

Problemi: quantità di moto - impulso

1. Due blocchi di massa M e $3M$ si trovano inizialmente fermi su un piano orizzontale senza attrito.

Una molla di massa trascurabile è fissata a uno di essi, e i due blocchi vengono spinti l'uno contro l'altro, con la molla in mezzo. La fune che li tiene uniti viene bruciata, ed il blocco di massa $3M$ si muove verso destra con velocità 2.00 m/s .

- a) quale è la velocità del blocco di massa M ?
b) Trovare l'energia potenziale elastica originaria della molla se $M=0.350 \text{ kg}$.

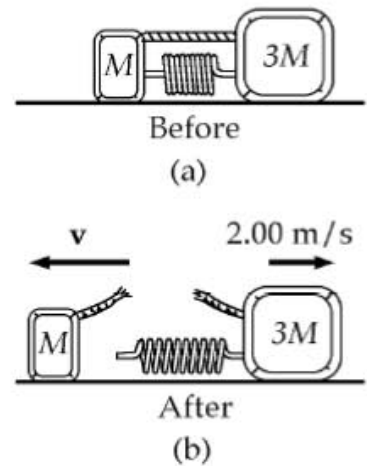
idea chiave:

- conservazione quantità di moto
- conservazione energia meccanica
[sistema isolato, forze conservative]

a) $\vec{p}_i = \vec{p}_f$

$$0 = Mv_M + (3M)(2.00 \text{ m/s})$$

$$v_M = -6.00 \text{ m/s} \quad (\text{moto verso sinistra})$$



b)

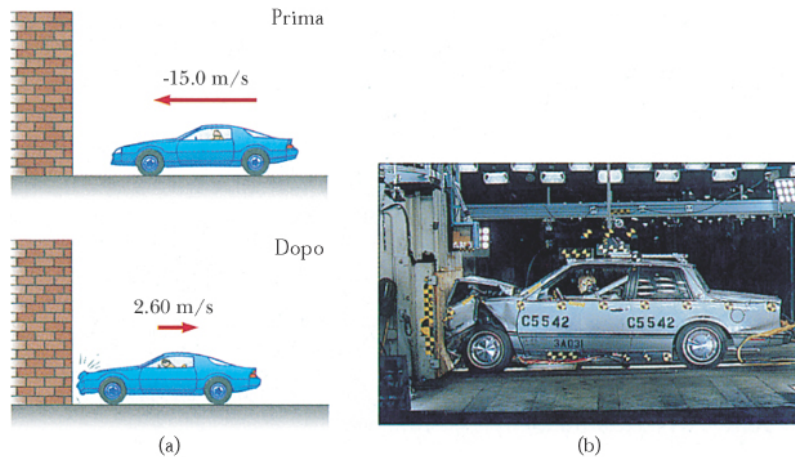
$$E_{mecc,i} = E_{mecc,f}$$

$$K_{M,i} + K_{3M,i} + U_{e,i} = K_{M,f} + K_{3M,f} + U_{e,f}$$

$$0 + 0 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}(3M)v_{3M}^2 + 0$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}(3M)v_{3M}^2 = 8.40 \text{ J}$$

- 2.** In un test d'urto, un'auto di massa $m=1500 \text{ kg}$ urta contro un muro. La velocità iniziale è $\vec{v}_i = -15.0 \text{ i m/s}$ e quella finale è $\vec{v}_f = 2.60 \text{ i m/s}$. Se la durata dell'urto è 0.150 s , determinare l'impulso dovuto all'urto e la forza media esercitata sull'auto.



$$\vec{p}_i = m\vec{v}_i = (1500 \text{ kg})(-15.0 \text{ m/s})\vec{i} = -2.25 \cdot 10^4 \vec{i} \text{ kg m/s}$$

$$\vec{p}_f = m\vec{v}_f = (1500 \text{ kg})(2.6 \text{ m/s})\vec{i} = 0.39 \cdot 10^4 \vec{i} \text{ kg m/s}$$

$$I = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = (0.39 \cdot 10^4 \vec{i} \text{ kg m/s}) - (-2.25 \cdot 10^4 \vec{i} \text{ kg m/s})$$

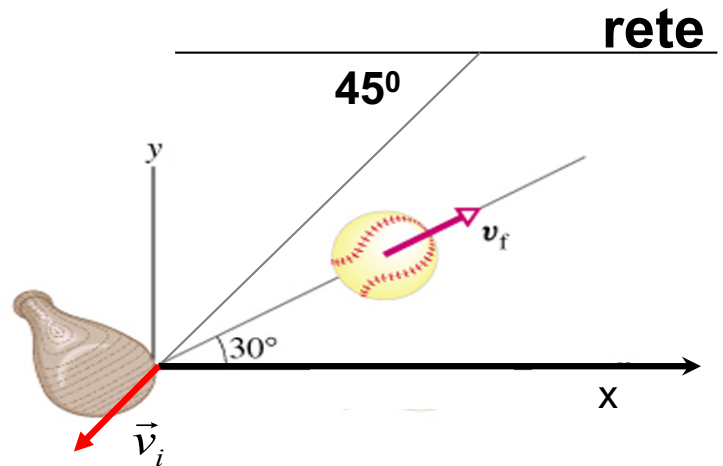
$$= 2.64 \cdot 10^4 \vec{i} \text{ kg m/s}$$

Forza media esercitata sull'auto:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{2.64 \cdot 10^4 \vec{i} \text{ kg m/s}}{0.150 \text{ s}} = 1.76 \cdot 10^5 \vec{i} \text{ N}$$

3. Nel gioco del softball una palla da **0.200 kg** attraversa la rete a **15.0 m/s** a un angolo di **45°** al di sotto dell'orizzontale. La palla viene colpita a **40 m/s** con un angolo di **30°** al di sopra dell'orizzontale.

