

APPELLO - FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE
A.A. 2021/22, 28 Giugno 2022

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

Dato il vettore $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ si calcolino le componenti del vettore $\mathbf{b} = -k\mathbf{a}$ dove $k = 3$. Si calcolino inoltre il modulo di $\mathbf{b}$ e il suo angolo di inclinazione φ rispetto all'asse x . Dopo aver disegnato $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ nel piano cartesiano, determinare:

- a) Le componenti del vettore somma $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ ed il suo modulo. Disegnare anch'esso sul piano cartesiano.
 - b) Il prodotto scalare tra i vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{c}$ e l'angolo θ compreso tra i due.
-

ESERCIZIO 2 - MECCANICA

Un corpo di massa $M = 5 \text{ kg}$ e velocità iniziale $v_i = 10 \text{ m/s}$ si muove lungo un piano orizzontale scabro con coefficiente d'attrito dinamico $\mu = 0.7$. Dopo una distanza $d = 4 \text{ m}$, il corpo urta in modo completamente anelastico un secondo corpo di massa $m = 0.5 M$ posto sul bordo di un gradino ad altezza $h = 20 \text{ m}$ dal suolo. Determinare:

- a) il lavoro svolto dalla forza d'attrito e la velocità del corpo M appena prima dell'urto;
 - b) la velocità del sistema $m+M$ subito dopo l'urto e al momento dell'impatto con il suolo.
-

ESERCIZIO 3 – FLUIDI

Una cassa di legno contenente oro giace sul fondo di un lago. La cassa ha la forma di parallelepipedo, cavo, di lati esterni $L_1=60\text{cm}$, $L_2=40\text{cm}$ e $L_3=40\text{cm}$. Le dimensioni della cavità interna sono $L_1'=40\text{cm}$, $L_2'=20\text{cm}$ e $L_3'=20\text{cm}$. La cassa viene sollevata dal fondo verso l'alto, lungo la verticale, mediante una fune di tensione $T=300 \text{ N}$ e con accelerazione costante $a = 0.1 \text{ m/s}^2$. Si determini:

- 1) la spinta di Archimede, S_A , agente sulla cassa, e la massa M_L della cassa di legno;
- 2) la massa M complessiva della cassa e dell'oro in essa contenuto, ed il volume V_{Au} dell'oro.

[N.B. densità legno: $\rho_L = 0.4 \text{ g/cm}^3$; densità oro $\rho_{Au} = 17 \text{ g/cm}^3$]

ESERCIZIO 4 – TERMODINAMICA

Cinque moli di gas perfetto monoatomico compiono le seguenti trasformazioni termodinamiche:

- 1) $A \rightarrow B$ isoterma, 2) $B \rightarrow C$ Isobara, 3) $C \rightarrow D$ Isocora, 4) $D \rightarrow A$ Isobara

dove $P_A = 3 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$, $V_A = 1 \text{ m}^3$, $P_B = 1/3 P_A$, $V_B = 3 V_A$, $V_C = 3/2 V_B$.

Determinare:

- a) le coordinate termodinamiche in A, B, C e D e rappresentare le trasformazioni nel piano PV.
- b) Il lavoro totale compiuto dal gas nelle singole trasformazioni e nell'intero ciclo, la variazione di energia interna e la quantità di calore scambiata dal gas nell'intero ciclo.

[N.B. $R = 8.31 \text{ J/K mol} = 0.082 \text{ l atm /K mol}$]

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA.

Testi, soluzioni ed esiti alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

SOLUZIONE – PREREQUISITI

Le componenti del vettore **b** si può calcolare moltiplicando le componenti di **a** per -k:

$$\mathbf{b} = (-3 \cdot a_x)\mathbf{i} + (-3 \cdot a_y)\mathbf{j} = -6\mathbf{i} - 9\mathbf{j}.$$

Il modulo di **b** è pari a

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{(-6)^2 + (-9)^2} = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} = 10.8$$

mentre l'angolo di inclinazione φ è pari a

$$\varphi = \operatorname{atan}(b_y/b_x) = \operatorname{atan}(-9/-6) = 56.3^\circ.$$

Il vettore somma **c** si ottiene da:

$$\mathbf{c} = (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} = (2 - 6)\mathbf{i} + (3 - 9)\mathbf{j} = -4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$$

da cui il modulo

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 7.2.$$

Il prodotto scalare tra i vettori **a** e **c** si ottiene per componenti:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = (a_x \cdot c_x) + (a_y \cdot c_y) = 2 \cdot (-4) + 3 \cdot (-6) = -26,$$

