

APPELLO - FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE
A.A. 2021/22, 21 Luglio 2022

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

Dati i vettori $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} + 14\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -5\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$ e $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$, Dopo aver disegnato $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ nel piano cartesiano:

- a)** Si calcoli il vettore $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$, il suo modulo ed il suo angolo di inclinazione φ rispetto all'asse x . Disegnarlo sul piano cartesiano.
- b)** Determinare il prodotto scalare tra i vettori $\mathbf{d}$ e $\mathbf{c}$ e l'angolo θ compreso tra i due. Si faccia un esempio delle componenti che dovrebbe avere un generico vettore $\mathbf{f}$, per essere perpendicolare al vettore $\mathbf{b}$.
-

ESERCIZIO 2 – MECCANICA

Sul tratto terminale di uno scivolo, una bambina di massa $m = 40 \text{ kg}$ sfreccia con velocità iniziale $v = 4.5 \text{ m/s}$ lungo uno piano orizzontale scabro ($\mu_d = 0.08$) di lunghezza $l = 3 \text{ m}$ che si trova ad un'altezza $h = 3 \text{ m}$ dal suolo. Al termine del piano la bambina incontra un piano liscio, inclinato di $\theta = 60^\circ$ rispetto all'orizzontale (verso l'alto) e lungo 0.5 m , che serve a catapultarla in una piscina. Si calcoli:

- a)** la velocità della bambina, componenti x ed y , nell'istante in cui si stacca dalla superficie del piano inclinato.
- b)** la massima quota y raggiunta in aria dalla bambina calcolata rispetto al suolo e la massima distanza x raggiunta, calcolata rispetto al punto di stacco dallo scivolo.
-

ESERCIZIO 3 – FLUIDI

Una gru deve sollevare dal fondo di un lago una sbarra rettangolare di acciaio ($\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$) avente dimensioni $0.2 \text{ m} \cdot 0.25 \text{ m} \cdot 10 \text{ m}$. Si determini:

- a)** la forza minima che la gru deve fornire quando la sbarra è immersa in acqua e quando la sbarra è fuori dall'acqua.
- b)** si discuta anche il caso in cui all'interno della sbarra sia presente una cavità di dimensioni $0.15 \text{ m} \cdot 0.1 \text{ m} \cdot 4 \text{ m}$.
-

ESERCIZIO 4 – TERMODINAMICA

Sette moli di gas perfetto **biatomico** compiono le seguenti trasformazioni termodinamiche:

1) A $\rightarrow$ B Isoterma, 2) B $\rightarrow$ C Isocora, 3) C $\rightarrow$ D Adiabatica,

dove $P_A = 2 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$, $V_A = 3 \text{ m}^3$, $V_B = 1.5 V_A$, $P_C = 2.6 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$, $V_D = 2 V_A$ e $T_D = 1000 \text{ K}$. Determinare:

- a)** le coordinate termodinamiche nei punti A, B, C e D e rappresentare le trasformazioni nel piano PV.
- b)** il calore Q , il lavoro W e la variazione di energia interna ΔE nelle singole trasformazioni e sulla trasformazione complessiva.
-

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA.

Testi, soluzioni ed esiti alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

SOLUZIONE 1 – PREREQUISITI

Le componenti del vettore **d** si ottengono da:

$$\mathbf{d} = (7-5-2)\mathbf{i} + (14-7-9)\mathbf{j} = 0\mathbf{i} - 2\mathbf{j} = -2\mathbf{j}, \text{ di modulo } |\mathbf{d}| = 2.$$

$$(|\mathbf{d}| = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2}) = \sqrt{4} = 2)$$

L'angolo di inclinazione φ è pari a -90° essendo nulla la sua componente lungo l'asse x e negativa la sua componente in y.

$$\varphi = \text{asen} (d_y/|\mathbf{d}|) = \text{asen}(-2/2) = -90^\circ.$$

Il prodotto scalare tra i vettori **d** e **c** si ottiene per componenti:

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{c} = (d_x * c_x) + (d_y * c_y) = 0 * 2 + (-2) * 9 = -18,$$

e, dalla definizione di prodotto scalare, si può ottenere l'angolo θ :