- a) qual è l'impulso applicato alla palla ?
 b) se la forza sulla palla aumenta linearmente per $\Delta t_1 = 4.00 \text{ ms}$, rimane costante per $\Delta t_2 = 20.0 \text{ ms}$, e poi decresce fino a 0 linearmente in altri $\Delta t_3 = 4.00 \text{ ms}$, trovare la massima forza sulla palla.



a) $\vec{I} = \Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$

$$I_x = p_{x,f} - p_{x,i}$$

$$I_x = mv_f \cos(30^\circ) - (-mv_i \cos(45^\circ))$$

$$= (0.200 \text{ kg})(40.0 \text{ m/s}) \cos(30^\circ) + (0.200 \text{ kg})(15.0 \text{ m/s}) \cos(45^\circ)$$

$$= 9.05 \text{ N s}$$

$$I_y = p_{y,f} - p_{y,i}$$

$$mv_f \sin(30^\circ) - (-mv_i \sin(45^\circ))$$

$$= (0.200 \text{ kg})(40.0 \text{ m/s}) \sin(30^\circ) + (0.200 \text{ kg})(15.0 \text{ m/s}) \sin(45^\circ)$$

$$= 6.12 \text{ N s}$$

$$\vec{I} = I_x \vec{i} + I_y \vec{j} = (9.05 \vec{i} + 6.12 \vec{j}) \text{ N s}$$

b)

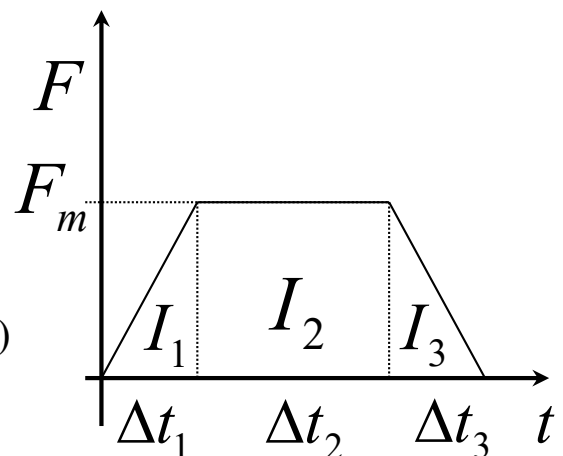
$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3$$

$$= \frac{1}{2} \vec{F}_m \Delta t_1 + \vec{F}_m \Delta t_2 + \frac{1}{2} \vec{F}_m \Delta t_3$$

$$= \frac{1}{2} \vec{F}_m (4.00 \text{ ms}) + \vec{F}_m (20.00 \text{ ms}) + \frac{1}{2} \vec{F}_m (4.00 \text{ ms})$$

$$2.4 \cdot 10^{-3} \text{ s } \vec{F}_m = (9.05 \vec{i} + 6.12 \vec{j}) \text{ N s}$$

$$\vec{F}_m = (377 \vec{i} + 255 \vec{j}) \text{ N}$$



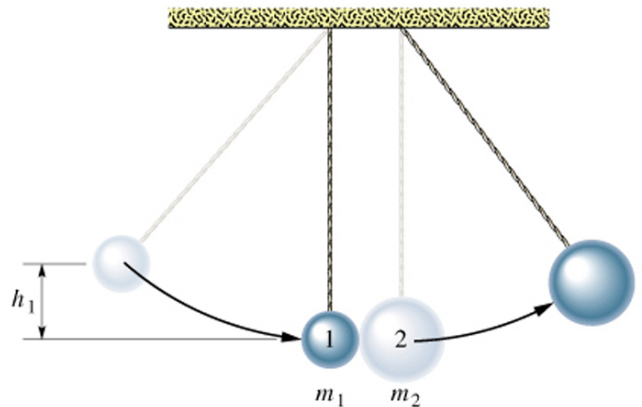
Problemi: urti in UNA dimensione

4. Due sfere metalliche sono sospese a cavetti verticali e sono inizialmente a contatto. La sfera 1, di massa $m_1 = 30 \text{ g}$, viene lasciata libera dopo essere stata tirata verso sinistra fino all'altezza $h_1 = 8.0 \text{ cm}$. Ritornata, cadendo, alla posizione iniziale subisce un urto elastico contro la sfera 2, di massa $m_2 = 75 \text{ g}$. Quale è la velocità v_{1f} della sfera 1 subito dopo l'urto?

