

Problemi: densità e massa atomica

1. Quale massa di materiale di densità ρ è necessaria per costruire una crosta sferica di raggio interno r_1 e raggio esterno r_2 ?

$$V = V_o - V_i = \frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3)$$

$$\rho = \frac{m}{V}, \text{ so } m = \rho V = \rho \left(\frac{4}{3}\pi \right) (r_2^3 - r_1^3) = \boxed{\frac{4\pi\rho(r_2^3 - r_1^3)}{3}}$$

2. Una trave a I in acciaio, lunga **1.5 m**, ha la sezione mostrata in figura. La densità dell' acciaio è **$7.56 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$** .

a) quale è la massa della sbarra ?

b) se gli atomi sono per lo più di ferro, di massa atomica **55.9 u**, quanti atomi ci sono nella sezione ?

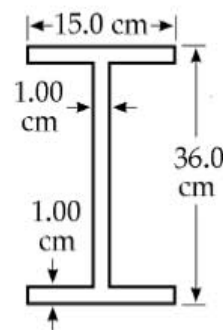
- (a) The cross-sectional area is

$$A = 2(0.150 \text{ m})(0.010 \text{ m}) + (0.340 \text{ m})(0.010 \text{ m}) = 6.40 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

The volume of the beam is

$$V = AL = (6.40 \times 10^{-3} \text{ m}^2)(1.50 \text{ m}) = 9.60 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\text{Thus, its mass is } m = \rho V = (7.56 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.60 \times 10^{-3} \text{ m}^3) = \boxed{72.6 \text{ kg}}$$



- (b) The mass of one typical atom is

$$m_0 = (55.9 \text{ u}) \left(\frac{1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}}{1 \text{ u}} \right) = 9.28 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

Now $m = Nm_0$ and the number of atoms is

$$N = \frac{m}{m_0} = \frac{72.6 \text{ kg}}{9.28 \times 10^{-26} \text{ kg}} = \boxed{7.82 \times 10^{26} \text{ atoms}}$$

Problemi: **analisi dimensionale**

- 1.** Supponiamo di scrivere la posizione di una particella che si muove con accelerazione costante al tempo t con

$$x = k a^m t^n$$

ove k è una costante adimensionale.

Mostrare con l'analisi dimensionale che tale espressione è corretta se $m=1$ e $n=2$. Può tale analisi dare il valore di k ?

The term x has dimensions of L , a has dimensions of LT^{-2} , and t has dimensions of T . Therefore, the equation $x = k a^m t^n$ has dimensions of

$$L = (LT^{-2})^m (T)^n \quad \text{or} \quad L^1 T^0 = L^m T^{n-2m}$$

The powers of L and T must be the same on each side of the equation. Therefore,

$$L^1 = L^m \quad \text{and} \quad \boxed{m = 1}$$

Likewise, equating terms in T , we see that $n - 2m$ must equal 0. Thus, $\boxed{n = 2}$

The value of k , a dimensionless constant, cannot be obtained by dimensional analysis.

- 2.** Dato un tronco di cono di raggi r_1 ed r_2 , ed altezza h , quali delle seguenti espressioni

i) $\pi(r_1 + r_2)[h^2 + (r_1 - r_2)^2]^{1/2}$

ii) $2\pi(r_1 + r_2)$

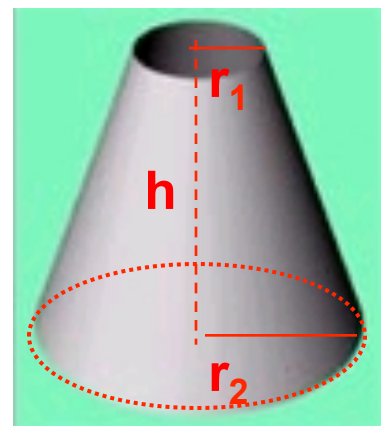
iii) $\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

misura

a) la circonferenza delle facce piane di base

b) il volume

c) l'area delle superficie curva ?