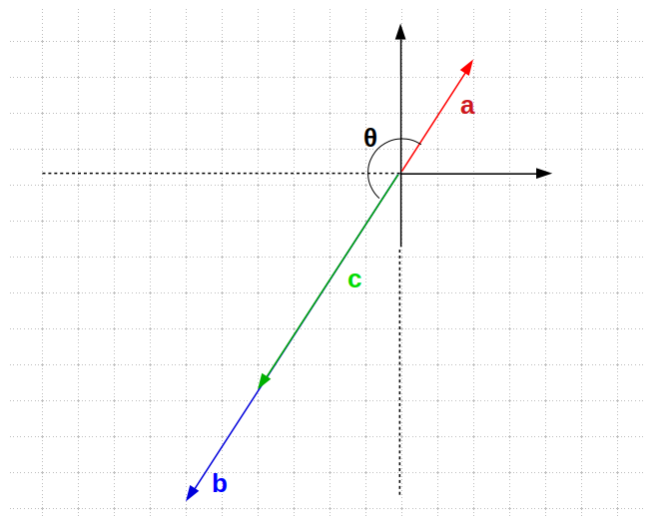
e, dalla definizione di prodotto scalare, si può ottenere l'angolo θ :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a}||\mathbf{c}| \cos\theta, \quad \text{da cui} \quad \cos\theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} / |\mathbf{a}||\mathbf{c}|.$$

Serve quindi anche il modulo di **a**, che è pari ad:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} = 3.6.$$

A questo punto $\cos\theta = -26/(3.6 \cdot 7.2) = -1$, da cui $\theta = \cos^{-1}(-1) = 180^\circ$, ovvero, i vettori **a** e **c** sono antiparalleli.



SOLUZIONE 2 – MECCANICA

a) Il lavoro svolto dalla forza d'attrito è $L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$, dove $|\mathbf{F}| = M\mu g$.

Pertanto:

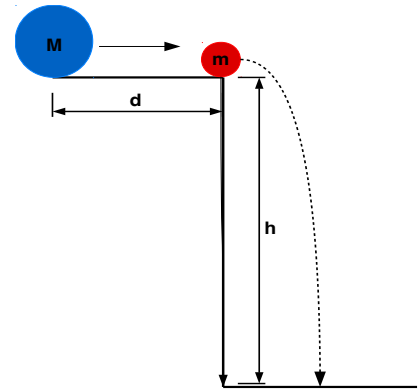
$$L = -M\mu g d = -5 \text{ kg} \cdot 0.7 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 4 \text{ m} = -137 \text{ J}.$$

Dal teorema dell'energia cinetica $\Delta K = L$ si ha:

$$\frac{1}{2} M v_f^2 - \frac{1}{2} M v_i^2 = L$$

e quindi

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + \frac{2L}{M}} = \sqrt{100 \text{ m}^2/\text{s}^2 - \frac{2 \cdot 137 \text{ J}}{5 \text{ kg}}} = \sqrt{45.2 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 6.7 \text{ m/s}.$$



La velocità v_f del corpo M, alla fine del tratto d, è la velocità immediatamente prima dell'urto con il corpo di massa di m.

b) Dopo l'urto completamente anelastico, i due corpi si muovono uniti con velocità V.

$$V = \frac{M}{M + 0.5M} \cdot v_f = \frac{2}{3} v_f = \frac{2}{3} \cdot 6.7 \text{ m/s} = 4.5 \text{ m/s}$$

Dalla conservazione dell'energia meccanica, assumendo le coordinate disegnate in figura, si ha che:

$$\frac{1}{2} (M + 0.5M) V^2 + (M + 0.5M) g h = \frac{1}{2} (M + 0.5M) v_f^2$$

$$\frac{1}{2} V^2 + g h = \frac{1}{2} v_f^2$$

$$V^2 + 2gh = v_f^2$$

da cui

$$V_f = \sqrt{V^2 + 2gh} = \sqrt{20.1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 2 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20 \text{ m}} = \sqrt{412.1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 20.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