idea chiave:

divido il problema in due parti

- 1) discesa sfera 1
- 2) urto fra le due sfere



- 1) applico principio di conservazione energia meccanica per il sistema sfera 1 – Terra, mentre la sfera cade
[N.B. la tensione T della corda non compie lavoro essendo sempre perpendicolare al moto]

$$E_{mecc,i} = E_{mecc,f}$$

$$K_{1,i} + U_{1,i} = K_{1,f} + U_{1,f}$$

$$0 + m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0$$

$$v_{1,i} = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2(9.8 \text{ m/s}^2)(0.080 \text{ m})} = 1.252 \text{ m/s}$$

- 2) considero urto come unidimensionale:
durante urto i moti delle due sfere sono **orizzontali**
il sistema è **isolato**, data la brevità dell'urto $\Rightarrow$ si conserva quantità di moto totale, energia cinetica

$$m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2$$

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} = \frac{0.030 \text{ kg} - 0.075 \text{ kg}}{0.030 \text{ kg} + 0.075 \text{ kg}} 1.252 \text{ m/s} = -0.537 \text{ m/s}$$

sfera 1 torna indietro dopo urto

Soluzione del sistema di due equazioni in due incognite,
precedente

$$1) \quad m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$2) \quad \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$1) \Rightarrow v_{2f} = \frac{m_1(v_{1i} - v_{1f})}{m_2}$$

$$2) \Rightarrow m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 v_{2f}^2$$

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2 \times \frac{m_1^2 (v_{1i} - v_{1f})^2}{m_2^2}$$

$$m_2(v_{1i} + v_{1f}) = m_1(v_{1i} - v_{1f})$$

ricavo v_{1f} :

$$v_{1f}(m_2 + m_1) = (m_1 - m_2)v_{1i}$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i}$$

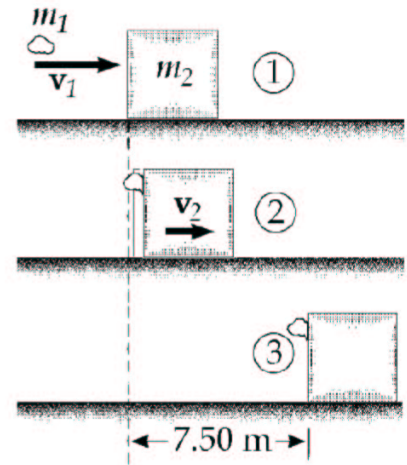
5. Un proiettile di massa $m_1=12.0 \text{ g}$ viene sparato su un blocco di legno di $m_2=100 \text{ g}$, fermo su una superficie orizzontale. Dopo l'urto il blocco scivola per $L=7.50 \text{ m}$ prima di fermarsi.

Se il coefficiente di attrito dinamico tra blocco e superficie è $\mu_d=0.650$, quale è la velocità del proiettile prima dell'urto ?

idea chiave:

urto completamente anelastico
si conserva **quantità di moto**

$$(1) \quad m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$$



Durate lo scivolamento la variazione di energia cinetica viene dissipata per attrito:

$$\Delta K = L_{\text{attrito}} \quad \text{teorema energia cinetica}$$

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_2^2 = \vec{f}_d \cdot \vec{L} = f_d L \cos(180^\circ)$$

$$-\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_2^2 = -f_d L$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_2^2 = \mu_d N L = \mu_d (m_1 + m_2) g L$$

da cui ricavo v_2 :

$$v_2 = \sqrt{2\mu_d L g} = \sqrt{2(0.650)(7.50 \text{ m})(9.8 \text{ m/s}^2)} = 9.77 \text{ m/s}$$

ricavo v_1 dalla conservazione della q. di moto **(1)** :

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_2 = \frac{112 \text{ g}}{12.0 \text{ g}} 9.77 \text{ m/s} = 91.2 \text{ m/s}$$

6. Un esperto di karate picchia un pugno di massa $m_1=0.70 \text{ kg}$ e spezza un'asse di legno di massa 0.14 kg . Poi spezza una mattonella di calcestruzzo di massa 3.2 kg . Le costanti elastiche di flessione sono rispettivamente $4.1 \cdot 10^4 \text{ N/m}$ e $2.6 \cdot 10^6 \text{ N/m}$. La rottura avviene quando l'inarcamento è pari a $d=16 \text{ mm}$ per l'asse e 1.1 mm per la mattonella.

a) immediatamente prima della rottura, quanta energia viene immagazzinata nei due casi ?

b) che velocità v_1 del pugno è richiesta per rompere l'asse e la mattonella ?