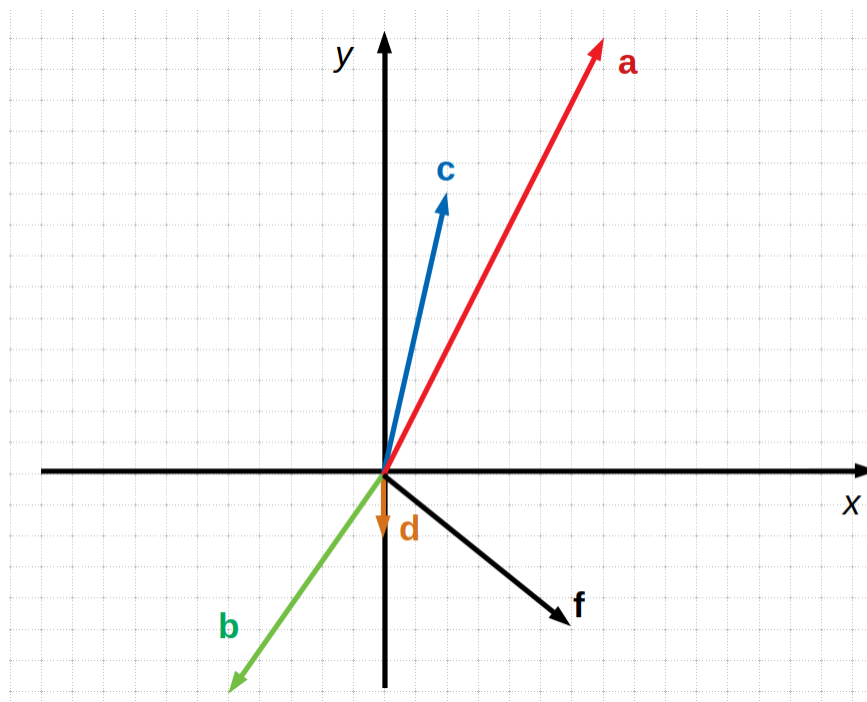
$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{d}||\mathbf{c}| \cos\theta, \text{ da cui } \cos\theta = \mathbf{d} \cdot \mathbf{c} / |\mathbf{d}||\mathbf{c}|.$$

$$\text{Serve quindi il modulo di } \mathbf{c} \text{ che è pari a } |\mathbf{c}| = \sqrt{(2)^2 + (9)^2} = \sqrt{85} = 9.2.$$

$$\text{A questo punto } \cos\theta = -18/(2 * 9.2) = -0.98, \text{ da cui } \theta = \cos^{-1}(-0.98) = 168.5^\circ.$$

Il vettore **f** = $7\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ per esempio è perpendicolare al vettore **b**, in quanto il loro prodotto scalare

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{b} = (f_x * b_x) + (f_y * b_y) = 7 * (-5) + (-5) * (-7) = -35 + 35 = 0.$$



SOLUZIONE 2 – MECCANICA

a) Il lavoro compiuto dalla forza d'attrito si ottiene dal teorema dell'energia cinetica $\Delta K = L$. Per cui si ha che lungo il piano orizzontale scabro:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2 = L$$

$$\text{dove } L = -m \cdot \mu \cdot g \cdot l$$

da cui

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2 = -m \cdot \mu \cdot g \cdot l \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 = -m \cdot \mu \cdot g \cdot l + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2$$

e quindi

$$\begin{aligned} v_f &= \sqrt{v_i^2 - 2\mu g l} = \sqrt{20.25 \, \text{m}^2/\text{s}^2 - 2 \cdot 9.8 \, \text{m/s}^2 \cdot 0.08 \cdot 3 \, \text{m}} = \sqrt{20.25 \, \text{m}^2/\text{s}^2 - 4.71 \, \text{m}^2/\text{s}^2} \\ &= \sqrt{15.6 \, \text{m}^2/\text{s}^2} = 3.94 \, \text{m/s}. \end{aligned}$$

Nel tratto percorso in salita invece non c'è attrito. E' sufficiente quindi scrivere