(a) Circumference has dimensions of L .

(b) Volume has dimensions of L^3 .

(c) Area has dimensions of L^2 .

Expression (i) has dimension $L(L^2)^{1/2} = L^2$, so this must be area (c).

Expression (ii) has dimension L , so it is (a).

Expression (iii) has dimension $L(L^2) = L^3$, so it is (b). Thus, $\boxed{(a) = \text{ii}; (b) = \text{iii}; (c) = \text{i}}$.

Problemi: cifre significative

1. Il raggio misurato di una sfera piena è $r = (6.50 \pm 0.20)$ cm
la massa misurata è $m = (1.85 \pm 0.02)$ kg.
Determinare la densità in kg/m^3 e la sua incertezza.

$$r = (6.50 \pm 0.20) \text{ cm} = (6.50 \pm 0.20) \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$m = (1.85 \pm 0.02) \text{ kg}$$

$$\rho = \frac{m}{\left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3}$$

also,

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\delta m}{m} + \frac{3\delta r}{r}$$

In other words, the percentages of uncertainty are cumulative.

Therefore,

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{0.02}{1.85} + \frac{3(0.20)}{6.50} = 0.103$$

$$\rho = \frac{1.85}{\left(\frac{4}{3}\right)\pi (6.5 \times 10^{-2} \text{ m})^3} = \boxed{1.61 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}$$
$$= 0.001608$$

$$\text{and } \rho \pm \delta\rho = \boxed{(1.61 \pm 0.17) \times 10^3 \text{ kg/m}^3}$$


$$\delta\rho = \delta\rho/\rho \times \rho$$

Problemi: sistemi di coordinate

1. Due punti nel piano cartesiano hanno coordinate (2,-4) e (-3,3).

Determinare:

- a) la distanza fra i due punti
- b) le loro coordinate polari.

$$(a) \quad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2.00 - [-3.00])^2 + (-4.00 - 3.00)^2}$$

$$d = \sqrt{25.0 + 49.0} = \boxed{8.60 \text{ m}}$$

$$(b) \quad r_1 = \sqrt{(2.00)^2 + (-4.00)^2} = \sqrt{20.0} = \boxed{4.47 \text{ m}}$$

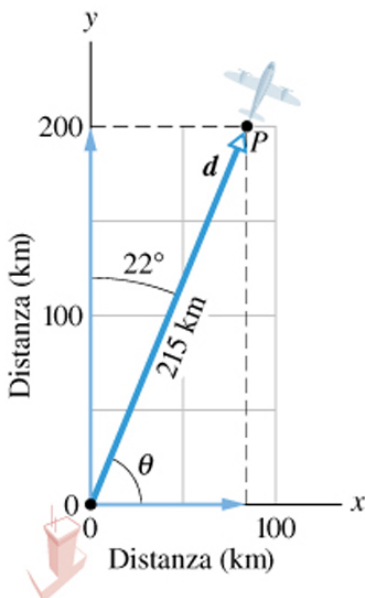
$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(-\frac{4.00}{2.00}\right) = \boxed{-63.4^\circ}$$

$$r_2 = \sqrt{(-3.00)^2 + (3.00)^2} = \sqrt{18.0} = \boxed{4.24 \text{ m}}$$

$$\theta_2 = \boxed{135^\circ} \text{ measured from the } +x \text{ axis.}$$

2. Un piccolo aereo decolla da un aeroporto in una giornata nuvolosa e viene avvistato più tardi a 215 km, in una direzione che forma un angolo di 22° verso est rispetto al nord.

A che distanze verso nord e verso est si trova l'aereo quando viene avvistato?



Per trovare le componenti di **d** considero l'angolo $\theta = 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$

da cui si ottiene:

$$d_x = d \cos \theta = (215 \text{ km}) \cos 68^\circ = 81 \text{ km}$$

$$d_y = d \sin \theta = (215 \text{ km}) \sin 68^\circ = 199 \text{ km}$$

L'aereo è quindi localizzato 199 km verso nord e 81 km verso est, rispetto all'aeroporto.