[assumere la conservazione dell'energia meccanica]

idee chiave:

a) tratto la flessione come la compressione di una molla per cui vale la legge di Hooke.

b) tratto l'urto come completamente anelastico:
traformo energia cinetica in energia potenziale elastica

a) energia immagazzinata prima della rottura:

$$U = \frac{1}{2} k d_{\text{legno}}^2 = \frac{1}{2} (4.1 \cdot 10^4 \text{ N/m}) (0.016 \text{ m})^2 = 5.248 \text{ J} \approx 5.2 \text{ J}$$

$$U = \frac{1}{2} k d_{\text{mattona}}^2 = \frac{1}{2} (2.6 \cdot 10^6 \text{ N/m}) (0.0011 \text{ m})^2 = 1.537 \text{ J} \approx 1.6 \text{ J}$$

ho bisogno di maggior energia per spezzare il legno !!

b) nell'urto completamente anelastico si conserva solo la quantità di moto:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v \quad \begin{array}{l} m_1 = \text{massa pugno} \\ m_2 = \text{massa tavola} \end{array}$$

$$v = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)}$$

applico la conservazione dell'energia meccanica

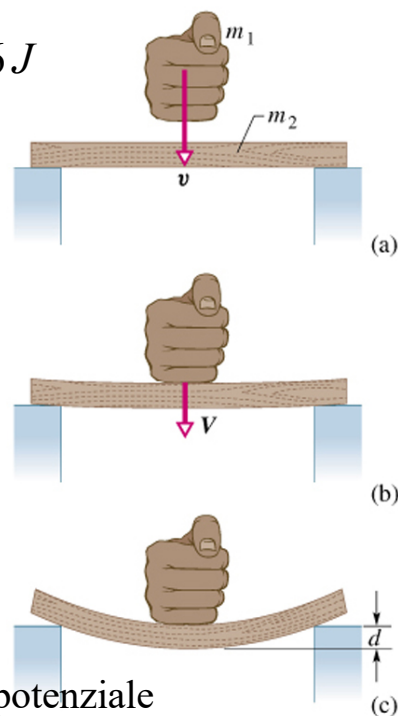
[trascuro variazione di energia potenziale gravitazionale data la distanza minima percorsa nella flessione]

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = U \quad \begin{array}{l} \text{energia cinetica deve eguagliare energia potenziale} \\ \text{al termine della flessione} \end{array}$$

$$v_1 = \frac{1}{m_1} \sqrt{2U(m_1 + m_2)} = \begin{array}{ll} 4.2 \text{ m/s} & \text{legno} \\ 5.0 \text{ m/s} & \text{cemento} \end{array}$$

ho bisogno di maggior velocità per spezzare il cemento !!!

Aumentando la massa del bersaglio riduco la velocità v assorbita e quindi la frazione di energia trasferita nell'urto.



Due corpi si muovono lungo il piano come in figura, $m_1 = 10 \text{ kg}$ con $|v_1| = 3 \text{ m/s}$, e $m_2 = 4 \text{ kg}$ con $|v_2| = 6 \text{ m/s}$, e si urtano in maniera completamente anelastica.



Calcolare modulo, direzione e verso della velocità dopo l'urto, e l'energia dissipata nell'urto.

SOLUZIONI

1a)

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v_{12}$$

$$v_{12} = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} = \frac{10 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s} - 4 \text{ kg} \cdot 6 \text{ m/s}}{14 \text{ kg}} = 0.43 \text{ m/s}$$

Quindi velocità diretta nella stessa direzione e stesso verso di v_1 .

L'energia dissipata nell'urto è data dalla differenza tra l'energia cinetica prima e dopo l'urto:

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot v_{12}^2 =$$

$$\frac{1}{2} \left(10 \text{ kg} \cdot \left(3 \text{ m/s} \right)^2 + 4 \text{ kg} \cdot \left(6 \text{ m/s} \right)^2 - 14 \text{ kg} \cdot \left(0.43 \text{ m/s} \right)^2 \right) = 115.7 \text{ J}$$

Un uomo di $m_1 = 70 \text{ kg}$ ed un ragazzo di massa $m_2 = 35 \text{ kg}$ sono inizialmente in quiete su una superficie di ghiaccio priva di attrito. Se i due si spingono l'un l'altro, e l'uomo si allontana con velocità $v_1 = 0.3 \text{ m/s}$, dire quanto varrà la distanza che li separa dopo 5 s.

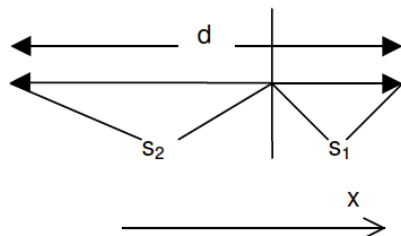
SOLUZIONE.

Abbiamo in questo caso un sistema di due corpi che interagisce senza presenza di forze esterne. Per il principio della conservazione della quantità di moto, in assenza di forze esterne il valore della quantità di moto prima dell'interazione deve essere uguale a quello della quantità di moto dopo l'interazione. Prima dell'interazione i due corpi sono in quiete, quindi la loro quantità di moto è nulla. Ricordando che la quantità di moto è una grandezza vettoriale, possiamo scrivere:

$$0 = m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2$$

Scegliamo un sistema di riferimento in cui l'asse x ha direzione e verso pari a quelle del moto dell'uomo. Allora, la velocità del ragazzo è data da:

$$\underline{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \underline{v}_1 = -\frac{70 \text{ kg}}{35 \text{ kg}} \cdot 0.3 \text{ m/s} = -0.6 \text{ m/s}$$



quindi nella stessa direzione ma nel verso opposto rispetto al moto dell'uomo.

