

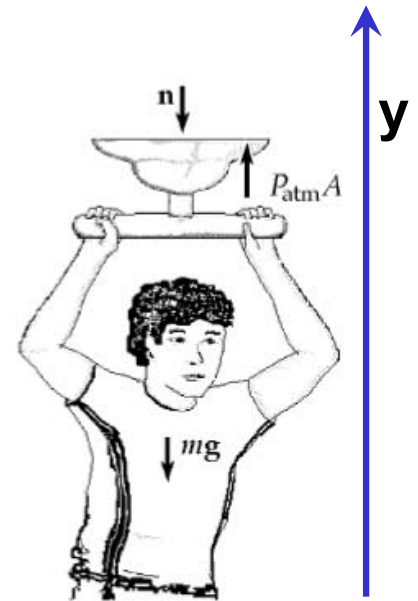
Problemi: meccanica dei fluidi

1. Calcolare l'area di contatto tra una ventosa completamente svuotata d'aria ed il soffitto, necessaria per sostenere il peso di una persona di **80.0 kg**.

idea chiave:

funzionamento di una ventosa:

- l'aria viene espulsa dalla ventosa quando essa viene premuta contro una superficie.
- quando viene rilasciata la ventosa torna indietro per un po', causando una diminuzione di pressione del gas intrappolato.
- differenza di pressione tra esterno ed interno ventosa causa una forza risultante che spinge la ventosa contro superficie.



La ventosa è tenuta in equilibrio dalle forze N , F_g , $F_{\text{pressione}}$.
Il vuoto fra ventosa e soffitto **NON** esercita alcuna forza.

$$\sum F_y = -N - mg + p_{atm} A = 0$$

Se la ventosa sostiene appena la persona, N è quasi nulla:

$$\sum F_y = 0 - mg + p_{atm} A = 0$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{mg}{p_{atm}} \\ &= \frac{(80.0 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2} \\ &= 7.74 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 7.74 \times 10^{-3} (10^2 \text{ cm})^2 = 77.4 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

2. Un inesperto sommozzatore in piscina, mentre si trova alla profondità L , si riempie i polmoni d'aria inspirando a fondo dalle sue bombole. Abbandona poi le bombole e risale in superficie senza espiare gradatamente l'aria. Arrivato a galla, la differenza fra la pressione interna nei suoi polmoni e la pressione esterna che preme su di lui è **9.3 kPa**.
- a) quale era la profondità L da cui era partito ?
b) a quale rischio mortale va incontro il sommozzatore ?

idea chiave:

i tessuti corporei sono sempre in equilibrio con l'esterno



- la pressione esterna dell'acqua a **profondità L** è pari al pressione all'interno dei polmoni

$$p = p_0 + \rho g L$$

ove

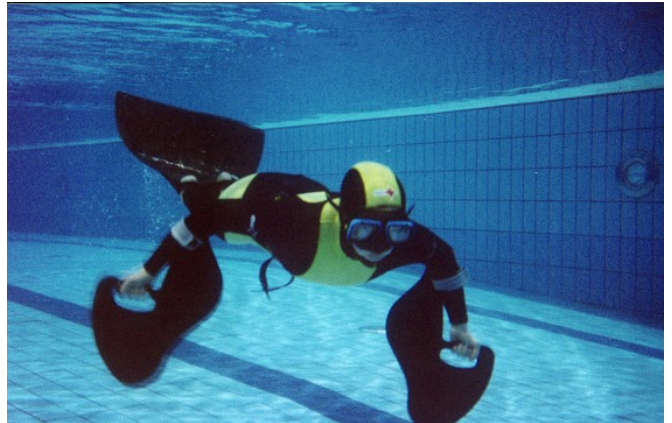
$p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ pressione atmosferica

$\rho = 998 \text{ kg/m}^3 \approx 10^3 \text{ kg/m}^3$ densità dell'acqua

- in superficie: $p = p_0$
e la differenza di pressione fra aria nei polmoni e esterno è:

$$\Delta p = p - p_0 = \rho g L \quad [\text{il sommozzatore } \textbf{NON} \text{ ha infatti espulso l'aria dai polmoni risalendo in superficie}]$$

$$L = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{9.3 \text{ kPa}}{(998 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)} = 0.95 \text{ m}$$



Anche a questa modesta profondità la differenza di pressione (9% pressione atmosferica) è sufficiente a rompere gli alveoli dei polmoni e a spingere l'aria dai polmoni nel sangue depressurizzato che la porta al cuore, causando la morte del sommozzatore **[embolia]**.

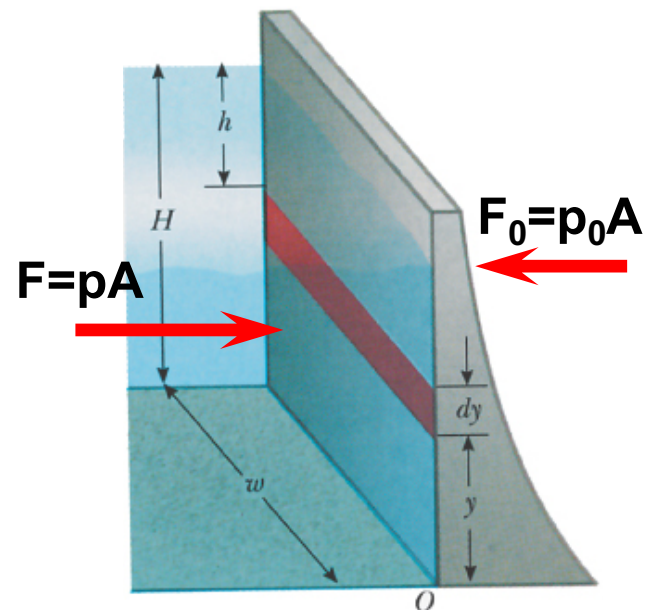
Espirando gradualmente l'aria in risalita, la pressione dei polmoni eguaglia la Pressione esterna, e quindi non si corre alcun pericolo.

3. Una diga di larghezza $w = 1200 \text{ m}$ è piena d'acqua fino all'altezza $H = 150 \text{ m}$. Calcolare la forza risultante sulla diga.

idea chiave:

- $F = p A$
- p varia con la profondità

⇒ calcolo forza dF agente su striscia dy a profondità h e poi integro su altezza totale H .



$$p = p_0 + \rho g h = p_0 + \rho g (H - y)$$

$$F = pA = p_0 A + \rho g (H - y) A = F_0 + \rho g (H - y) A$$

considero solo la **forza idrostatica** $\rho g (H - y) A$, dato che la forza F_0 dovuta alla pressione atmosferica è la medesima su ambo i lati della diga, dando un contributo nullo.

$$F = \rho g (H - y) A$$

$$dF = p dA = p w dy = \rho g (H - y) w dy$$

$$F = \int_0^H dF = \int_0^H \rho g (H - y) w dy = \frac{1}{2} \rho g w H^2$$

$$= \frac{1}{2} (998 \text{ kg} / \text{m}^3) (9.8 \text{ m} / \text{s}^2) (1200 \text{ m}) (150)^2 \text{ m}^2$$

$$= 1.32 \cdot 10^{11} \text{ N}$$

N.B. le dighe sono costruite in modo tale da **aumentare lo spessore con la profondità**, dato che p cresce con la profondità.

