

Problemi: cinematica unidimensionale

1. Una macchina percorre 200 km in 1,30 ore, dopo la sosta all'autogrill percorre altri 100 km in 45 minuti. Calcolare la velocità media in ciascun tratto di percorso e la velocità media complessiva.

La prima distanza $d_1=200 \text{ km}=200 \times 10^3 \text{ m}=2 \times 10^5 \text{ m}$ viene percorsa in un tempo $t_1=1.3 \text{ h}=1.3 \times 3600 \text{ s}=4680 \text{ s}$.

La velocità in questo tratto è quindi $v_1 = \frac{d_1}{t_1} = \frac{2 \times 10^5}{4680} \text{ m/s} = 42.74 \text{ m/s}$.

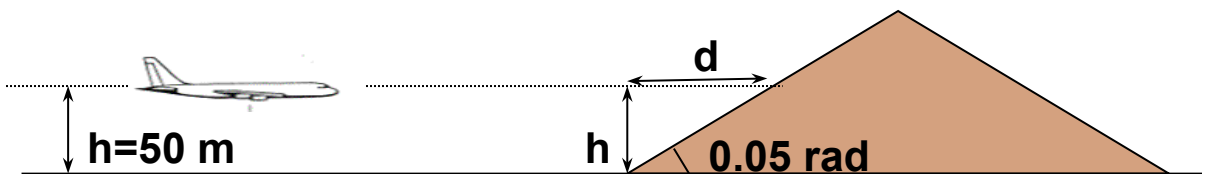
La seconda distanza $d_2=100 \text{ km}=100 \times 10^3 \text{ m}=1 \times 10^5 \text{ m}$ viene percorsa in un tempo $t_2=45 \text{ minuti}=45 \times 60 \text{ s}=2700 \text{ s}$.

La velocità in questo tratto è quindi $v_2 = \frac{d_2}{t_2} = \frac{1 \times 10^5}{2700} \text{ m/s} = 37.04 \text{ m/s}$.

La velocità media complessiva è pari a $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d_1 + d_2}{t_1 + t_2} = \frac{300 \text{ km}}{135 \text{ min}} = \frac{300 \times 10^3 \text{ m}}{135 \times 60 \text{ s}} = 37,04 \text{ m/s}$

Attenzione, è diversa dalla media delle velocità $\bar{v} = \frac{v_2 + v_1}{2} = 39.9 \text{ m/s}$.

2. Un jet viaggia alla velocità di 1025 km/h ad un'altezza dal suolo di 50 m. Improvvisamente incontra una collina con una pendenza di 0.05 rad. Qual è la massima distanza che può percorrere l'aereo senza schiantarsi? Quanto tempo ha il pilota per cambiare rotta?



radiante = angolo sotteso da un arco s la cui lunghezza coincide con il raggio r della circonferenza.

$$\theta(\text{rad}) = \frac{s}{r} \quad 1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57.3^\circ \quad 1^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} \approx 0.017 \text{ rad}$$

La velocità dell'aereo è $v=1025 \text{ km/h} = 1025 \times \frac{1000}{3600} \text{ m/s} = 284.72 \text{ m/s}$.

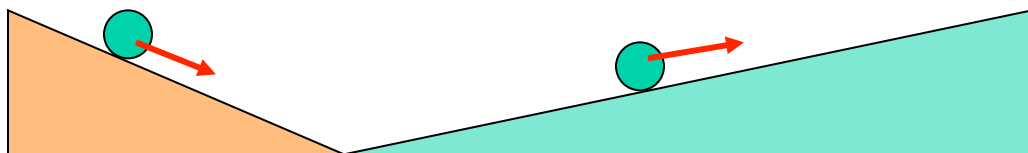
Il pendio ha un inclinazione di $\theta = 0.05 \text{ rad}$

L'aereo incontrerebbe il pendio della collina ad una distanza

$$d = \frac{h}{\tan \theta} = \frac{50 \text{ m}}{0.05} = 999.2 \text{ m}$$

quindi il tempo massimo per un cambio di rotta è $t = \frac{d}{v} = \frac{999.2 \text{ m}}{284.72 \text{ m/s}} = 3.5 \text{ s}$