$\frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m v^2 + mgh$, dove v_f è la velocità finale del tratto precedente (ma iniziale nel tratto del piano inclinato) e dove h_2 è calcolata rispetto all'altezza a cui si trova il piano orizzontale scabro ed è uguale a $h_2 = 0.5 \, \text{m} \cdot \sin(60^\circ) = 0.43 \, \text{m}$. Si ricava quindi che la velocità (in modulo) alla fine del piano inclinato è data da:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_f^2 - 2gh_2} = \sqrt{15.6 \, \text{m}^2/\text{s}^2 - 2 \cdot 9.8 \, \text{m/s}^2 \cdot 0.43 \, \text{m}} = \sqrt{15.55 \, \text{m}^2/\text{s}^2 - 8.5 \, \text{m}^2/\text{s}^2} \\ &= \sqrt{7.12} = 2.66 \, \text{m/s}. \end{aligned}$$

Per ottenere le componenti di v in x e y , è sufficiente utilizzare

$$v_x = v \cdot \cos(60^\circ) = 2.66 \cdot 0.50 = 1.33 \, \text{m/s}$$

$$v_y = v \cdot \sin(60^\circ) = 2.66 \cdot 0.87 = 2.30 \, \text{m/s}$$

b) Si tenga conto che adesso l'unica accelerazione che agisce sulla bambina è quella di gravità e siamo in presenza di un moto di tipo parabolico. Dalla conservazione dell'energia

$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_y^2 + m \cdot g \cdot (h + h_2) = m \cdot g \cdot y_{\max}$, dove $y_{\max}$ è l'altezza massima raggiunta rispetto al suolo. All'altezza massima la velocità della bambina lungo la verticale sarà nulla.

$$y_{\max} = v_y^2 / 2g + (h + h_2) = (2.30 \, \text{m/s})^2 / (2 \cdot 9.8 \, \text{m/s}^2) + (3.0 \, \text{m} + 0.43 \, \text{m}) = 3.70 \, \text{m}.$$

E' possibile scomporre il moto lungo le direzioni x e y .

$$x = v_x \cdot t \quad (1)$$

$$y = (h + h_2) + v_y \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (2)$$

Dalla (2), imponendo $y = 0$, si può ricavare il tempo t necessario alla bambina per atterrare in piscina. Risolvendo l'equazione di secondo grado $3.43 + 2.30 \cdot t - 4.91 \cdot t^2 = 0$ si ottengono le soluzioni

$t_1 = -0.63 \, \text{s}$ e $t_2 = 1.10 \, \text{s}$. Scartando ovviamente la soluzione negativa ed inserendo il valore di t_2 in (1)

si può estrarre $x_{\max} = 1.32 \, \text{m} / 2 \cdot 1.10 \, \text{s} = 1.45 \, \text{m}$.

SOLUZIONE 3 – FLUIDI

a) La gru deve applicare una forza uguale e contraria alla risultante $\mathbf{F} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_a$. Il modulo della forza peso $\mathbf{F}_p$ si ottiene da $F_p = V \cdot \rho \cdot g$ dove $V = 0.2 \text{ m} \cdot 0.25 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} = 0.5 \text{ m}^3$, mentre ρ è data nel testo. Si ottiene il valore di $F_p = 3.675 \cdot 10^4 \text{ N}$ (diretta verso il basso). Il modulo della forza di Archimede è invece pari a $F_A = V \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g = 4.900 \cdot 10^3 \text{ N}$ (verso l'alto). La differenza tra le due è data da $F = F_p - F_A = 3.185 \cdot 10^4 \text{ N}$, diretta verso il basso. La gru dovrà esercitare una forza di pari intensità, diretta verso l'alto. Nel caso in cui la sbarra sia fuori dall'acqua, la gru dovrà semplicemente esercitare una forza di uguale intensità ma di verso opposto alla forza peso $F_p = 3.675 \cdot 10^4 \text{ N}$.

b) La cavità ha un volume pari a $V_c = 0.15 \text{ m} \cdot 0.1 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} = 0.06 \text{ m}^3$. Il volume di acciaio sarà quindi uguale a $V_a = V - V_c = 0.50 - 0.06 = 0.44 \text{ m}^3$. Essendo il volume di acqua spostato uguale al caso a), la forza di Archimede sarà la stessa del punto precedente $F_A = V \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g = 4.9 \cdot 10^3 \text{ N}$. Il modulo della forza peso sarà invece dato da $F_p = V_a \cdot \rho \cdot g = 0.44 \text{ m}^3 \cdot 7500 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 = 3.234 \cdot 10^4 \text{ N}$.