3. Se le coordinate polari del punto (x,y) sono (r,θ) , determinare le coordinate polari per i punti
- a) $(-x,y)$
 - b) $(-2x, -2y)$
 - c) $(3x, -y)$

We have $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

and

$$\theta = \tan^{-1}(y/x)$$

- (a) The radius for this new point is

$$\sqrt{(-x)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \boxed{r}$$

and its angle is

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{-x}\right) = \boxed{180^\circ - \theta}$$

- (b) $\sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2} = \boxed{2r}$. This point is in the third quadrant if (x, y) is in the first quadrant or in the fourth quadrant if (x, y) is in the second quadrant. It is at an angle of $\boxed{180^\circ + \theta}$.
- (c) $\sqrt{(3x)^2 + (-3y)^2} = \boxed{3r}$. This point is in the fourth quadrant if (x, y) is in the first quadrant or in the third quadrant if (x, y) is in the second quadrant. It is at an angle of $\boxed{-\theta}$.

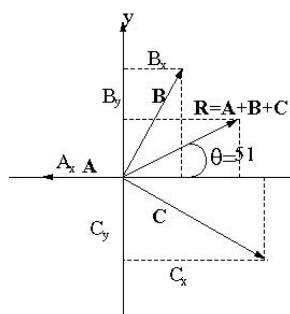
Problemi: vettori

1.

Dati i seguenti vettori:

- **A** di modulo 12 m in direzione Ovest
- **B** di modulo 18 m inclinato di 60° rispetto all'asse positivo delle x
- **C** di modulo 15 m inclinato di 330° rispetto all'asse positivo delle x

Calcolare il vettore somma **A+B+C** (modulo e angolo).



Il vettore **A** ha solo componente x in quanto è diretto verso Ovest ed inoltre è una componente di segno negativo perchè si trova sull'asse delle x negative.

Quindi

$$\begin{cases} A_x = -12\text{ m} \\ A_y = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Calcoliamo, ora, le componenti x e y del vettore **B** sapendo che il modulo è uguale a $B = 18\text{ m}$ e ha un'inclinazione di $\theta = 60^\circ$ con l'asse delle x . Quindi

$$\begin{cases} B_x = B \cos \theta = (18\text{ m}) \cdot \cos(60^\circ) = 9\text{ m} \\ B_y = B \sin \theta = (18\text{ m}) \cdot \sin(60^\circ) = 15.6\text{ m} \end{cases} \quad (12)$$

Il vettore **C**, di modulo 15 m , si trova nel quarto quadrante, per cui si possono calcolare le sue componenti utilizzando l'angolo al di sotto dell'asse delle x e cioè $360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$. In questo modo si trova che

$$\begin{cases} C_x = C \cos \theta = (15\text{ m}) \cdot \cos(30^\circ) = 13\text{ m} \\ C_y = C \sin \theta = -(15\text{ m}) \cdot \sin(30^\circ) = -7.5\text{ m} \end{cases} \quad (13)$$

Il segno meno della componente y dipende dal fatto che il vettore si trova nel quarto quadrante.

La somma dei tre vettori è data da

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} \quad (14)$$

dove

$$\begin{cases} R_x = A_x + B_x + C_x = (-12 + 9 + 13)\text{ m} = 10\text{ m} \\ R_y = A_y + B_y + C_y = 0 + 15.6 - 7.5 = 8.1\text{ m} \end{cases} \quad (15)$$

La direzione del vettore somma è pari a

$$\tan(\theta) = \frac{R_y}{R_x} = \frac{8.1\text{ m}}{10\text{ m}} = 0.81 \rightarrow \theta = 39^\circ \quad (16)$$

2.

Sapendo che il prodotto scalare tra i due vettori $\mathbf{A} = -2\mathbf{i} + z\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ vale 4, trovare il valore di z e l'angolo che si forma tra i due vettori.

