{\text{serbatoio}} = \underbrace{p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g(0)}_{\text{foro}}$$

N.B. il foro è il nostro livello di riferimento

trascuro i termini contenenti v_0

$$v = \sqrt{2gh}$$

L'acqua esce dal foro con la stessa velocità che avrebbe un oggetto cadendo da fermo da quota h !!!

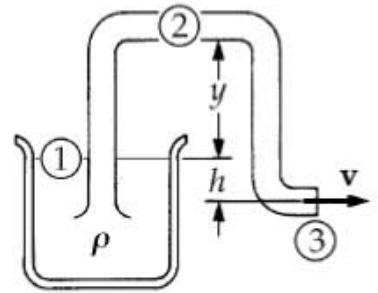
9. Per estrarre l'acqua da un serbatoio viene usato un sifone.

Il sifone ha un diametro costante d .

a) se $h = 1.00 \text{ m}$ determinare la velocità del flusso in uscita.

b) quale valore massimo può avere l'altezza rispetto alla superficie dell'acqua del punto più alto del sifone ?

[N.B. per avere un flusso continuo la pressione nel liquido non può essere inferiore a quella atmosferica]



a) Applico l'equazione di Bernoulli fra i livelli 1 e 3:

$$p_0 + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_1^2} + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g(0)$$

dato che il fluido è a riposo al livello 1.

Ricavo quindi v_3 :

$$v_3 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.8 \text{ m/s}^2)1.00\text{m}} = 4.43 \text{ m/s}$$

b) Applico l'equazione di Bernoulli fra i livelli 2 e 3:

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g(y+h) = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g(0)$$

dato che $v_2 = v_3$ (tubo a sezione costante, portata costante), si ottiene:

$$p_2 = p_0 - \rho gy - \rho gh$$

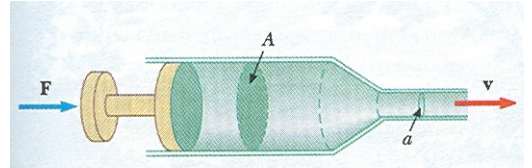
dato che $p_2 \geq 0$, deve essere

$$y \leq \frac{p_0}{\rho g} - h = \frac{1.013 \times 10^5 \text{ Pa}}{(10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)} - 1\text{m} = 10.3 \text{ m} - 1\text{m} = 9.3\text{m}$$

- 10.** Una siringa ipodermica contiene una medicina con densità pari a quella dell' acqua. La canna della siringa ha sezione $A = 2.50 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ mentre l' ago ha sezione $a = 1.00 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2$. In assenza di forza sul pistone la pressione è **1 atm**. Una forza $F = 2.00 \text{ N}$ agisce sul pistone, facendo sì che la medicina schizzi fuori orizzontalmente dall' ago. Determinare la velocità della medicina in uscita dall' ago.

Nella canna della siringa la pressione varia a seguito della applicazione della forza

$$\Delta p = \frac{F}{A} = \frac{2.00 \text{ N}}{2.50 \times 10^{-5} \text{ m}^2} = 8.00 \times 10^4 \text{ Pa}$$



dalla **equazione di continuità**

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$(2.50 \times 10^{-5} \text{ m}^2) v_1 = (1.00 \times 10^{-8} \text{ m}^2) v_2$$

$$v_1 = (4.00 \times 10^{-4}) v_2$$

cioè v_1 è trascurabile rispetto a v_2 .

Applico ora il **teorema di Bernoulli**:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$(p_1 - p_2) + 0 + 0 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + 0$$

$$8.00 \times 10^4 \text{ Pa} = \frac{1}{2} (1000 \text{ kg} / \text{m}^3) v_2^2$$

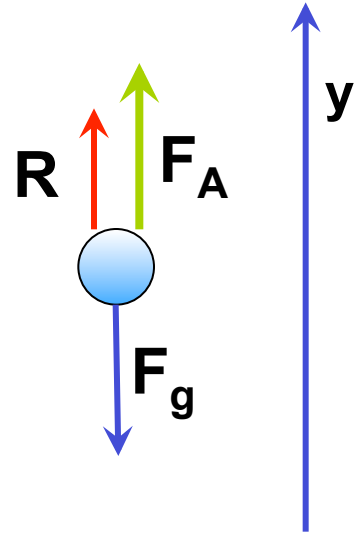
$$v_2 = \sqrt{\frac{2(8.00 \times 10^4 \text{ Pa})}{1000 \text{ kg} / \text{m}^3}} = 12.6 \text{ m} / \text{s}$$

Problemi: viscosità

- 11.** Si calcoli la velocità limite di una goccia di pioggia con raggio $r = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.
Si usi come coefficiente di viscosità dell'aria $\eta = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ N s/m}^2$, e come densità dell'aria $\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$.

idea chiave:

- sulla goccia agiscono le seguenti forze:
forza peso F_g ;
spinta archimedeica F_A ;
forza di attrito R .



In condizioni di regime, le forze si bilanciano e la velocità di caduta è costante (velocità limite):

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_g + \vec{F}_A + \vec{R} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$$-F_g + F_A + R = 0$$

Calcolo le forze una ad una:

$$F_g = mg = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{acqua} g$$

$$F_A = m_f g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{aria} g$$

$$R = bv = \gamma \eta v = 6 \pi r \eta v$$

quindi:

$$-\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{acqua} g + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{aria} g - 6 \pi r \eta v = 0$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{acqua} g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{aria} g}{6 \pi r \eta} = \frac{2(\rho_{acqua} - \rho_{aria}) r^2 g}{9 \eta} = \\ &= \frac{2(10^3 \text{ kg/m}^3 - 1.3 \text{ kg/m}^3)(0.5 \times 10^{-3} \text{ m})^2 (9.8 \text{ m/s}^2)}{9 \times 1.8 \times 10^{-5} \text{ N s/m}^2} \\ &= 30.2 \text{ m/s} = \frac{30.2 \times 10^{-3} \text{ km}}{1/3600 \text{ h}} \approx 109 \text{ km/h} \end{aligned}$$