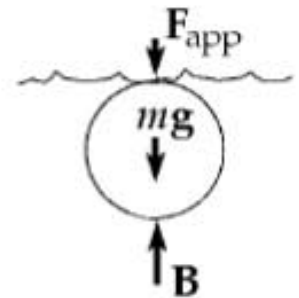
Problemi: spinta idrostatica

4. Una pallina da ping-pong ha un diametro di **3.80 cm** e una densità media di **0.084 g/cm³**. Quale forza è necessaria per tenerla completamente immersa in acqua?

All'equilibrio:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{app} + \vec{F}_g + \vec{F}_A = 0$$

$$F_{app} + mg - F_A = 0$$



ove F_A è la spinta idrostatica

$$F_A = V \rho_{acqua} g$$

$$F_{app} = -mg + F_A = -\rho_{palla} Vg + \rho_{acqua} Vg = \frac{4}{3} \pi R^3 g (\rho_{acqua} - \rho_{palla})$$

$$\begin{aligned} F_{app} &= \frac{4}{3} \pi (1.90 \times 10^{-2} m)^3 (9.80 m/s^2) (1000 kg/m^3 - 0.084 \frac{10^{-3} kg}{(10^{-2} cm)^3}) \\ &= 0.258 N \end{aligned}$$

Esempio 1 – Tema d'esame

Un cubo di lato $L = 20 \text{ cm}$ viene immerso in acqua. Il cubo galleggia con i $2/3$ del suo volume immerso. Si determinino:

- la densità ρ_C del materiale di cui è costituito il corpo;
- l'intensità F_{app} della forza che deve essere applicata dall'esterno per mantenere il corpo completamente immerso in acqua.

- a) Perché il corpo galleggi sull'acqua si deve avere equilibrio fra la forza peso F_g e la spinta di Archimede F_A

$$\vec{F}_g + \vec{F}_A = 0$$

Proiettando l'equazione vettoriale precedente su un asse y di riferimento, verticale ed orientato dal basso verso l'alto, si ottiene

$$-F_g + F_A = 0$$

Mentre la forza peso agisce su tutta la massa m del corpo, la spinta di Archimede agisce solo sulla massa m_f di fluido spostato

$$mg = m_f g$$

$$\rho_C V g = \rho_{H_2O} V_f g = \rho_{H_2O} \frac{2}{3} V g$$

da cui si ricava

$$\rho_C = \frac{2}{3} \rho_{H_2O} \approx \frac{2}{3} 10^3 \frac{kg}{m^3} = 667 \frac{kg}{m^3}$$

- b) Perché il corpo rimanga sommerso completamente in acqua è necessario applicare una forza F_{app} diretta verticalmente verso il basso tale che

$$\vec{F}_{app} + \vec{F}_g + \vec{F}_A = 0$$

$$-F_{app} - F_g + F_A = 0$$

da cui si ricava

$$F_{app} = F_A - F_g = m_f g - mg = (m_f - m) g$$

In questo caso la massa di fluido spostato corrisponde al volume occupato dall'intero corpo, ora completamente immerso:

$$\begin{aligned} F_{app} &= (m_f - m) g = (\rho_{H_2O} V - \rho_C V) g = (\rho_{H_2O} - \rho_C) V g \\ &= (\rho_{H_2O} - \frac{2}{3} \rho_{H_2O}) L^3 g = \frac{1}{3} \rho_{H_2O} L^3 g \\ &\approx \frac{1}{3} \times 10^3 \frac{kg}{m^3} \times (0.2m)^3 \times 9.8 \frac{m}{s^2} \approx 26 N \end{aligned}$$

Esempio 2 – Tema d'esame

Una sfera di raggio $R=15$ cm è composta da un nocciolo sferico (colore bianco in figura), di raggio $r=10$ cm, di densità D , e da un guscio sferico (colore nero), di densità $3D$. Calcolare per quale valore di D la sfera, posta in acqua, risulta immersa per il 35% del proprio volume.



Il peso dell'oggetto è dato da:

$$P = m_1 \cdot g + m_2 \cdot g \quad (\text{ricordando la relazione tra massa, volume e densità}) = D \cdot V_1 \cdot g + 3D \cdot V_2 \cdot g.$$

Il volume del nocciolo (1) è quello di una sfera di raggio r , quello del guscio (2) lo si trova sottraendo il volume del nocciolo da quello di una sfera di raggio R ; quindi il peso dell'oggetto risulta essere dato da:

$$P = \left(D \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 + 3 \cdot D \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (R^3 - r^3) \right) \cdot g.$$

In condizioni di equilibrio, questo peso deve essere bilanciato dalla spinta di Archimede, uguale al peso della massa di liquido equivalente al volume immerso (che è 0.35 volte il volume della sfera di raggio R):

$$P = \left(D \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 + 3 \cdot D \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (R^3 - r^3) \right) \cdot g = F_A = \rho_{H_2O} \cdot V_{imm} \cdot g = \rho_{H_2O} \cdot 0.35 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R^3 \cdot g$$

Risolvendo nell'incognita D si trova:

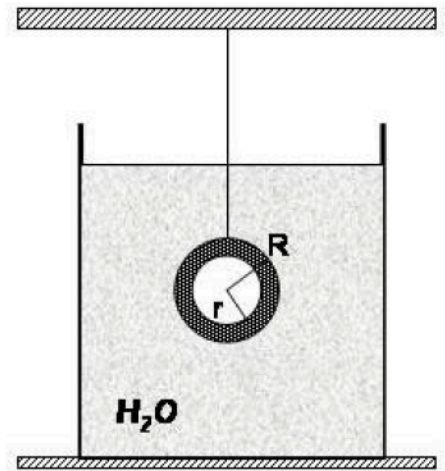
$$D = \frac{0.35 \cdot \rho_{H_2O} \cdot R^3}{3 \cdot R^3 - 2 \cdot r^3} = \frac{0.35 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (0.15\text{m})^3}{3 \cdot (0.15\text{m})^3 - 2 \cdot (0.10\text{m})^3} = 145.4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Esempio 3 – Tema d'esame

Una sferetta metallica, di densità $\rho = 3 \text{ g/cm}^3$ e raggio esterno $R = 12 \text{ cm}$, ha al suo interno una cavità sferica, in cui c'è il vuoto, di raggio $r = 4 \text{ cm}$. Viene appesa ad una fune e totalmente immersa in acqua.

Si calcoli:

- a) La **spinta archimedeana** agente sulla sferetta;
- b) la **tensione T** del filo.