SOLUZIONE 3 – FLUIDI

- 1) La forza risultante agente sulla cassa durante il sollevamento lungo la verticale y è pari

$$T + S_A - Mg = Ma \quad (1)$$

dove S_A è la spinta Archimedeana, T è la tensione della fune e M è la massa totale:

$$S_A = \rho_{H_2O} V_{\text{esterno}} g$$

$$M = M_{Au} + M_L$$

$$V_{\text{esterno}} = 96 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\rho_{H_2O} = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Si ottiene quindi

$$S_A = 940.8 \text{ N}$$

La massa M_L della cassa di legno è relativa al guscio di volume $V_L = (V_{\text{esterno}} - V_{\text{cavità}})$

$$M_L = \rho_L V_L = \rho_L (V_{\text{esterno}} - V_{\text{cavità}})$$

$$\text{dove } V_{\text{cavità}} = 16 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

da cui si ottiene

$$V_L = 80 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$M_L = 32 \text{ kg}$$

- 2) Dalla relazione (1) si ricava

$$M = (T + S_A)/(g + a) = 125.3 \text{ kg}$$

e pertanto

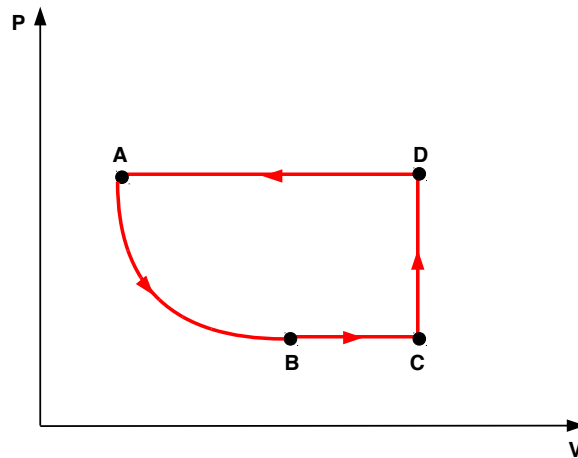
$$M_{Au} = M - M_L = (125.3 - 32) \text{ kg} = 93.3 \text{ kg} .$$

Il volume di oro è pertanto

$$V_{Au} = M_{Au}/\rho_{Au} = 5.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

SOLUZIONE 4 – TERMODINAMICA

a)



$$P_A = 3 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2,$$

$$V_A = 1 \text{ m}^3,$$

$$T_A = P_A V_A / nR = 3 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2 \cdot 1 \text{ m}^3 / (5 \cdot 8.31 \text{ J/molK}) = 722.0 \text{ K},$$

$$P_B = 1/3 P_A = 1 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2,$$

$$V_B = 3V_A = 3 \text{ m}^3,$$

$$T_B = T_A = 722.0 \text{ K},$$

$$P_C = P_B = 1 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2,$$

$$V_C = 3/2 V_B = 4.5 \text{ m}^3,$$

$$T_C = P_C V_C / nR = 1 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2 \cdot 4.5 \text{ m}^3 / (5 \cdot 8.31 \text{ J/molK}) = 1083.0 \text{ K},$$

$$P_D = P_A = 3 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2,$$

$$V_D = V_C = 4.5 \text{ m}^3,$$

$$T_D = P_D V_D / nR = 3 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2 \cdot 4.5 \text{ m}^3 / (5 \cdot 8.31 \text{ J/molK}) = 3249.1 \text{ K},$$

b) Il lavoro totale compiuto dal gas è dato dalla somma dei singoli lavori

$$L_{A \rightarrow B} = n \cdot R \cdot T_A \cdot \ln(V_B/V_A) = 5 \cdot 8.31 \text{ J/molK} \cdot 722.0 \text{ K} \cdot \ln(3) = 32957.4 \text{ J},$$

$$L_{B \rightarrow C} = P_B \cdot (V_C - V_B) = 1 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2 \cdot 1.5 \text{ m}^3 = 15000 \text{ J},$$

$$L_{C \rightarrow D} = 0 \text{ J},$$

$$L_{D \rightarrow A} = P_D \cdot (V_A - V_D) = 3 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2 \cdot (-3.5 \text{ m}^3) = -105000 \text{ J},$$

$$L_{\text{tot}} = L_{A \rightarrow B} + L_{B \rightarrow C} + L_{C \rightarrow D} + L_{D \rightarrow A} = 32957.4 \text{ J} + 15000 \text{ J} + 0 \text{ J} - 105000 \text{ J} = -57042.6 \text{ J}.$$

La variazione di energia interna da sull'intero ciclo è nulla quindi $\Delta E_{\text{tot}} = 0$. La quantità di calore scambiata dal gas nell'intero ciclo è uguale al lavoro compiuto dal gas quindi $Q_{\text{tot}} = L_{\text{tot}} = -57042.6 \text{ J}$.