

ESERCIZIO 1 – FLUIDI

Un recipiente cilindrico, aperto superiormente, ha diametro $d = 1.5 \text{ m}$. Contiene acqua ed ha sul fondo un foro, che ha sezione $s = 5 \text{ cm}^2$, ed è inizialmente chiuso da un tappo. Tolto il tappo, l'acqua esce dal foro con portata volumetrica $Q = 2 \text{ litri/s}$. Calcolare:

- a) la **velocità** v_f con cui l'acqua esce inizialmente dal foro e la **velocità** v_L dell'acqua in un punto della superficie libera superiore;
- b) l'altezza h_L a cui si trova inizialmente la superficie libera dell'acqua, rispetto al fondo, ed il **volume** V di acqua contenuto nel recipiente.

[Nota: Supporre l'acqua nel recipiente un fluido ideale in moto stazionario e irrotazionale.]

ESERCIZIO 2 - TEMPERATURA/CALORE

Un blocchetto di rame di $m_1 = 0.25 \text{ kg}$ è riscaldato alla temperatura T_1 ed immerso successivamente in un recipiente contenente una massa d'acqua $m_2 = 0.1 \text{ kg}$, inizialmente alla temperatura $T_2 = 350 \text{ K}$. All'equilibrio, nel recipiente sono rimasti solo $m_3 = 0.01 \text{ kg}$ di acqua. Trascurando eventuali perdite di calore con l'esterno.

- a) Calcolare il calore Q_1 ceduto dal blocchetto di rame per riscaldare l'acqua alla temperatura di ebollizione e il calore Q_2 fornito per fare evaporare acqua;
- b) Calcolare la temperatura iniziale T_1 del blocchetto di rame.

[Nota: Si usino i seguenti dati: calore spec. Cu $c_1 = 387 \text{ J/(kg K)}$; calore spec. H₂O $c_2 = 4187 \text{ J/(kg K)}$; calore latente di ebollizione $L_E = 22.6 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$]

ESERCIZIO 3 – TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE

Un gas perfetto **biatomico**, pari a $n = 0.2 \text{ moli}$, compie una trasformazione ciclica tra gli stati A, B e C, come segue:

da A a B: **isoterma**, con $V_A = 5 \text{ l}$, $T_A = 900 \text{ K}$ e $p_B = p_A/3$;

da B a C: **isobara**, con $V_C = V_A$;

da C ad A: **isocora**.

- a) Dopo aver disegnato la trasformazione nel piano p-V, si calcolino le coordinate termodinamiche (p, V, T) in A, B e C ed il **lavoro** L compiuto dal gas durante la trasformazione **isoterma**;
 - b) Si calcoli il **calore scambiato** Q dal gas durante la trasformazione ciclica ed il **rendimento** della corrispondente macchina termica.
-

RECUPERO – PREREQUISITI

Dati i vettori spostamento $\mathbf{A} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = -2\mathbf{j}$, disegnarli nel piano cartesiano, calcolare il vettore differenza $\mathbf{S} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$, il modulo di $\mathbf{S}$, l'angolo φ di inclinazione rispetto all'asse orizzontale x . Disegnare $\mathbf{S}$ nel piano cartesiano. Calcolare il prodotto scalare tra $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

RECUPERO – CINEMATICA

Una particella viene lanciata da un'altezza di $h_0 = 0.5 \text{ m}$ con velocità $v_p = 11 \text{ m/s}$ inclinata di $\theta = 45^\circ$ rispetto all'orizzontale. Determinare la massima distanza orizzontale raggiunta.

RECUPERO – DINAMICA

Un corpo di massa $m = 2 \text{ kg}$ si trova alla base di un piano inclinato di $\theta = 45^\circ$, scabro ($\mu_d = 0.15$). Il corpo è tirato lungo il piano da una fune, con tensione costante T . Determinare la trazione T della fune con cui il corpo è tirato lungo il piano inclinato, con accelerazione costante $a = 8 \text{ m/s}^2$.

RECUPERO – ENERGIA/LAVORO

Un corpo di massa $m = 2 \text{ kg}$ si muove su un piano orizzontale scabro di lunghezza $S = 2 \text{ m}$, con coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.2$, partendo con velocità $v_i = 17 \text{ m/s}$. Determinare: energia cinetica e velocità del corpo m alla fine del tratto S .

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA.