- 3.** Una palla scende lungo un piano inclinato lungo **9 m** con una accelerazione di **0.500 m/s²**. Dopo avere raggiunto la base, la palla sale lungo un altro piano inclinato, dove si ferma dopo avere percorso **15.0 m**.
- quale è la velocità alla base del primo piano inclinato?
 - quanto tempo impiega a scendere lungo il primo piano?
 - quale è l'accelerazione lungo il secondo piano ?
 - quale è la velocità dopo i primi **8.00 m** lungo il secondo piano ?



- (a) Take initial and final points at top and bottom of the incline.

If the ball starts from rest,

$$v_i = 0, a = 0.500 \text{ m/s}^2, x_f - x_i = 9.00 \text{ m}$$

Then

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) = 0^2 + 2(0.500 \text{ m/s}^2)(9.00 \text{ m})$$

$$v_f = \boxed{3.00 \text{ m/s}}$$

- (b) $x_f - x_i = v_i t + \frac{1}{2} a t^2$

$$9.00 = 0 + \frac{1}{2}(0.500 \text{ m/s}^2)t^2$$

$$t = \boxed{6.00 \text{ s}}$$

- (c) Take initial and final points at the bottom of the planes and the top of the second plane, respectively:

$$v_i = 3.00 \text{ m/s}, v_f = 0, x_f - x_i = 15.00 \text{ m}$$

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \text{ gives}$$

$$a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2(x_f - x_i)} = \frac{0 - (3.00 \text{ m/s})^2}{2(15.0 \text{ m})} = \boxed{-0.300 \text{ m/s}^2}$$

- (d) Take the initial point at the bottom of the planes and the final point 8.00 m along the second:

$$v_i = 3.00 \text{ m/s}, x_f - x_i = 8.00 \text{ m}, a = -0.300 \text{ m/s}^2$$

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) = (3.00 \text{ m/s})^2 + 2(-0.300 \text{ m/s}^2)(8.00 \text{ m}) = 4.20 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

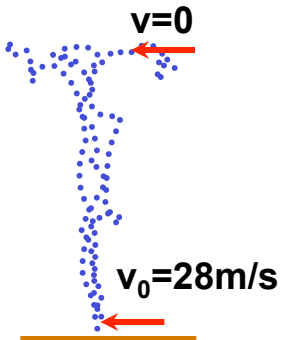
$$v_f = \boxed{2.05 \text{ m/s}}$$

4. Un geyser emette acqua ad una velocità di 28 m/s. Assumendo un moto perfettamente verticale delle particelle d'acqua determinare: l'altezza massima raggiunta dalle particelle d'acqua e il tempo di volo dell'acqua.

Al momento di massima altezza le particelle di acqua cambiano direzione del moto, quindi la loro velocità istantanea è nulla. Il tempo impiegato per raggiungere il punto di massima altezza si ricava da $0 = v_0 - g * t$ quindi $t = \frac{v_0}{g} = 2.8$ s. In questo tempo le particelle d'acqua percorrono lo spazio $y_M = v_0 * t - \frac{1}{2} g * t^2 = (28 * 2.8 - 9.8 * 8/2) \text{ m} = 40 \text{ m}$

Il tempo impiegato per ricadere è $t = \sqrt{2y_M/g} = \sqrt{80/9.8} = 2.8$ s

Come ci si doveva aspettare il tempo di caduta è uguale al tempo di salita.



5. Un ragazzo lascia cadere un sasso in una rupe sul mare di cui non conosce l'altezza. Dopo 15 secondi sente il rumore del sasso che entra in acqua. Sapendo che la velocità del suono è 1220 km/h, quanto è alto il pozzo? Quanto è durata la caduta del sasso in realtà?