- a) La spinta archimedeana F_A è pari al peso di fluido spostato (ossia acqua, di densità $\rho_{H_2O} = 10^3 \text{ kg/m}^3$):

$$F_A = m_{H_2O} g = \rho_{H_2O} V g = \rho_{H_2O} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) g = (10^3 \text{ kg/m}^3) \left(\frac{4}{3} \pi \times (0.12 \text{ m})^3 \right) (9.8 \text{ m/s}^2) = 70.9 \text{ N}$$

- b) All'equilibrio, la forza netta agente sulla sfera è nulla:

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_g + \vec{F}_A + T = 0$$

Proietto tale equazioni sull'asse y :

$$-F_g + F_A + T = 0$$

da cui si ricava la tensione T :

$$T = F_g - F_A$$

Dato che la forza peso F_g vale:

$$F_g = mg = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3) \rho g = \frac{4}{3} \pi ((0.12 \text{ m})^3 - (0.04 \text{ m})^3) (3 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}) (9.8 \text{ m/s}^2) = 204.9 \text{ N}$$

$$T = F_g - F_A = 204.9 \text{ N} - 70.9 \text{ N} \approx 134 \text{ N}$$

Esempio 4 – Tema d'esame

Un corpo sferico di raggio $R = 0.1 \text{ m}$ contiene al suo interno una cavità vuota, di forma irregolare, pari ad $1/3$ del suo volume. Il corpo completamente immerso in acqua si trova all'equilibrio.

- a) Calcolare la spinta di Archimede e la densità del corpo;
b) Supponendo ora la densità del corpo pari alla densità dell'acqua, determinare modulo, direzione e verso della forza F_{app} che si deve applicare per mantenere il corpo completamente immerso in acqua.
c) **FACOLTATIVO:** supponendo il corpo immerso a profondità $d_0 = 20 \text{ m}$ dal pelo dell'acqua, calcolare la posizione e la velocità del corpo dopo un tempo pari a 2 s , da quando viene lasciato libero.

- a) La spinta di Archimede agisce sul volume di fluido spostato, ossia sul volume di corpo immerso, mentre la forza peso agisce sulla massa del corpo (che in questo caso occupa solo $2/3$ del volume totale)

$$\begin{aligned}F_A &= m_f g = \rho_f V g = \rho_f \frac{4}{3} \pi R^3 g \\&= 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times \frac{4}{3} \times \pi \times (10^{-1})^3 \text{ m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \\&\approx 41 \text{ N}\end{aligned}$$

La densità del corpo si ricava dalla condizione di equilibrio:

$$F_A = F_g = mg$$

$$\rho_f V g = \rho_c (V - \frac{1}{3} V) g = \rho_c \frac{2}{3} V g$$

$$\rho_c = \frac{3}{2} \rho_f = \frac{3}{2} \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1.5 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

- b) Nel caso in cui $\rho_c = \rho_f$ la forza F_{app} che garantisce la condizione di equilibrio deve soddisfare la relazione:

$$\vec{F}_{app} + \vec{F}_A + \vec{F}_g = 0$$

$$-F_{app} + F_A - F_g = 0$$

$$F_{app} = F_A - F_g$$

$$\begin{aligned}F_{app} &= \rho_f V g - \rho_f \frac{2V}{3} g \\&= \frac{1}{3} V \rho_f g \\&= \frac{1}{3} \times \frac{4}{3} \pi R^3 \times \rho_f \times g \\&= \frac{1}{3} \times \frac{4}{3} \pi \times (10^{-1})^3 \text{ m}^3 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \approx 13.7 \text{ N}\end{aligned}$$

La forza F_{app} è diretta verticalmente verso il basso con intensità 13.7 N .

- c) Il corpo lasciato libero risente di una accelerazione a verso l'alto tale che:

$$m\vec{a} = \vec{F}_A + \vec{F}_g$$

$$ma = F_A - F_g$$

$$a = (F_A - F_g) / m = \frac{1}{3} V \rho_f g / (\rho_f \frac{2}{3} V) = g / 2 = 4.9 \text{ m/s}^2$$

Lo spazio percorso è quindi $d = \frac{1}{2} g t^2 = 9.8 \text{ m}$, da cui segue che la posizione finale è $d_0 - d = 10.2 \text{ m}$. La velocità è pari a $v = a t = g/2 t = 9.8 \text{ m/s}$.

Esempio 5 – Tema d'esame

Un cubo di ghiaccio di lato $s = 20.0 \text{ mm}$ galleggia in un bicchiere di acqua fredda con una delle facce parallele alla superficie dell'acqua.

- a) A quale distanza dalla superficie dell'acqua si trova la faccia inferiore del cubo?
- b) Dell'alcool etilico alla stessa temperatura viene versato lentamente sulla superficie dell'acqua fino a formare uno strato di 5.00 mm al di sopra del pelo dell'acqua. Quando il cubo di ghiaccio è nuovamente in equilibrio idrostatico, quale sarà la distanza fra la superficie dell'acqua e la faccia inferiore del cubo ?

[N.B. $\rho_{\text{ghiaccio}} = 0.917 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{\text{alcool}} = 0.806 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$]

- a) Indico con s il lato del cubo e con h la distanza della faccia inferiore del cubo alla superficie dell'acqua.

Dall'equilibrio delle forze di ha:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{net}} &= \vec{F}_g + \vec{F}_A = 0 \\ -m_{\text{ghiaccio}}g + m_{\text{acqua}}g &= 0 \\ -\rho_{\text{ghiaccio}}s^3g + \rho_{\text{acqua}}s^2hg &= 0 \\ h &= \frac{\rho_{\text{ghiaccio}}s^3g}{\rho_{\text{acqua}}s^2g} = \frac{\rho_{\text{ghiaccio}}}{\rho_{\text{acqua}}}s \\ &= \frac{0.917 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}{1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3} 20.0 \text{ mm} = 18.34 \text{ mm}\end{aligned}$$

- b) Indico con h_{alcool} lo spessore dello strato di alcool, e suppongo che il cubo di ghiaccio emerga sempre dal liquido.

Dall'equilibrio delle forze di ha:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{net}} &= \vec{F}_g + (\vec{F}_A)_{\text{acqua}} + (\vec{F}_A)_{\text{alcool}} = 0 \\ -m_{\text{ghiaccio}}g + m_{\text{acqua}}g + m_{\text{alcool}}g &= 0 \\ -\rho_{\text{ghiaccio}}s^3g + \rho_{\text{acqua}}s^2h_{\text{acqua}}g + \rho_{\text{alcool}}s^2h_{\text{alcool}}g &= 0 \\ h_{\text{acqua}} &= \frac{\rho_{\text{ghiaccio}}s^3g - \rho_{\text{alcool}}s^2h_{\text{alcool}}g}{\rho_{\text{acqua}}s^2g} = \frac{\rho_{\text{ghiaccio}}}{\rho_{\text{acqua}}}s - \frac{\rho_{\text{alcool}}}{\rho_{\text{acqua}}}h_{\text{alcool}} \\ &= \frac{0.917 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}{1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3} 20.0 \text{ mm} - \frac{0.806 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}{1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3} 5.00 \text{ mm} = 14.31 \text{ mm}\end{aligned}$$

Esempio 6 – Tema d'esame

zattera

Una zattera vuota, lunga 2 metri, larga 1.5 m e alta 30 cm, galleggia sulla superficie di un lago con il 45% del proprio volume emergente dall'acqua.