Nell'intervallo di tempo di 5 s, l'uomo percorre uno spazio pari a

$$\underline{s}_1 = \underline{v}_1 \cdot t = 0.3 \text{ m/s} \cdot 5 \text{ s} = 1.5 \text{ m}$$

mentre il ragazzo percorre uno spazio

$$\underline{s}_2 = \underline{v}_2 \cdot t = -0.6 \text{ m/s} \cdot 5 \text{ s} = -3 \text{ m}$$

nella stessa direzione, ma in verso opposto, rispetto al moto dell'uomo. La distanza tra il ragazzo e l'uomo sarà quindi data dalla somma dei valori assoluti dei due spostamenti:

$$d = |\underline{s}_1| + |\underline{s}_2| = 4.5 \text{ m}.$$

Un proiettile di 20 g si ferma in un blocco di legno di massa 1.2 kg. Il sistema proiettile-blocco si muove dopo l'urto con velocità 1.2 m/s ed incontra una molla la cui costante elastica vale $k = 150 \text{ N/m}$.

Calcolare:

- i. velocità del proiettile prima dell'urto;
- ii. la energia dissipata durante l'urto;
- iii. la compressione massima della molla.

SOLUZIONE.

Siamo in presenza di un urto anelastico; scrivendo l'equazione della conservazione della quantità di moto, tenendo presente che il corpo 2 (il blocco di legno) prima dell'urto era fermo, e che dopo l'urto abbiamo ancora un solo corpo (il blocco formato da 1+2) che si muove, ne discende che necessariamente la velocità dopo l'urto deve avere direzione e verso uguali rispetto a quella prima dell'urto; per quanto riguarda i moduli, vale la seguente equazione:

$$m_1 \cdot v_1 = (m_1 + m_2) \cdot v_{12}$$

da cui è possibile ricavare v_1 .

$$v_1 = (m_1 + m_2) \cdot v_{12} / m_1 = (1200 \text{ g} + 20 \text{ g}) \cdot (1.2 \text{ m/s}) / (20 \text{ g}) = 73.2 \text{ m/s}$$

In un urto anelastico, l'energia meccanica non viene conservata. L'energia dissipata durante l'urto può essere calcolata come differenza tra energia iniziale ed energia finale. Non essendoci variazioni per quanto riguarda l'energia potenziale, la differenza di energia tra prima e dopo l'urto si ottiene calcolando la variazione di energia cinetica:

$$E_{\text{diss}} = E_{\text{cin}}^{\text{prima}} - E_{\text{cin}}^{\text{dopo}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot v_{12}^2 =$$

$$\frac{1}{2} \left(20 \text{ g} \cdot (73.2 \text{ m/s})^2 - (1200 \text{ g} + 20 \text{ g}) \cdot (1.2 \text{ m/s})^2 \right) = 52.7 \text{ J}$$

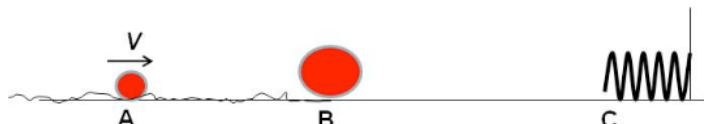
Quando il sistema proiettile-blocco di legno incontra la molla, l'energia cinetica del sistema si trasforma in energia potenziale della molla. La compressione massima della molla corrisponde alla situazione di massima energia potenziale della stessa, quindi di minima energia cinetica del sistema. In pratica, la compressione massima della molla si avrà quando il sistema blocco-proiettile sarà fermo, quindi quando tutta la sua energia cinetica si sarà trasformata in energia potenziale:

$$\frac{1}{2} k \cdot \Delta x_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot v_{12}^2$$

$$\Delta x_{\text{max}} = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) \cdot v_{12}^2}{k}} = \sqrt{\frac{(1200 \text{ g} + 20 \text{ g}) \cdot (1.2 \text{ m/s})^2}{150 \text{ N/m}}} = 0.108 \text{ m}$$

1) Un corpo di massa $m=100\text{ g}$ viene messo in moto su un piano orizzontale con velocità $v=5\text{ m/s}$. Il piano è scabro nel tratto **AB** (lungo $d = 50\text{ cm}$) con coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.2$, mentre successivamente (tratto BC ed oltre) è liscio. Dopo avere percorso il tratto **AB**, il corpo di massa m urta, in modo completamente anelastico, contro un corpo di massa $M = 500\text{ g}$. Dopo l'urto il corpo di massa $(m+M)$ procede lungo il piano liscio, fino al punto **C**, ove si trova una molla a riposo, di costante elastica $k = 10^3\text{ N/m}$, come mostrato in figura. Si calcoli:

- la velocità del corpo di massa m subito prima dell'urto e la velocità del corpo di massa $(m+M)$ subito dopo l'urto;
- la velocità del corpo di massa $(m+M)$ nel punto **C** e la massima compressione Δx subita dalla molla.