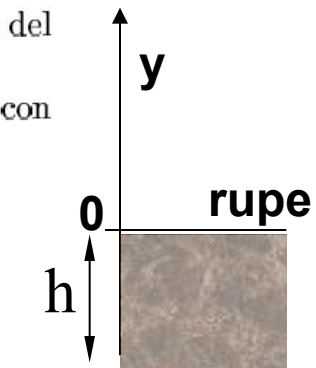
Considerazioni da fare:

- 1) Il suono si muove con moto rettilineo uniforme.
- 2) Il tempo totale $T=15$ s è la somma del tempo di caduta del sasso e del tempo di propagazione del suono. $T=t_1+t_2$.
- 3) Sistema di riferimento: definiamo l'asse y come positivo verso l'alto con origine nel punto di lancio del sasso dalla rupe.

Il sistema di equazioni da risolvere è

$$\text{sasso: } y_f = h = y_0 + v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = -\frac{1}{2} g t_1^2 \quad h = -\frac{1}{2} g * t_1^2$$

$$\text{suono: } y_f = 0 = y_0 + v_s t_2 = h + v_s t_2 \quad h = -v_s * t_2$$



con $v_s=338.9$ m/s velocità del suono. Il tempo si ottiene risolvendo l'equazione di secondo grado

$$t_1^2 + \frac{2v_s}{g} t_1 - \frac{2v_s}{g} * T = 0 \quad t_1 = \frac{-\frac{2v_s}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{2v_s}{g}\right)^2 + 4\left(\frac{2v_s}{g} T\right)}}{2} = \begin{matrix} 12.7 \text{ s} \\ -81.83 \text{ s} \end{matrix}$$

Tenendo solo la soluzione positiva abbiamo $t_1=12.7$ s. Quindi il tempo di propagazione del suono è $t_2=2.3$ s. Il fondo della rupe si trova ad un'altezza $h = -v_s * t_2 = -779$ m.

6. Una pietra viene lanciata nel punto A dalla cima di un palazzo con una velocità iniziale di $20.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ verso l'alto e poi ricade a terra. L'edificio è alto 50.0 m .

Calcolare:

a) il tempo impiegato dalla pietra a raggiungere il punto di altezza massima;

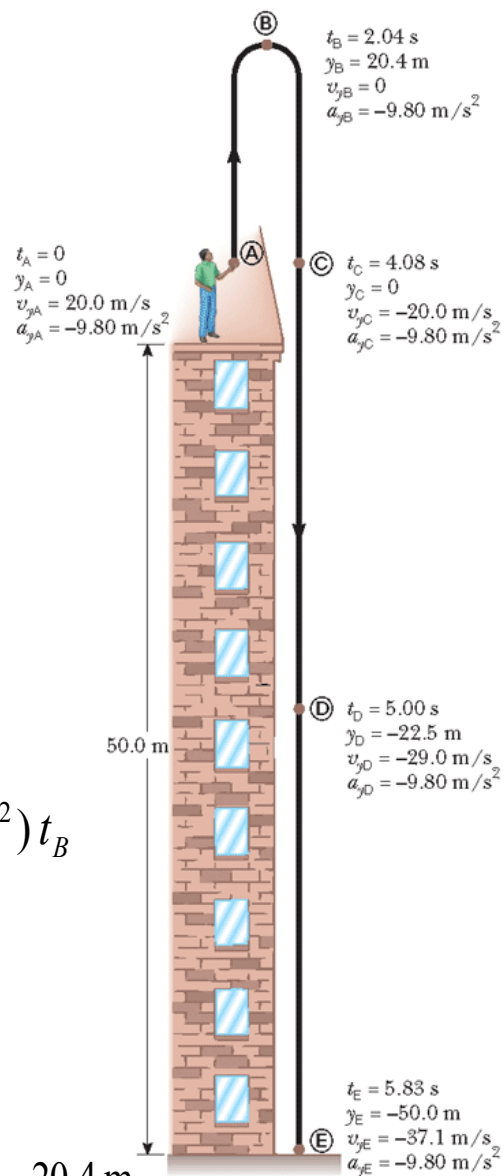
b) l'altezza massima raggiunta;

c) il tempo impiegato dalla pietra per tornare al livello del lanciatore; la velocità della pietra in questo istante;

d) la velocità e la posizione per $t = 5.0 \text{ s}$;

e) la posizione della pietra a $t = 6 \text{ s}$.