Calcolare:

a) la densità della zattera;

b) il numero massimo di lingotti di piombo che tale zattera potrebbe trasportare senza che la superficie della zattera finisca sotto il pelo dell'acqua. Cosa succederebbe se fosse caricato sulla zattera un egual numero di lingotti d'oro?

(Nota: dimensione di un lingotto: 10 cm x 20 cm x 5 cm; ρ_{Pb} : 11340 kg/m³; ρ_{Au} : 19320 kg/m³).

- a) La densità della zattera si ricava considerando che, per l'effetto della spinta di Archimede, la frazione di corpo immersa risulta essere pari al rapporto tra la densità del corpo stesso e la densità del fluido in cui il corpo è immerso. In questo caso la frazione di zattera **immersa** è pari a 0.55, da cui discende che:

$$\frac{\rho_{\text{zattera}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} = 0.55 \Rightarrow \rho_{\text{zattera}} = 0.55 \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} = 0.55 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 550 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

- b) Quando carichiamo sulla zattera i lingotti di Pb, il peso della zattera e dei lingotti viene equilibrato dalla spinta di Archimede:

$$m_{\text{zattera}} \cdot g + n_{\text{lingotti}} \cdot m_{\text{lingotto}} \cdot g = F_{\text{Arch.}} = V_{\text{immerso}} \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g$$

La situazione richiesta nel problema (che la superficie della zattera non vada sott'acqua) corrisponde al caso in cui il volume immerso è tutto e solo il volume della zattera.

Ricordando inoltre che

$$V_{\text{zattera}} = 2 \text{ m} \cdot 1.5 \text{ m} \cdot 0.3 \text{ m} = 0.9 \text{ m}^3$$

$$m_{\text{zattera}} = V_{\text{zattera}} \cdot \rho_{\text{zattera}} = 0.9 \text{ m}^3 \cdot 550 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 495 \text{ kg}$$

$$m_{\text{lingotto}} = V_{\text{lingotto}} \cdot \rho_{\text{lingotto}} = 0.1 \text{ m} \cdot 0.2 \text{ m} \cdot 0.05 \text{ m} \cdot 11340 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 11.34 \text{ kg}$$

si ricava che il massimo numero di lingotti che la zattera può trasportare senza che la sua superficie finisca sotto il pelo dell'acqua è pari a

$$n_{\text{lingotti}} = \frac{V_{\text{zattera}} \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} - m_{\text{zattera}}}{m_{\text{lingotto}}} = \frac{0.9 \text{ m}^3 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 495 \text{ kg}}{11.34 \text{ kg}} = 35.71$$

Il numero di lingotti deve essere un numero intero, quindi la risposta esatta a questo quesito è 35 (e non 36). In questo caso si deve sempre approssimare per difetto. Se si mettessero 36 lingotti sulla zattera, infatti, la superficie della stessa andrebbe sott'acqua, e non verrebbero rispettate le condizioni del problema. Siccome l'oro ha una densità molto maggiore del Pb, ci si aspetta che mettere 35 lingotti d'oro sulla zattera ne determini l'affondamento sott'acqua: il peso dei lingotti più quello della zattera (11478 N) è infatti superiore alla spinta di Archimede sulla sola zattera (8820 N).

Misura della densità del corpo

Una persona che pesa 720,0 N in aria, viene immersa in una vasca d'acqua fino al mento. È seduta in una imbragatura di massa trascurabile appesa a una bilancia che misura il suo peso apparente. Espira tutta l'aria che può e mette la testa sott'acqua, immergendo così il corpo intero. Se il suo peso apparente mentre è sommersa è 34,3 N, trova:

- il suo volume;
- la sua densità.

Descrizione

La bilancia, la vasca d'acqua e la persona sono mostrate nella figura. È mostrato anche lo schema del corpo libero per la persona. Osserviamo che il peso della persona in aria è indicato con $W = mg$ e il peso apparente in acqua, che corrisponde alla forza verso l'alto esercitata sulla persona dalla bilancia, è indicato con W_a .

Strategia

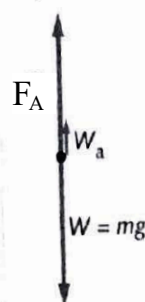
Per trovare il volume V_p e la densità ρ_p della persona, dobbiamo utilizzare due condizioni separate:

- in acqua la persona risente della forza verso l'alto data dal principio di Archimede: $F_A = \rho_{\text{acqua}} V_p g$;
- il peso della persona in aria è $W = mg = \rho_p V_p g$. Combinando queste due relazioni possiamo ricavare V_p e ρ_p .

Rappresentazione fisica



Schema del corpo libero



Soluzione

- Applichiamo la seconda legge di Newton alla persona e ricaviamo il peso apparente W_a

$$W_a + F_A - W = 0$$

$$W_a = W - F_A$$

$$W_a = W - \rho_{\text{acqua}} V_p g$$

$$V_p = \frac{W - W_a}{\rho_{\text{acqua}} g} = \frac{720,0 \text{ N} - 34,3 \text{ N}}{(1000 \text{ kg/m}^3)(9,81 \text{ m/s}^2)} = 6,99 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$$

- Sostituiamo $F_A = \rho_{\text{acqua}} V_p g$ e ricaviamo

- Utilizziamo $W = \rho_p V_p g$ per ricavare la densità ρ_p della persona

$$W = \rho_p V_p g$$

$$\rho_p = \frac{W}{V_p g} = \frac{720,0 \text{ N}}{(6,99 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3)(9,81 \text{ m/s}^2)} = 1050 \text{ kg/m}^3$$

F_A = Spinta di Archimede
 W = Forza peso (in aria) = mg
 W_a = Forza peso apparente (misurata dalla bilancia quando il corpo è in acqua)

Metodo per determinare volume e densità di corpi di forma irregolare o complessa

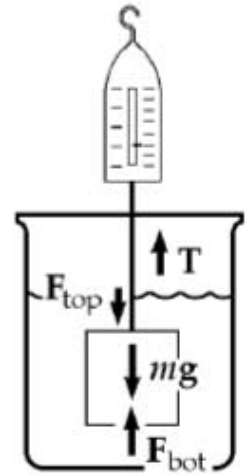
(→ aneddoto di Archimede e corona d'oro del Tiranno di Siracusa)

5. Un blocco di metallo di **10 kg** e di dimensioni **12.0 cm x 10.0 cm x 10.0 cm** è sospeso ad una bilancia a molla ed immerso in acqua. La dimensione di **12.0 cm** è verticale e la parte superiore del blocco è a **5.0 cm** sotto il pelo dell'acqua.

a) quali sono le forze agenti alla sommità e sul fondo del blocco?

b) quale è la lettura sulla scala graduata della molla?

c) mostrare che la forza di Archimede è pari alla differenza fra le forze alla sommità e sul fondo del blocco.