Testi, soluzioni ed esiti alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

ESERCIZIO 1 – FLUIDI

a) La portata volumetrica Q , costante, è $Q = v \cdot S$ dove v è la velocità del fluido attraverso la sezione S del condotto. La velocità di efflusso dell'acqua dal foro v_f si calcola quindi dalla $v_f = Q/S_f$ dove S_f è la sezione del foro. Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$v_f = 2 \cdot 10^{-3} \text{ (m}^3/\text{s)} / 5 \cdot 10^{-4} \text{ (m}^2) = 4 \text{ m/s.}$$

Analogamente la velocità alla superficie libera superiore v_L è $v_L = Q/S_L$ dove S_L è la sezione del cilindro. Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$v_L = 2 \cdot 10^{-3} \text{ (m}^3/\text{s)} / 0.75^2 \cdot \pi \text{ (m}^2) = 1.1 \cdot 10^{-3} \text{ (m/s).}$$

b) Applicando il teorema di Bernoulli ai punti della superficie libera dell'acqua e a quelli del foro si ha:

$\frac{1}{2} \rho v_L^2 + \rho g h_L = \frac{1}{2} \rho v_f^2$ dove h_L è l'altezza dell'acqua contenuta nel cilindro. Il termine $\frac{1}{2} \rho v_L^2$ è trascurabile rispetto a $\frac{1}{2} \rho v_f^2$ e pertanto

$$h_L \cong \frac{1}{2} v_f^2 / g = 0.81 \text{ m.}$$

Il volume di acqua inizialmente contenuto è pertanto:

$$V = S_L h_L = 0.75^2 \cdot \pi \text{ (m}^2) \cdot 0.81 \text{ (m)} = 1.43 \text{ m}^3.$$

ESERCIZIO 2 – TEMPERATURA/CALORE

a) Il calore Q_1 ceduto dal blocchetto di rame per riscaldare l'acqua alla temperatura di ebollizione ($T_0 = 373 \text{ K}$) è uguale ed opposto al calore assorbito dall'acqua

$$Q_1 = - c_2 m_2 (T_0 - T_2) = - 4187 \text{ J/(kg K)} 0.1 \text{ kg} \times (373 - 350) \text{ K} = - 9630 \text{ J}$$

Il calore Q_2 ceduto dal blocchetto di rame per fare evaporare una massa d'acqua pari a $(m_2 - m_3)$ è uguale ed opposto al calore assorbito dalla massa d'acqua per evaporare

$$Q_2 = - L_E (m_2 - m_3) = - 22.6 \cdot 10^5 \text{ J/kg} (0.1 \text{ kg} - 0.01 \text{ kg}) = - 203400 \text{ J} = - 20.3 \cdot 10^4 \text{ J}$$

b) La temperatura iniziale T_1 del blocchetto si attiene eguagliando il calore ceduto dal blocchetto di rame al calore assorbito dall'acqua, che allo stato finale si troverà alla temperatura di ebollizione, ossia

$$- m_1 c_1 (T_0 - T_1) = - (Q_1 + Q_2) = 21.3 \cdot 10^4 \text{ J}$$

da cui si ottiene

$$m_1 c_1 T_1 = - (Q_1 + Q_2) + m_1 c_1 T_0$$

$$T_1 = (- (Q_1 + Q_2) + m_1 c_1 T_0) / (m_1 c_1) = 2574 \text{ K}$$

ESERCIZIO 3 – TERMODINAMICA

a)

Le coordinate termodinamiche si ricavano dall'equazione di stato dei gas perfetti $pV = nRT$ e sono le seguenti:

Stato A

$$V_A = 5 \text{ l} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_A = 900 \text{ K}$$

$$p_A = nR T_A / V_A = 2.99 \cdot 10^5 \text{ Pa} \sim 3 \text{ atm}$$

Stato B

$$T_B = T_A = 900 \text{ K}$$

$$p_B = p_A/3 \sim 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$$

$$V_B = nR T_B / p_B = 3 nR T_A / p_A = 3 V_A = 15 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Stato C

$$p_C = p_B \sim 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$$

$$V_C = V_A = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_C = p_C V_C / (nR) = p_B V_A / (nR) = 1/3 p_A V_A / (nR) = 1/3 T_A = 300 \text{ K}$$

Il lavoro svolto dal gas durante la trasformazione isoterma è pari a

$$L_{AB} = nRT_A \ln(V_B/V_A) = nRT_A \ln(3V_A/V_A) = nRT_A \ln(3) = 1643 \text{ J}$$

b) Il calore Q_{TOT} scambiato dal gas nell'intera trasformazione ciclica è pari alla somma dei calori scambiati nelle trasformazioni individuali, ove

$$Q_{AB} = L_{AB} = 1643 \text{ J} > 0$$

$$Q_{BC} = n c_p (T_C - T_B) = n \cdot 7/2 R (T_A/3 - T_A) = -n \cdot 7/3 R T_A = -3490 \text{ J} < 0$$