f) Come mai il modello fallisce nell'ultima parte del problema?



a) $v_{yf} = v_{yi} + a_y t \rightarrow 0 = 20.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} + (-9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) t_B$

$$t_B = \frac{20.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 2.04 \text{ s}$$

b) $y_{\max} = y_B = y_A + v_{yA} t_B + \frac{1}{2} a_y t_B^2$

$$y_{\max} = 0 + 20.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 2.04 \text{ s} + \frac{1}{2} (-9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) (2.04 \text{ s})^2 = 20.4 \text{ m}$$

c) $y_C = y_A + v_{yA} t_C + \frac{1}{2} a_y t_C^2 \rightarrow 0 = 20.0 t_C - 4.90 t_C^2$

$$t_C (20.0 - 4.90 t_C) = 0 \rightarrow t_C = 0 \text{ e } t_C = 4.08 \text{ s}$$

$$v_{yC} = v_{yA} + a_y t_C = 20.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} + (-9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) (4.08 \text{ s}) = -20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

d) $v_{yD} = v_{yA} + a_y t_D = 20.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} + (-9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) (5.00 \text{ s}) = -29 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$y_D = y_A + v_{yA} t_D + \frac{1}{2} a_y t_D^2 = -22.5 \text{ m}$$

e) $y_6 = y_A + v_{yA} t_6 + \frac{1}{2} a_y t_6^2 = -56.4 \text{ m} < -50 \text{ m}$

Problemi: cinematica in due dimensioni

7. Il coyote sta cercando di catturare la sua preda (road runner).

Il coyote calza un paio di pattini a propulsione che gli forniscono accelerazione orizzontale costante pari a **15.0 m/s²**

Il coyote parte da fermo da **70 m** dal bordo di un burrone all'istante in cui la preda scatta verso il burrone.

a) se la preda si muove a velocità costante, quale è la minima velocità della preda per raggiungere il burrone prima del coyote ?

b) se il burrone è a **100 m** al di sopra del fondo del canyon, dove atterra il coyote nel canyon ?

[i suoi pattini continuano a funzionare anche in volo!]

c) determinare le componenti della velocità del coyote proprio prima che atterri nel canyon.

(a) Coyote:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2; \quad 70.0 = \frac{1}{2}(15.0)t^2$$

Roadrunner:

$$\Delta x = v_i t; \quad 70.0 = v_i t$$

Solving the above, we get

$$v_i = \boxed{22.9 \text{ m/s}} \quad \text{and} \quad t = 3.06 \text{ s}$$

(b) At the edge of the cliff,

$$v_{xi} = at = (15.0)(3.06) = 45.8 \text{ m/s}$$

Substituting into $\Delta y = \frac{1}{2}a_y t^2$, we find

$$-100 = \frac{1}{2}(-9.80)t^2$$

$$t = 4.52 \text{ s}$$

$$\Delta x = v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = (45.8)(4.52 \text{ s}) + \frac{1}{2}(15.0)(4.52 \text{ s})^2$$

Solving,

$$\Delta x = \boxed{360 \text{ m}}$$

(c) For the Coyote's motion through the air

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t = 45.8 + 15(4.52) = \boxed{114 \text{ m/s}}$$

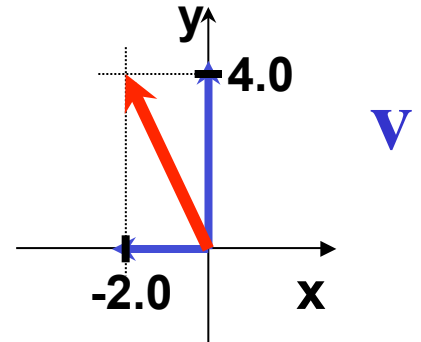
$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t = 0 - 9.80(4.52) = \boxed{-44.3 \text{ m/s}}$$