a) $p = p_0 + \rho gh$

sulla sommità del cubo:

$$h = 5.0 \text{ cm}$$

$$p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$p_{top} = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2 + (998 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(5.0 \times 10^{-2} \text{ m})$$

$$= 1.0179 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$F_{top} = p_{tot} A = (1.0179 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(10.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2 = 1.0179 \times 10^3 \text{ N}$$

alla base del cubo:

$$h = (5.0 + 12.0) \text{ cm} = 17.0 \text{ cm}$$

$$p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$p_{bottom} = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2 + (998 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(17.0 \times 10^{-2} \text{ m})$$

$$= 1.0297 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$F_{bottom} = p_{bottom} A = (1.0297 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(10.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2 = 1.0297 \times 10^3 \text{ N}$$

b) sulla scala graduata si legge la tensione **T** del filo:

$$\sum F_y = T - mg + F_A = 0$$

$$F_A = \rho_{acqua} V g = (10^3 \text{ kg/m}^3)(12 \times 10 \times 10 \times 10^{-6} \text{ m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2) = 11.8 \text{ N}$$

$$mg = (10 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 98 \text{ N}$$

$$T = mg - F_A = (98.0 - 11.8) \text{ N} = 86.2 \text{ N}$$

N.B. $T < mg$

c) $F_{top} - F_{bottom} = (1.0179 - 1.0297) \times 10^3 \text{ N} = 11.8 \text{ N} = F_A$

6. Una molla leggera di costante $k = 90.0 \text{ N/m}$ è ferma verticalmente su un tavolo. Un pallone di 2.00 g è riempito di elio per un volume di 5.00 m^3 ed è collegato alla molla, causandone un allungamento. Determinare la lunghezza di espansione L quando il pallone è in equilibrio.

All'equilibrio:

$$\sum F_y = 0$$

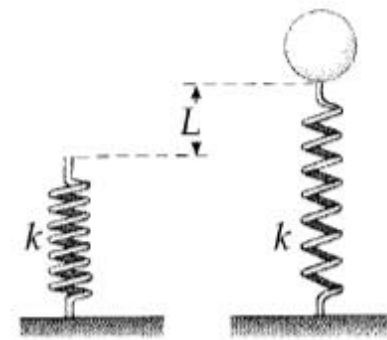
$$F_A - F_{molla} - F_{g,He} - F_{g,pallone} = 0$$

$$F_{molla} = kL$$

$$F_A = \rho_{aria} Vg$$

$$F_{g,He} = \rho_{He} Vg$$

$$F_{g,pallone} = m_{pallone} g$$



$$F_{molla} = kL = F_A - F_{g,He} - F_{g,pallone}$$

$$kL = \rho_{aria} Vg - \rho_{He} Vg - m_{pallone} g$$

$$L = \frac{(\rho_{aria} - \rho_{He})V - m_{pallone}}{k} g$$

$$= \frac{(1.29 \text{ kg/m}^3 - 0.180 \text{ kg/m}^3) 5.00 \text{ m}^3 - 2.00 \times 10^{-3} \text{ kg}}{90.0 \text{ N/m}} (9.80 \text{ m/s}^2)$$

$$= 0.604 \text{ m}$$

7. Termometro di Galileo



Descrizione

Il dispositivo è costituito da un cilindro di vetro contenente un liquido la cui densità aumenta sensibilmente al decrescere della temperatura. All'interno del cilindro sono contenute delle ampolline di vetro contenenti del liquido colorato. Tali ampolline hanno densità medie differenti fra di loro e ad esse sono appese delle targhette su cui viene indicata la temperatura.

Spiegazione

Quando il dispositivo ha raggiunto l'equilibrio termico con l'ambiente esterno, si può leggere la temperatura osservando il numero riportato sulla più bassa fra le ampolline rimaste a galla. Se l'ambiente esterno si trova a temperatura molto bassa, il liquido all'interno del cilindro risulta avere una densità maggiore di quella di qualsiasi ampollina, e quindi rimarranno tutte a galla. Al contrario ad alte temperature andranno tutte a fondo.

A temperature intermedie cadranno sul fondo solo le ampolline con densità superiore a quella del liquido: quella che si trova al livello più basso fra quelle galleggianti avrà densità appena inferiore a quella del liquido e quindi ne indicherà approssimativamente la temperatura.

Ci si può chiedere **perchè** le ampolline non cambino densità, in quanto la temperatura cambia anche per loro. La risposta è molto semplice: il vetro di cui è costituito il loro "guscio" si dilata e si contrae in modo del tutto trascurabile per queste variazioni di temperatura (il termometro lavora con temperature vicine a quella ambiente) . Risulta quindi che il volume delle ampolline può essere considerato sempre costante e quindi anche la loro densità.

Supponiamo che il tubo del termometro di Galileo sia riempito con alcool etilico, la cui densità è **0.78945 g/cm³** a **20.0 °C** e decresca a **0.78097 g/cm³** a **30.0 °C**.

- a)** Se una delle sfere ha raggio **1.000 cm** ed è in equilibrio galleggiando nel mezzo del tubo a **20.0 °C**, determinarne la massa.
- b)** Quando la temperatura aumenta a **30.0 °C**, quale massa deve avere una seconda sfera dello stesso raggio per essere in equilibrio nel punto di mezzo?
- c)** A **30.0 °C** la prima sfera è caduta sul fondo del tubo. Quale forza verso l'alto esercita il fondo del tubo su questa sfera ?

- (a) Since the upward buoyant force is balanced by the weight of the sphere,

$$m_1 g = \rho V g = \rho \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) g$$

In this problem, $\rho = 0.78945 \text{ g/cm}^3$ at 20.0°C , and $R = 1.00 \text{ cm}$ so we find:

$$m_1 = \rho \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \left(0.78945 \text{ g/cm}^3 \right) \left[\frac{4}{3} \pi (1.00 \text{ cm})^3 \right] = \boxed{3.307 \text{ g}}$$

- (b) Following the same procedure as in part (a), with $\rho' = 0.78097 \text{ g/cm}^3$ at 30.0°C , we find:

$$m_2 = \rho' \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \left(0.78097 \text{ g/cm}^3 \right) \left[\frac{4}{3} \pi (1.00 \text{ cm})^3 \right] = \boxed{3.271 \text{ g}}$$

- (c) When the first sphere is resting on the bottom of the tube,

$$n + B = F_{g1} = m_1 g, \text{ where } n \text{ is the normal force.}$$

Since $B = \rho' V g$,

$$n = m_1 g - \rho' V g = \left[3.307 \text{ g} - \left(0.78097 \text{ g/cm}^3 \right) (1.00 \text{ cm})^3 \right] 980 \text{ cm/s}^2$$

$$n = 34.8 \text{ g} \cdot \text{cm/s}^2 = \boxed{3.48 \times 10^{-4} \text{ N}}$$

Problemi: teorema di Bernoulli

8. Nel vecchio West un bandito spara una pallottola contro un serbatoio d'acqua aperto in alto, producendo un buco a distanza h al di sotto della superficie dell'acqua. A quale velocità sgorga l'acqua dal buco ?