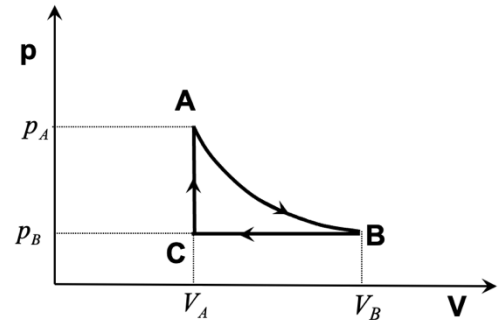
$$Q_{CA} = n c_v (T_A - T_C) = n \cdot 5/2 R (T_A - T_A/3) = n \cdot 5/3 R T_A = 2493 \text{ J} > 0$$

da cui segue

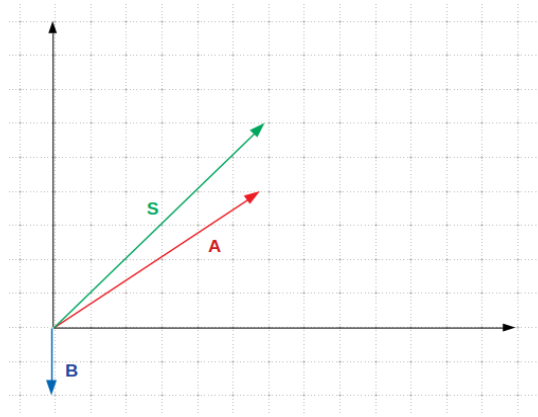
$$Q_{TOT} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 646 \text{ J}$$

Il rendimento ε della corrispondente macchina termica è pari al rapporto tra lavoro svolto dalla macchina ed il calore assorbito in un ciclo, come segue

$$\varepsilon = L_{TOT}/Q_{positivo} = Q_{TOT}/Q_{positivo} = (646 \text{ J})/(1643 \text{ J} + 2493 \text{ J}) = 0.16 = 16 \%$$



SOLUZIONE RECUPERO – PREREQUISITI



Il vettore differenza si può calcolare per componenti:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x)\mathbf{i} + (A_y - B_y)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{S} = (6 - 0)\mathbf{i} + (4 + 2)\mathbf{j} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$$

Il vettore $\mathbf{S}$ ha modulo $|\mathbf{S}|$ e inclinazione φ rispetto all'asse x , pari a:

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 8.5.$$

L'angolo di inclinazione φ è pari a:

$$\varphi = \text{atan}(S_y/S_x) = \text{atan}(6/6) = 45^\circ.$$

Il prodotto scalare tra i vettori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ si ottiene per componenti:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x \times B_x) + (A_y \times B_y) = 6 \times 0 + 4 \times (-2) = -8.$$

SOLUZIONE RECUPERO – CINEMATICA

La massima distanza orizzontale raggiunta si ottiene dal sistema di equazioni

$$0 = h_0 + v_{py}t - 1/2 gt^2$$

$$x_f = v_{px}t$$

dove

$$v_{px} = v_p \cos\theta = 11 \sin 45^\circ \text{ m/s} = 7.8 \text{ m/s}$$

$$v_{py} = v_p \sin\theta = 11 \cos 45^\circ \text{ m/s} = 7.8 \text{ m/s}$$

Dalla prima equazione si ottiene:

$$t = \frac{v_{py} + \sqrt{v_{py}^2 + 2gh_0}}{g} = \frac{7.8 + \sqrt{7.8^2 + 2 \cdot 9.8 \cdot 0.5}}{9.8} = 1.7 \text{ s}$$

e quindi:

$$x_f = v_{px} \cdot t = 7.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1.7 \text{ s} = 13.26 \text{ m}$$

SOLUZIONE RECUPERO – DINAMICA

La tensione della fune si ricava dal bilancio delle forze:

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{\text{att}} + \mathbf{T} = m \mathbf{a}$$

ove $\mathbf{F}_{\text{net}}$, $\mathbf{F}_g$, $\mathbf{F}_{\text{att}}$, $\mathbf{T}$ e $\mathbf{a}$ sono vettori.

Proiettando l'equazione sull'asse x, lungo il piano inclinato, si ottiene:

$$-mg \sin\theta - \mu_d mg \cos\theta + T = ma$$

ove il modulo della forza di attrito è pari a $F_{\text{att}} = \mu_d N = \mu_d mg \cos\theta$

La tensione è data da

$$T = \mu_d mg \cos\theta + mg \sin\theta + ma = m(\mu_d g \cos\theta + g \sin\theta + a) =$$
$$2 \text{ kg} \cdot (0.15 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) = 31.9 \text{ N}$$

SOLUZIONE RECUPERO – ENERGIA/LAVORO

Lungo il tratto S l'unica forza che compie lavoro, a scapito della energia cinetica iniziale, è la forza di attrito:

$$\Delta K = L_{\text{att}}$$

$$\Delta K = 1/2 m v_f^2 - 1/2 m v_i^2 = \mathbf{F}_{\text{att}} \cdot \mathbf{d} = -\mu N d = -\mu mg d = -0.2 \times 2 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 2 \text{ m} = -7.84 \text{ J}$$

$$K_f = 1/2 m v_f^2 = \Delta K + 1/2 m v_i^2 = -7.84 \text{ J} + 0.5 \times 2 \text{ kg} \times 17^2 (\text{m/s})^2 = 281.2 \text{ J}$$

$$v_f = \sqrt{2 \times K_f / m} = \sqrt{2 \times 281.2 \text{ J} / 2 \text{ kg}} = 16.8 \text{ m/s}$$