- La velocità v_f del corpo m immediatamente prima dell'urto si ottiene applicando il teorema delle forze vive, dove la forza di attrito è l'unica forza che compie lavoro lungo il tratto d . Pertanto:

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \vec{F}_d \cdot \vec{d} = -\mu mgd$$

$$v_f^2 = v_i^2 - 2\mu gd$$

$$v_f = \sqrt{v_i^2 - 2\mu gd} = \sqrt{(5\text{ m/s})^2 - 2 \times 0.2 \times 9.8\text{ m/s}^2 \times 0.5\text{ m}} = 4.8\text{ m/s}$$

La velocità V del corpo $(m+M)$ dopo l'urto completamente anelastico si ottiene applicando la conservazione della quantità di moto totale del sistema:

$$m v_f = (m + M) V$$

$$V = m/(m+M) v_f = 0.8\text{ m/s}$$

- In **C** il corpo $(m+M)$ ha la stessa velocità che ha in **B**, dato che il piano nel tratto BC è liscio. La massima compressione Δx della molla si ottiene quando il corpo di massa $(m+M)$ è fermo. Per la conservazione della energia meccanica si ottiene:

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

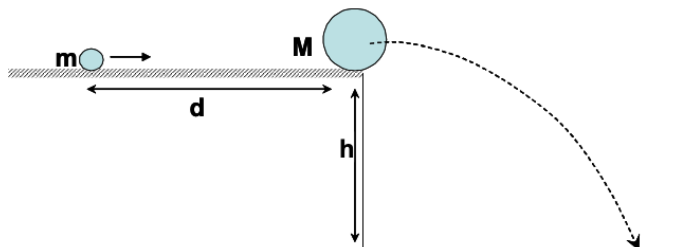
$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{(m + M)}{k}}V = 0.02\text{ m}$$

- 1) Un corpo di massa $m = 1 \text{ kg}$ e velocità iniziale $v = 5 \text{ m/s}$ si muove su un piano orizzontale scabro, con coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.1$. Dopo avere percorso una distanza $d = 10 \text{ m}$ il corpo urta in modo completamente anelastico contro un corpo di massa $M = 2 \text{ kg}$, fermo e posto sul bordo di un gradino di altezza $h = 2 \text{ m}$, come mostrato in figura.

Calcolare:

- a) la velocità del corpo m immediatamente prima dell'urto;
 b) la velocità del corpo $(m+M)$ al momento dell'impatto con il suolo.



- a) Il moto del corpo m sul piano orizzontale è uniformemente decelerato, data la presenza della forza di attrito F_d diretta in verso opposto al moto e di modulo costante pari a:

$$F_d = \mu mg$$

La decelerazione a di cui risente il corpo è quindi data da:

$$a = \frac{F_d}{m} = \mu g = 0.1 \times 9.8 \text{ m/s}^2 = 0.98 \text{ m/s}^2$$

La velocità v_f dopo un tratto d è quindi data da:

$$v_f^2 = v^2 - 2ad$$

$$v_f = \sqrt{v^2 - 2ad} = \sqrt{(5 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 - 2 \times (0.98 \text{ m/s}^2) \times 10 \text{ m}} = 2.3 \text{ m/s}$$

- b) Dopo l'urto completamente anelastico i corpi m ed M si muovono orizzontalmente ed uniti, con una velocità V data dalla legge della conservazione della quantità di moto:

$$mv_f = (m + M)V$$

$$V = \frac{m}{(m + M)} v_f = \frac{1.0 \text{ kg}}{3.0 \text{ kg}} \times 2.3 \text{ m/s} = 0.8 \text{ m/s}$$

Applicando ora il principio di conservazione dell'energia meccanica, è possibile ricavare la velocità V_f del corpo $(m+M)$ nell'istante in cui tocca il suolo:

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 + (m + M)gh = \frac{1}{2}(m + M)V_f^2$$

$$V_f = \sqrt{V^2 + 2gh} = \sqrt{(0.8 \text{ m/s})^2 + 2 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 2 \text{ m}} = 6.3 \text{ m/s}$$

1. Un corpo A di massa M, in moto rettilineo su un piano orizzontale scabro (coefficiente di attrito $\mu = 0.2$), ha in un punto O velocità $v_o = 10 \text{ m/s}$. Dopo aver percorso un tratto $S = 5 \text{ m}$, il corpo A urta in modo perfettamente **elastico** un corpo B, di uguale massa, inizialmente fermo. Si calcoli
 - a. La velocità del corpo A, immediatamente prima dell'urto.
 - b. Le velocità dei due blocchi, subito dopo l'urto

- a) Il lavoro L compiuto dalla risultante delle forze (in questo caso compie lavoro solo la forza d'attrito, opposta allo spostamento e di modulo μMg), uguaglia la variazione dell'energia cinetica della particella durante lo spostamento S:

$$L = -\mu MgS = \frac{1}{2} Mv_f^2 - \frac{1}{2} Mv_i^2$$

(v_i e v_f sono rispettivamente le velocità finali e iniziali della particella)

Si ricava facilmente

$$v_f = \sqrt{(v_i^2 - 2\mu gS)} = 8.97 \text{ m/s}$$

- b) Nell'urto perfettamente elastico si conserva la quantità di moto e l'energia cinetica del sistema delle due particelle. In questo caso le due particelle hanno uguale massa M:

$$\begin{cases} M \cdot v_{1i} + M \cdot v_{2i} = M \cdot v_{1f} + M \cdot v_{2f} \\ \frac{1}{2} M \cdot v_{1i}^2 + \frac{1}{2} M \cdot v_{2i}^2 = \frac{1}{2} M \cdot v_{1f}^2 + \frac{1}{2} M \cdot v_{2f}^2 \end{cases}$$

ed è quindi possibile eliminare il termine M dal sistema di equazioni precedente:

$$\begin{cases} v_{1i} + v_{2i} = v_{1f} + v_{2f} \\ v_{1i}^2 + v_{2i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \end{cases}$$