idea chiave:

- acqua fluisce prima in tubo molto largo (serbatoio) verso il basso con velocità v_0 e sezione A . poi fluisce in tubo stretto (buco) orizzontalmente con velocità v e sezione a .
- applico equazione di continuità (portata volumica è uguale)
- applico il teorema di Bernoulli per legare v a v_0 .

$$Av_0 = av$$

$$v_0 = \frac{av}{A} \quad \text{se } a \ll A \text{ allora } v_0 \ll v$$

equazione di Bernoulli

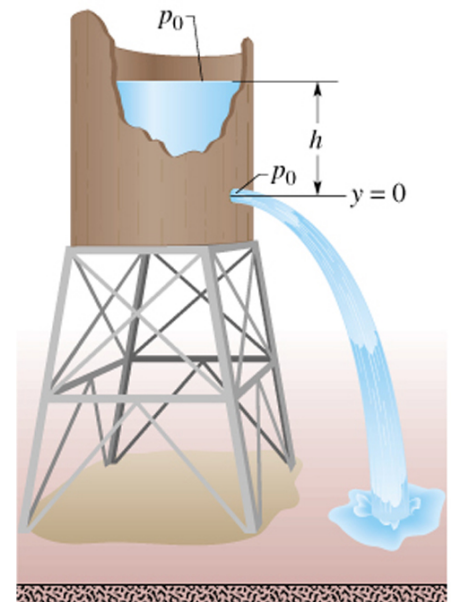
$$\underbrace{p_0 + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_0^2} + \rho gh}_{\text{serbatoio}} = \underbrace{p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g(0)}_{\text{foro}}$$

N.B. il foro è il nostro livello di riferimento

trascuro i termini contenenti v_0

$$v = \sqrt{2gh}$$

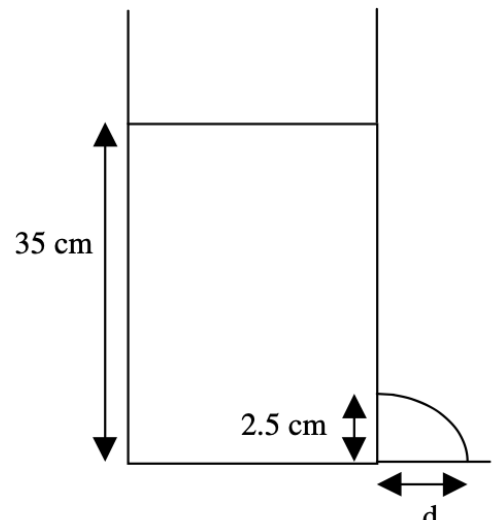
L'acqua esce dal foro con la stessa velocità che avrebbe un oggetto cadendo da fermo da quota h !!!



Esempio – Tema d'esame

Un recipiente cilindrico, aperto superiormente, ha raggio di base pari a 20 cm, ed è riempito con acqua fino ad un'altezza di 35 cm. A 2.5 cm dal fondo del recipiente viene praticato un minuscolo foro dal quale il liquido può fuoriuscire. Considerando trascurabile la variazione del livello della superficie libera, calcolare la velocità con cui il liquido esce dal foro, e la distanza d dal recipiente a cui il liquido tocca terra.

FACOLTATIVO: Calcolare la massa di mercurio ($\rho_{\text{Hg}} = 13.6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) che sarebbe necessario introdurre nel recipiente, al posto dell'acqua, affinché il mercurio che fuoriesce dal foro cada alla stessa distanza d dal recipiente.



Il teorema di Bernoulli afferma che, per un fluido ideale, (non viscoso e incompressibile) in moto con un flusso stazionario e irrotazionale, vale la seguente legge:

$$\frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h + p = \text{costante}$$

Nel caso in esame, è possibile applicare tale equazione riferendola a due punti di riferimento ben precisi: il punto A, in corrispondenza della superficie libera del fluido, e il punto B, in corrispondenza del minuscolo foro praticato. Sia in A che in B la pressione è pari alla pressione atmosferica (entrambi i punti sono in comunicazione con l'ambiente esterno). Inoltre, dato che il foro praticato è minuscolo e di conseguenza la variazione del livello della superficie libera può essere considerata trascurabile, la velocità in A risulta analogamente trascurabile e quindi considerata uguale a 0. Quindi, uguagliando le due espressioni riferite ai punti A e B abbiamo:

$$\frac{1}{2} \rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A + p_A = \frac{1}{2} \rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B + p_B$$

$$\rho \cdot g \cdot h_A + p_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B + p_{\text{ext}}$$

$$v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_A - h_B)} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (0.35 \text{ m} - 0.025 \text{ m})} = 2.52 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Il liquido quindi esce dal foro con una velocità iniziale di 2.52 m/s diretta lungo l'asse x , ed è soggetto alla forza di gravità, cosicché il suo moto può essere descritto come una composizione di un moto rettilineo uniforme lungo x e di un moto uniformemente accelerato lungo y . Scegliendo come verso positivo dell'asse y quello diretto verso l'alto, possiamo scrivere:

$$x(t) = x_0 + v_x \cdot t$$

$$y(t) = h_B - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Il fluido tocca evidentemente terra quando $y(t) = 0$. Possiamo quindi andare a ricavare t da questa seconda equazione e sostituire nella prima, per trovare lo spazio percorso lungo x :

$$y(t) = h_B - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h_B}{g}}$$

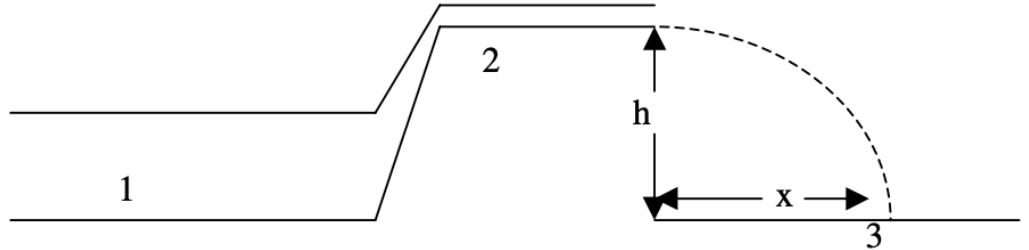
$$x(t) = x_0 + v_x \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h_B}{g}} \Rightarrow \Delta x = x(t) - x_0 = v_x \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h_B}{g}} = 2.52 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 0.025 \text{ m}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0.18 \text{ m}$$

Esempio – Tema d'esame

2. Un fluido, di densità pari a $548 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, scorre in un condotto con $v_1=3.5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ per effetto di una pressione forzata pari a 240 kPa. Il condotto, posto a terra, si alza fino ad un'altezza h di 5 metri, riducendo ad un quinto la propria sezione.

Trovare:

- Il valore della pressione nel punto dove il condotto è più stretto (2).
- La distanza x percorsa dal fluido in direzione orizzontale dall'istante in cui lascia il condotto a quando tocca terra nel punto 3.