8. Una particella con velocità iniziale, a $t=0$, $\mathbf{v}_0 = -2.0 \mathbf{i} + 4.0 \mathbf{j} \text{ m/s}$ subisce una accelerazione costante di intensità $a = 3.0 \text{ m/s}^2$, il cui vettore forma un angolo $\theta = 130^\circ$ rispetto alla direzione positiva dell'asse x. Quale è la velocità della particella, espressa in versori e con ampiezza e direzione (rispetto all'asse x positivo), per $t=5.0 \text{ s}$?

Si tratta di moto bidimensionale con accelerazione costante.

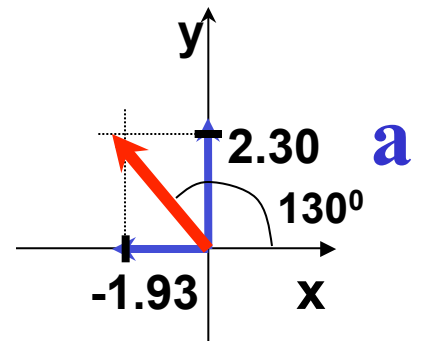
$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad \text{con} \quad v_{0x} = -2.0 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t \quad \text{con} \quad v_{0y} = 4.0 \text{ m/s}$$



$$a_x = a \cos \theta = (3.0 \text{ m/s}^2) \cos(130^\circ) = -1.93 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = a \sin \theta = (3.0 \text{ m/s}^2) \sin(130^\circ) = 2.30 \text{ m/s}^2$$



Trovo quindi i valori di $\mathbf{v}_x$ e $\mathbf{v}_y$ al tempo $t=5.0 \text{ s}$:

$$v_x = (-2.0 \text{ m/s}) + (-1.93 \text{ m/s}^2)(5.0 \text{ s}) = -11.65 \text{ m/s} \approx -12 \text{ m/s}$$

$$v_y = (4.0 \text{ m/s}) + (2.30 \text{ m/s}^2)(5.0 \text{ s}) = 15.50 \text{ m/s} \approx 16 \text{ m/s}$$

$$\vec{v} = (-12 \text{ m/s})\vec{i} + (16 \text{ m/s})\vec{j}$$

Esprimo ora $\mathbf{v}$ in coordinate **polar**:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 19.4 \text{ m/s} \approx 19 \text{ m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = 127^\circ \approx 130^\circ$$

$$\text{N.B. } \theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = \begin{cases} 127^\circ \\ -53^\circ \end{cases}$$

si decide graficamente!!

9. Una nave pirata é ormeggiata a 560 m da un forte che difende l'isola. Il cannone, posto nel forte a livello del mare a protezione dell'isola, imprime al proiettile un'angolazione di 27° e colpisce la nave. Calcolare
- il vettore velocità iniziale
 - il tempo di volo

Nel seguito verranno utilizzate le seguenti equazioni che si riferiscono al moto parabolico di un oggetto. La posizione nel tempo dell'oggetto é data dalle equazioni (1) e (2), rispettivamente per la posizione x e y . Le componenti della velocità lungo x e y sono date dalle equazioni (3) e (4) mentre l'equazione (5) collega la velocità lungo y con lo spostamento effettuato lungo quest'asse. La quantità a_y rappresenta l'accelerazione lungo y . I segni delle componenti della velocità e dell'accelerazione dipendono dalla scelta del sistema del riferimento.

$$\begin{cases} x_f = x_i + v_{xi}t & (1) \\ y_f = y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2 & (2) \end{cases} \quad \begin{cases} v_{xf} = v_{xi} & (3) \\ v_{yf} = v_{yi} + a_y t & (4) \\ v_{yf}^2 = v_{yi}^2 + 2a_y(y_f - y_i) & (5) \end{cases}$$

Soluzione :