Poiché $v_{2i}=0$ si può ricavare v_{1f} dalla prima equazione

$$v_{1f} = v_{1i} - v_{2f}$$

e sostituire nella seconda:

$$v_{1i}^2 = (v_{1i} - v_{2f})^2 + v_{2f}^2$$

$$v_{1i}^2 = v_{1i}^2 + v_{2f}^2 - 2v_{1i} \cdot v_{2f} + v_{2f}^2$$

$$2 \cdot v_{2f} \cdot (v_{2f} - v_{1i}) = 0$$

Esclusa la soluzione $v_{2f} = 0$, a cui corrisponderebbe $v_{1f} = v_{1i}$, cioè una situazione corrispondente al caso in cui l'urto non avviene, rimane come possibile soluzione

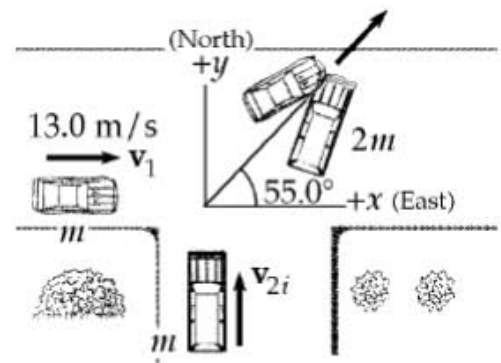
$$v_{2f} = v_{1i} = 8.97 \text{ m/s.}$$

Problemi: urti in DUE dimensioni

7. Due auto di massa uguale si avvicinano ad un incrocio. Un veicolo viaggia a velocità 13.0 m/s verso est, l'altro verso nord a velocità v_{2i} . I veicoli si urtano all'incrocio e rimangono incastrati, lasciano delle strisce parallele sull'asfalto ad un angolo di 55° a nord-est. Il conducente che procedeva verso nord sostiene di avere rispettato il limite di velocità di 35 mi/h . è vero?

idea chiave:

urto completamente anelastico
si conserva **quantità di moto**



$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f$$

$$m \vec{v}_{1i} + m \vec{v}_{2i} = 2m \vec{v}_f \quad m_1 = m_2 = m$$

asse x: $m v_{1i} + 0 = 2m v_f \cos(55^\circ)$

asse y: $0 + m v_{2i} = 2m v_f \sin(55^\circ)$

divido le due equazioni:

$$\frac{v_{2i}}{v_{1i}} = \tan(55^\circ)$$

$$v_{2i} = v_{1i} \tan(55^\circ) = (13.0 \text{ m/s}) \tan(55^\circ)$$

$$= 18.6 \text{ m/s} = \frac{18.6 \cdot 10^{-3} \text{ km}}{1/3600 \text{ h}} = 66.96 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$= 66.96 \frac{0.6214 \text{ mi}}{\text{h}} = 41.6 \frac{\text{mi}}{\text{h}}$$

Il conducente mentiva!!!

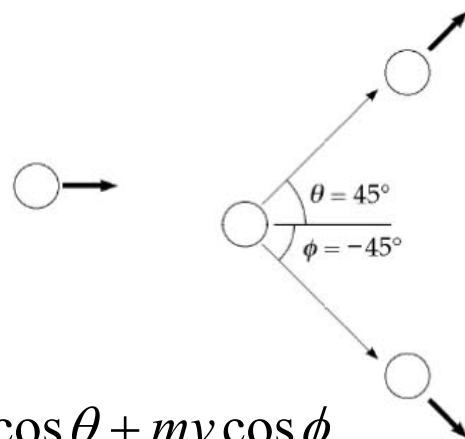
8. Un protone che si muove con velocità v_i i urta elasticamente un altro protone inizialmente fermo. Dopo l'urto entrambi i protoni hanno la stessa velocità. Calcolare:
- la velocità di ciascun protone dopo l'urto in funzione di v_i .
 - la direzione dei vettori velocità dopo l'urto.

idea chiave:

urto elastico

si conserva **quantità di moto**

si conserva **energia cinetica**



$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$\begin{array}{ll} \text{asse x} & p_{xi} = p_{xf} \\ \text{asse y} & p_{yi} = p_{yf} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} mv_i = mv \cos \theta + mv \cos \phi \\ 0 = mv \sin \theta + mv \sin \phi \end{array}$$

dalla eq. asse y ottengo:

$$\sin \theta = -\sin \phi$$

$$\theta = -\phi$$

impongo la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = mv^2$$

$$v = \frac{v_i}{\sqrt{2}}$$

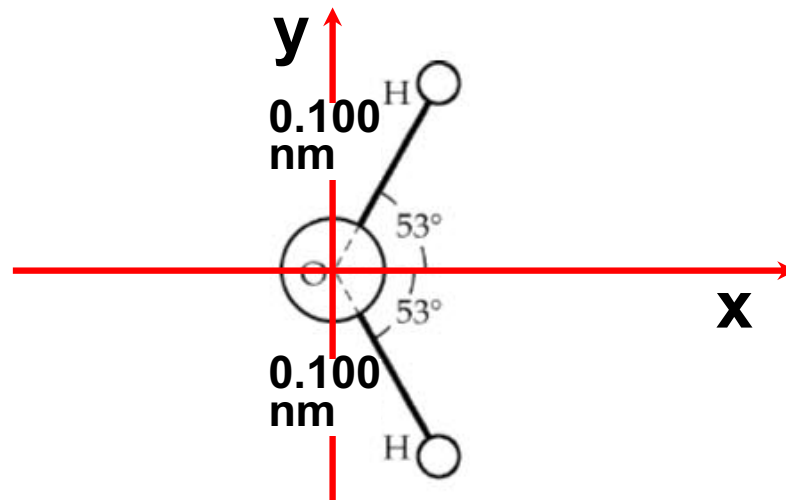
utilizzo ora eq. asse x e ottengo:

$$v_i = \frac{v_i}{\sqrt{2}} \cos \theta + \frac{v_i}{\sqrt{2}} \cos(-\theta) = \frac{2v_i \cos \theta}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ, \quad \phi = -45^\circ$$

Problemi: **centro di massa**

9. La molecola d'acqua è fatta di un atomo di ossigeno e due atomi di idrogeno ad esso legati. L'angolo fra i due legami è 106° . Se i legami hanno una lunghezza di 0.100 nm , dove si trova il centro di massa della molecola ?



Take x -axis starting from the oxygen nucleus and pointing toward the middle of the V.

Then

$$y_{\text{CM}} = 0$$

and

$$x_{\text{CM}} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} =$$

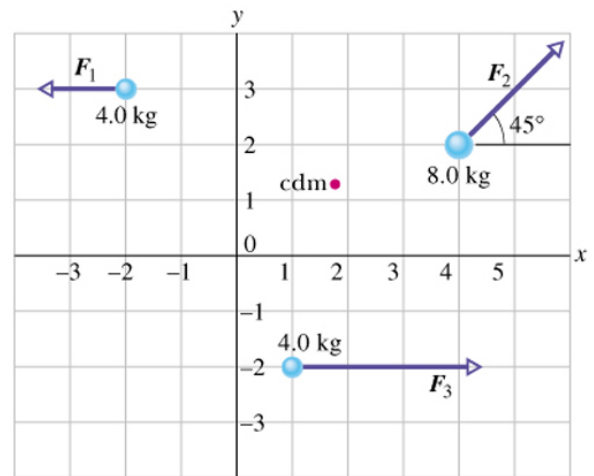
$$x_{\text{CM}} = \frac{0 + 1.008 \text{ u}(0.100 \text{ nm})\cos 53.0^\circ + 1.008 \text{ u}(0.100 \text{ nm})\cos 53.0^\circ}{15.999 \text{ u} + 1.008 \text{ u} + 1.008 \text{ u}}$$

$$x_{\text{CM}} = 0.00673 \text{ nm from the oxygen nucleus}$$

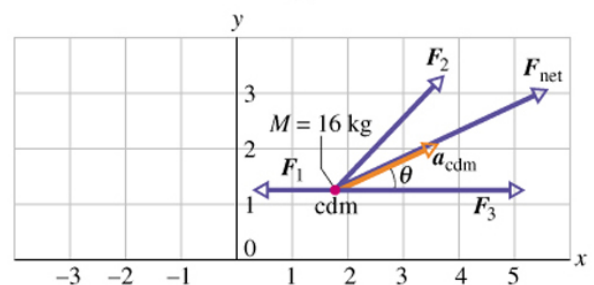
10. Un sistema di 3 particelle, inizialmente a riposo, è soggetto alle forze $F_1=6.0\text{ N}$, $F_2=12\text{ N}$ ed $F_3=14\text{ N}$, come mostrato in figura. Quale è l'accelerazione del **CM** ed in che direzione si muove?

idea chiave:

- ▶ tratto il **CM** come particella **reale** di massa **$M=16\text{ kg}$** (massa totale)
- ▶ applico tutte le forze esterne al **CM**



(a)



(b)

→ **CM** si muove nella stessa direzione delle **forza netta** agente sul sistema

determino componenti **x** ed **y** della acc. **CM**:

$$a_{CM,x} = \frac{F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x}}{M} = \frac{-6.0\text{ N} + (12\text{ N})\cos(45^\circ) + (14\text{ N})}{16\text{ kg}} = 1.03\text{ m/s}^2$$

$$a_{CM,y} = \frac{F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y}}{M} = \frac{0 + (12\text{ N})\sin(45^\circ) + 0}{16\text{ kg}} = 0.530\text{ m/s}^2$$

determino **modulo** e **direzione** accelerazione **CM**:

$$a_{CM} = \sqrt{(a_{CM,x})^2 + (a_{CM,y})^2} = 1.16\text{ m/s}^2 \approx 1.2\text{ m/s}^2$$

$$\theta = \arctan \frac{a_{CM,y}}{a_{CM,x}} = 27^\circ$$