Si applicano le due leggi della fluidodinamica:

Legge della portata: $v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2$

Equazione di Bernoulli: $\frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 + p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 + p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2$

Dalla prima equazione ricaviamo il valore di v_2 :

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{S_1}{S_2} = 3.5 \text{ m/s} \cdot 5 = 17.5 \text{ m/s}$$

e quindi, sostituendo nell'equazione di Bernoulli, troviamo p_2 :

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 + p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 - \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 - \rho \cdot g \cdot h_2 = p_1 + \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2) + \frac{1}{2} \rho \cdot (v_1^2 - v_2^2) = \\ &= 240000 \text{ N/m}^2 + 548 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot (-5 \text{ m}) + \frac{1}{2} 548 \text{ kg/m}^3 \cdot [(3.5 \text{ m})^2 - (17.5 \text{ m})^2] = \\ &= 132592 \text{ N/m}^2 = 133 \text{ kPa} \end{aligned}$$

Il getto di fluido lascerà quindi il condotto con velocità v_2 diretta lungo l'asse x , e sarà soggetto alla forza di gravità. Si muoverà quindi di moto rettilineo uniforme lungo x , e di moto uniformemente accelerato lungo y :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \end{cases}$$

con $x_0=0$, $v_{0x}=v_2=17.5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $y_0=5 \text{ m}$, $v_{0y}=0$, $a=-g=-9.8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

La distanza richiesta è quella percorsa nella direzione x mentre il liquido cade da $y_0=5 \text{ m}$ a $y=0$. Il tempo necessario a toccare terra si ricava dall'equazione su y :

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \text{ m}}{9.8 \text{ m/s}^2}} = 1.01 \text{ s}$$

e di conseguenza lo spazio x percorso è pari a:

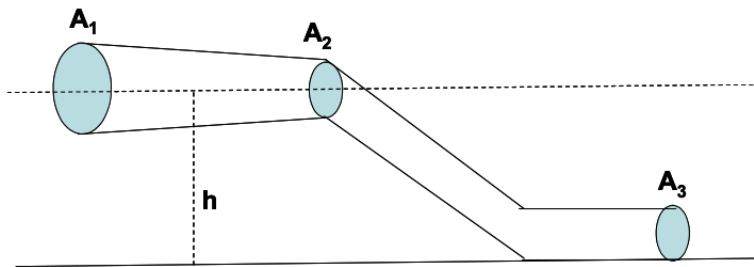
$$x(t=1.01 \text{ s}) = 0 + v_2 \cdot t = 17.5 \text{ m/s} \cdot 1.01 \text{ s} = 17.68 \text{ m}$$

Esempio – Tema d'esame

3) Nella condotta mostrata in figura scorre un fluido ideale con densità $\rho_f = 2 \text{ g/cm}^3$. Il tratto orizzontale si trova a quota $h = 70 \text{ cm}$ ed ha sezione variabile, con $A_1 = 2 A_2$. Nel tratto successivo la condotta ha sezione costante ($A_3 = A_2$) e si abbassa fino a quota 0. Sapendo che la velocità del fluido in corrispondenza alla sezione A_1 è pari a $v_1 = 5 \text{ m/s}$, determinare:

a) le velocità v_2 e v_3 in corrispondenza alle sezioni A_2 ed A_3 ;

b) le differenze di pressione $\Delta p_{12} = p_1 - p_2$ e $\Delta p_{23} = p_2 - p_3$ ove p_1 , p_2 e p_3 sono le pressioni in corrispondenza alle sezioni A_1 , A_2 ed A_3 .



a) In base all'equazione di continuità la portata della condotta è costante in corrispondenza a tutte le sezioni

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = A_3 v_3$$

da cui si ricava:

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{2A_2}{A_2} v_1 = 2v_1 = 10 \text{ m/s}$$

$$v_3 = \frac{A_2}{A_3} v_2 = v_2 = 10 \text{ m/s}$$

b) Le differenze di pressione possono essere ricavate applicando il teorema di Bernoulli:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{costante}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta p_{12} &= p_1 - p_2 \\ &= \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \rho (4v_1^2 - v_1^2) \\ &= \frac{3}{2} \rho v_1^2 \\ &= \frac{3}{2} \times 2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 25 \text{ m}^2/\text{s}^2 \\ &= +75 \times 10^3 \text{ Pa} \end{aligned}$$

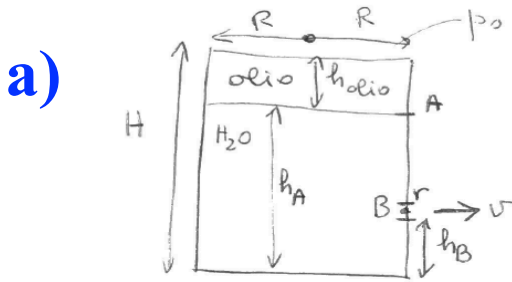
$$\begin{aligned} \Delta p_{23} &= p_2 - p_3 \\ &= \rho g (h_3 - h_2) \\ &= 2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times (0 - 0.7 \text{ m}) \\ &= -13.72 \times 10^3 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Esempio – Tema d'esame

2) Una cisterna cilindrica di altezza $H = 1 \text{ m}$ e raggio $R = 1 \text{ m}$ contiene acqua, fino ad un'altezza di **80 cm** sopra cui galleggia uno **strato di olio** (**densità 0.8 g/cm^3**) di **20 cm** ed è aperta in aria. Sulla parete laterale della cisterna è presente un foro circolare di raggio $r = 0,5 \text{ cm}$ ad un'altezza $h = 20 \text{ cm}$ dal suolo, chiuso da un tappo. Si calcoli:

a) la **velocità**, in modulo direzione e verso, dello zampillo d'acqua all'uscita dal foro, qualora venga tolto il tappo .

b) il tempo impiegato a riempire un contenitore che ha volume 250 ml.



$$h_A = 0.8 \text{ m}$$

$$h_B = 0.2 \text{ m}$$

$$h_{oljo} = 0.2 \text{ m}$$

$$\rho_A = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{olio}} = 0.8 \text{ g/cm}^3$$

$$= 0.8 \cdot 10^{-3} / 10^{-6} \text{ kg/m}^3$$

$$= 0.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$1 \text{ litro} = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\begin{aligned} (P_A + \rho_A g h_A + \cancel{\frac{1}{2} \rho_A v_A^2}) &= (P_B + \rho_A \cdot g h_B + \cancel{\frac{1}{2} \rho_A v_B^2}) \\ \downarrow & \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ P_A &= P_0 + \rho_{\text{olio}} g h_{\text{olio}} \end{aligned}$$

$$\pi R^2 v_A^2 = \pi r^2 v_B^2 \quad \text{eq. continuity}$$

$$v_B^2 = \frac{R^2}{f^2} v_A^2 \gg v_A^2 \Rightarrow v_A \text{ trascurabile}$$

$$\frac{1}{2} \rho_A v_B^2 = \rho_A g (h_A - h_B) + \rho_{\text{olio}} g h_{\text{olio}}$$

$$v_B = \sqrt{2g(h_A - h_B + \frac{\rho_{oil}}{\rho_A} h_{oil})}$$

$$= \sqrt{2 \times 9.8 \frac{m}{s^2} (0.6m + 0.8 \times 0.2m)} \approx 3.9 m/s$$

b) $Q = v \cdot A = \frac{[L]}{[T]} \cdot [L^2] = \frac{V_{\text{volume}}}{T} \left[\frac{m^3}{s} \right]$

portata
volumice

$$Q_B = v_B \cdot S_B = v_B \cdot (\pi r^2) = 3.9 \frac{\text{m}}{\text{s}} \pi (0.5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2$$

$$= 3.06 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 0.306 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$= 306 \text{ mels}$$

$$T = \frac{\text{Volume}}{Q_B} = \frac{250 \text{ ml}}{306 \frac{\text{ml}}{\text{s}}} = 0.82 \text{ s}$$