- La posizione iniziale del proiettile é uguale a $x_i = 0$, $y_i = 0$ mentre quella finale é uguale a $x_f = d$ e $y_f = 0$. Le componenti della velocità iniziale sono date da $v_{xi} = v_i \cos(\theta)$ e $v_{yi} = v_i \sin(\theta)$. Dall'equazione (1) si ricava il tempo impiegato dal proiettile a raggiungere la nave che viene sostituito nell'equazione (2) da cui si ricava il modulo della velocità iniziale.

$$t_f = \frac{x_f}{v_i \cos(\theta)} \rightarrow 0 = x_f \frac{v_i \sin(\theta)}{v_i \cos(\theta)} - \frac{gx_f^2}{2v_i^2 \cos^2(\theta)} \rightarrow v_i = \sqrt{\frac{gx_f}{2 \tan(\theta) \cos^2(\theta)}}$$

$$v_i = \sqrt{\frac{(9.8 \times 560)}{2(0.51)(0.89)^2}} \text{ m/s} = 82.42 \text{ m/s}$$

Le componenti della velocità valgono

$$v_{xi} = v_i \cos(\theta) = (82.32 \times 0.89) \text{ m/s} = 73.35 \text{ m/s}$$

$$v_{yi} = v_i \sin(\theta) = (82.42 \times 0.45) \text{ m/s} = 37.42 \text{ m/s}$$

Il vettore velocità iniziale é dato da

$$\mathbf{v}_i = [73.44 \mathbf{i} + 37.42 \mathbf{j}] \text{ m/s}$$

Il tempo di volo é dato da t_f calcolato all'inizio. Sostituiamo i risultati ottenuti per calcolare il suo valore numerico

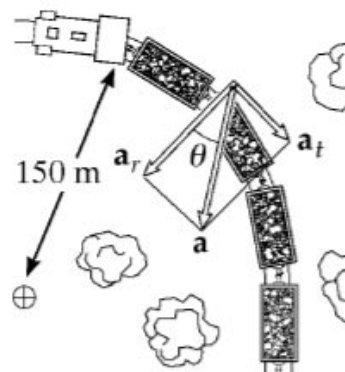
$$t_f = \frac{x_f}{v_i \cos(\theta)} = \frac{560}{73.44} \text{ s} = 7.62 \text{ s}$$

- 10.** Un treno affrontando una curva rallenta da **90.0 km/h** a **50.0 km/h** nei **15.0** secondi che impiega ad affrontare la curva.
 Il raggio della curva è **$r = 150$ m**.
 Calcolare l'accelerazione nel momento in cui la velocità del treno è **50.0 km/h**, assumendo che in questo momento il treno continui a decelerare.

Converto le unità di misura:

$$v_f = 50.0 \frac{km}{h} = 50.0 \frac{10^3 m}{60 \times 60 s} = 13.9 m/s$$

$$v_i = 90.0 \frac{km}{h} = 90.0 \frac{10^3 m}{60 \times 60 s} = 25.0 m/s$$



$$a_c = \frac{v_f^2}{r} = \frac{(13.9 m/s)^2}{150 m} = 1.29 m/s^2$$

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(v_f - v_i)}{\Delta t} = \frac{(13.9 - 25.0) m/s}{15.0 s} = \frac{-11.1 m/s}{15.0 s} = -0.74 m/s^2$$

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{(1.29 m/s^2)^2 + (-0.741 m/s^2)^2} = 1.48 m/s^2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_t}{a_c}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.74}{1.29}\right) = 29.9^\circ$$

- 11.** Calcolare accelerazione centripeta della Terra, dovuta al suo moto orbitale intorno al Sole.

[N.B. raggio dell'orbita terrestre $r = 1.5 \cdot 10^{11}$ m]

Ipotesi: approssimo l'orbita terrestre ad una circonferenza di raggio r .

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r / T)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 (1.5 \times 10^{11} m)}{(1 \text{ anno})^2} \\ &= \frac{4\pi^2 (1.5 \times 10^{11} m)}{(365 \times 24 \times 60 \times 60 s)^2} = 5.9 \times 10^{-3} m/s^2 \end{aligned}$$