La gru dovrà quindi esercitare una forza diretta verso l'alto pari a

$$F = 3.234 \cdot 10^4 \text{ N} - 4.900 \cdot 10^3 \text{ N} = 2.744 \times 10^4 \text{ N}.$$

SOLUZIONE 4 – TERMODINAMICA

a)

$$P_A = 2 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2,$$

$$V_A = 3 \text{ m}^3,$$

$$T_A = P_A V_A / nR = 2 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2 \cdot 3 \text{ m}^3 / (7 \cdot 8.31 \text{ J/molK}) = 1031.5 \text{ K},$$

$$V_B = 1.5 V_A = 4.5 \text{ m}^3,$$

$$T_B = T_A = 1031.5 \text{ K},$$

$$P_B = nR T_B / V_B = (7 \cdot 8.31 \text{ J/molK} \cdot 1031.5 \text{ K}) / 4.5 \text{ m}^3 = 1.3 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2,$$

$$P_C = 2.6 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2,$$

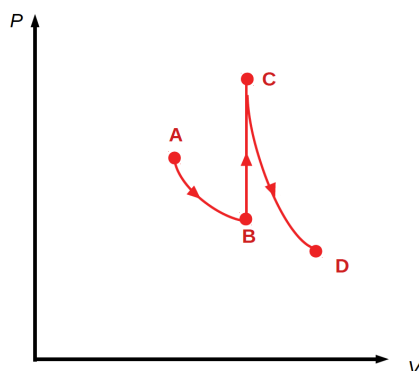
$$V_C = V_B = 4.5 \text{ m}^3,$$

$$T_C = P_C V_C / nR = 2.6 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2 \cdot 4.5 \text{ m}^3 / (7 \cdot 8.31 \text{ J/molK}) = 2011.3 \text{ K},$$

$$V_D = 2 V_A = 6 \text{ m}^3,$$

$$T_D = 1000 \text{ K},$$

$$P_D = nR T_D / V_D = (7 \cdot 8.31 \text{ J/molK} \cdot 1000 \text{ K}) / 6 \text{ m}^3 = 9.695 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2.$$



b) $\Delta E = Q - W$

A $\rightarrow$ B isoterma

$$\Delta E_{AB} = 0$$

$$W_{AB} = n \cdot R \cdot T_A \cdot \ln(V_B/V_A) = 7 \cdot 8.31 \text{ J/molK} \cdot 1031.5 \text{ K} \cdot \ln(1.5) = 24328.9 \text{ J},$$

$$Q_{AB} = W_{AB} = 24328.9 \text{ J}$$

B $\rightarrow$ C Isocora,

$$\Delta E_{BC} = n \cdot c_v \cdot (T_C - T_B) = 7 \cdot 5/2R \cdot (2011.3 - 1031.5) = 142487.4 \text{ J},$$

$$W_{BC} = 0$$

$$Q_{BC} = \Delta E_{BC} = 142487.4 \text{ J},$$

C $\rightarrow$ D Adiabatica,

$$\Delta E_{CD} = n \cdot c_v \cdot (T_D - T_C) = 7 \cdot 5/2R \cdot (1000 - 2011.3) = -147097.4 \text{ J},$$

$$W_{CD} = -\Delta E_{CD} = +147097.4 \text{ J},$$

$$Q_{CD} = 0.$$

Trasformazione complessiva A $\rightarrow$ D

$$W_{\text{tot}} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} = 24328.9 \text{ J} + 0 \text{ J} + 147097.4 \text{ J} = 171426.3 \text{ J}.$$

$$Q_{\text{tot}} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} = 24328.9 \text{ J} + 142487.4 \text{ J} + 0 \text{ J} = 166816.3 \text{ J}.$$

$$\Delta E_{\text{tot}} = \Delta E_{AB} + \Delta E_{BC} + \Delta E_{CD} = 0 \text{ J} + 142487.4 \text{ J} + -147097.4 \text{ J} = -4610.0 \text{ J}.$$