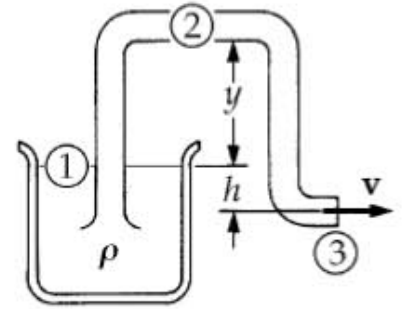
9. Per estrarre l'acqua da un serbatoio viene usato un sifone.

Il sifone ha un diametro costante d .

a) se $h = 1.00 \text{ m}$ determinare la velocità del flusso in uscita.

b) quale valore massimo può avere l'altezza rispetto alla superficie dell'acqua del punto più alto del sifone ?

[N.B. per avere un flusso continuo la pressione nel liquido non può essere inferiore a quella atmosferica]



a) Applico l'equazione di Bernoulli fra i livelli 1 e 3:

$$p_0 + \cancel{\frac{1}{2} \rho v_1^2} + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_3^2 + \rho g(0)$$

dato che il fluido è a riposo al livello 1.

Ricavo quindi v_3 :

$$v_3 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.8 \text{ m/s}^2)1.00\text{m}} = 4.43 \text{ m/s}$$

b) Applico l'equazione di Bernoulli fra i livelli 2 e 3:

$$p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g(y + h) = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_3^2 + \rho g(0)$$

dato che $v_2 = v_3$ (tubo a sezione costante, portata costante), si ottiene:

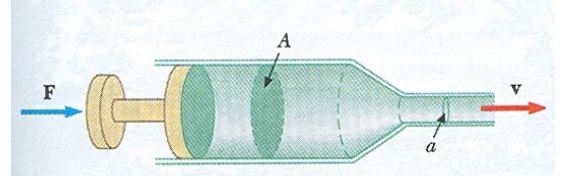
$$p_2 = p_0 - \rho g y - \rho g h$$

dato che $p_2 \geq 0$, deve essere

$$y \leq \frac{p_0}{\rho g} - h = \frac{1.013 \times 10^5 \text{ Pa}}{(10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)} - 1\text{m} = 10.3 \text{ m} - 1\text{m} = 9.3\text{m}$$

- 10.** Una siringa ipodermica contiene una medicina con densità pari a quella dell'acqua. La canna della siringa ha sezione $A = 2.50 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ mentre l'ago ha sezione $a = 1.00 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2$. In assenza di forza sul pistone la pressione è **1 atm**. Una forza $F = 2.00 \text{ N}$ agisce sul pistone, facendo sì che la medicina schizzi fuori orizzontalmente dall'ago. Determinare la velocità della medicina in uscita dall'ago.

Nella canna della siringa la pressione varia a seguito della applicazione della forza



$$\Delta p = \frac{F}{A} = \frac{2.00 \text{ N}}{2.50 \times 10^{-5} \text{ m}^2} = 8.00 \times 10^4 \text{ Pa}$$

dalla **equazione di continuità**

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$(2.50 \times 10^{-5} \text{ m}^2) v_1 = (1.00 \times 10^{-8} \text{ m}^2) v_2$$

$$v_1 = (4.00 \times 10^{-4}) v_2$$

cioè v_1 è trascurabile rispetto a v_2 .

Applico ora il **teorema di Bernoulli**:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$(p_1 - p_2) + 0 + 0 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + 0$$

$$8.00 \times 10^4 \text{ Pa} = \frac{1}{2} (1000 \text{ kg} / \text{m}^3) v_2^2$$

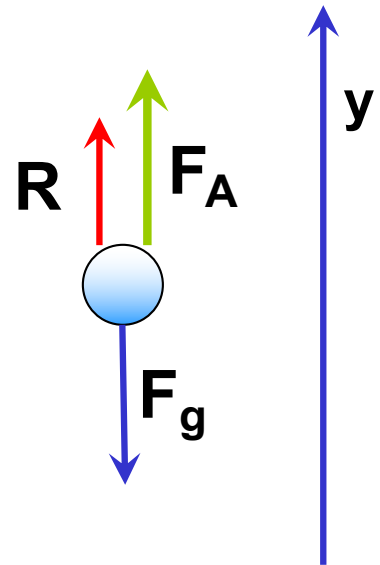
$$v_2 = \sqrt{\frac{2(8.00 \times 10^4 \text{ Pa})}{1000 \text{ kg} / \text{m}^3}} = 12.6 \text{ m} / \text{s}$$

Problemi: viscosità

- 11.** Si calcoli la velocità limite di una goccia di pioggia con raggio $r = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.
Si usi come coefficiente di viscosità dell'aria $\eta = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ N s/m}^2$, e come densità dell'aria $\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$.

idea chiave:

- sulla goccia agiscono le seguenti forze:
forza peso F_g ;
spinta archimedeica F_A ;
forza di attrito R .



In condizioni di regime, le forze si bilanciano e la velocità di caduta è costante (velocità limite):

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_g + \vec{F}_A + \vec{R} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$$-F_g + F_A + R = 0$$

Calcolo le forze una ad una:

$$F_g = mg = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{acqua} g$$

$$F_A = m_f g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{aria} g$$

$$R = bv = \gamma \eta v = 6\pi r \eta v$$

quindi:

$$-\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{acqua} g + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{aria} g - 6\pi r \eta v = 0$$

$$v = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{acqua} g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{aria} g}{6\pi r \eta} = \frac{2(\rho_{acqua} - \rho_{aria})r^2 g}{9\eta} =$$

$$= \frac{2(10^3 \text{ kg/m}^3 - 1.3 \text{ kg/m}^3)(0.5 \times 10^{-3} \text{ m})^2 (9.8 \text{ m/s}^2)}{9 \times 1.8 \times 10^{-5} \text{ N s/m}^2}$$

$$= 30.2 \text{ m/s} = \frac{30.2 \times 10^{-3} \text{ km}}{1/3600 \text{ h}} \approx 109 \text{ km/h}$$