Il prodotto scalare tra i due vettori si può calcolare utilizzando le componenti dei due vettori

$$C = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z = (-2) \times (1) + (0) \times (-2) + (z) \times (2) = -2 + 2z \quad (38)$$

Quindi

$$C = 4 = -2 + 2z \quad \rightarrow \quad z = \frac{4 + 2}{2} = 3 \quad (39)$$

L'angolo tra due vettori si calcola attraverso la definizione di prodotto scalare che utilizza i moduli dei due vettori, cioè

$$C = AB \cos(\theta) \quad (40)$$

Calcoliamo i moduli dei due vettori

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2 + (3)^2} = 3.6 \\ B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (2)^2} = 3 \end{cases} \quad (41)$$

L'angolo si ricava da

$$\cos(\theta) = \frac{C}{AB} = \frac{4}{(3.6 \times 3)} = 0.37 \quad \rightarrow \quad \theta = \arccos(0.37) = 68.26^\circ. \quad (42)$$

3. Somma e prodotto di vettori

A			B		
ax	ay	az	bx	by	bz
1	1	1	2	2	2
1	2	3	3	2	1
-1	-1	2	2	2	2
3	4	7	3	4	0
3	2	4	-3	-2	-1
1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	2	3	1	2	3

A		B	
ax	ay	bx	by
1	2	-3	0
-1	3	0	-3
2	3	-3	-3
4	-5	2	1
3	-2	3	-2
3	9	9	3

- Somma ?
- Differenza ?
- Prodotto scalare ?
- Prodotto vettoriale ?

- Rappresentazione polare ?

A		B	
Modulo	Angolo	Modulo	Angolo
1	23	6	23
2	34	5	46
3	-23	6	92
4	-123	5	184
5	72	6	368
6	330	5	359

- Somma ?
- Differenza ?
- Prodotto Scalare ?
- Prodotto Vettoriale ?

- Rappresentazione cartesiana ?

Soluzione

A				B			
ax	ay	az	bx	by	bz		
1	1	1	2	2	2		
1	2	3	3	2	1		
-1	-1	2	2	2	2		
3	4	7	3	4	0		
3	2	4	-3	-2	-1		
1	0	0	0	0	1		
1	0	0	1	0	0		
1	0	0	0	1	0		
1	2	3	1	2	3		



A		B	
Modulo	Angolo	Modulo	Angolo
1	23	6	23
2	34	5	46
3	-23	6	92
4	-123	5	184
5	72	6	368
6	330	5	359

A				B				Scalare	Vettoriale	Somma	Sottrazione
ax	ay	az	bx	by	bz						
1	1	1	2	2	2			6	0	0	-1
1	2	3	3	2	1			10	-4	8	-2
-1	-1	2	2	2	2			0	-6	6	-3
3	4	7	3	4	0			25	-28	21	0
3	2	4	-3	-2	-1			-17	6	-9	6
1	0	0	0	0	1			0	0	-1	1
1	0	0	1	0	0			1	0	0	0
1	0	0	0	1	0			0	0	1	1
1	2	3	1	2	3			14	0	0	0
A				B				Scalare	Vettoriale	Somma	Sottrazione
ax	ay	az	bx	by	bz						
1	2		-3	0				-3	0	0	4
-1	3		0	-3				-9	0	0	-1
2	3		-3	-3				-15	0	0	5
4	-5		2	1				3	0	0	2
3	-2		3	-2				13	0	0	0
3	9		9	3				54	0	0	-6
A				B				Scalare	Vettoriale	Somma	Sottrazione
Modulo	Angolo	Modulo	Angolo	Modulo	Angolo	Modulo	Angolo				
1	23	6	23					6	0	0	-4.6
2	34	5	46					9.78	0	2.079	-1.82
3	-23	6	92					-7.6	0	16.31	2.97
4	-123	5	184					12	0	-16	2.81
5	72	6	368					13.2	0	-27	-4.4
6	330	5	359					26.2	0	14.54	0.2