

1° PARZIALE - FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE
A.A. 2023/2024, 2 febbraio 2024

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

Siano dati i vettori $\vec{a} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 8\vec{z}$ e $\vec{b} = -\vec{j} + 4\vec{z}$. Determinare:

- a) i vettori $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{d} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$;
b) l'angolo compreso tra $\vec{e} = \frac{\vec{c}}{2}$ ed $\vec{f} = \frac{\vec{d}}{2}$.

ESERCIZIO 2 – CINEMATICA

Un oggetto di massa $m = 2\text{kg}$ viene lanciato **orizzontalmente** dalla sommità di un palazzo con una velocità iniziale pari a $v = 3.5 \text{ m/s}$. Considerando che il tempo di caduta dell'oggetto è $t_c = 4\text{s}$, si calcoli:

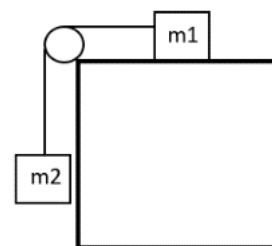
- a) l'**altezza** del palazzo e la **gittata**;
b) la **velocità finale** dell'oggetto (modulo, componenti e angolo rispetto all'orizzontale).

ESERCIZIO 3 – DINAMICA

Si considerino due masse poste come in figura. $m_1 = 2\text{kg}$ poggia su piano scabro con coefficiente di attrito ignoto.

Sapendo che $m_2 = 3\text{kg}$ e che la tensione della fune è $T = 27\text{N}$, determinare:

- a) l'**accelerazione** delle masse m_1 e m_2 ;
b) il coefficiente di attrito dinamico μ ;
c) **Facoltativo**: quanto dovrebbe valere il coefficiente di attrito statico μ_s per mantenere il sistema in equilibrio?



ESERCIZIO 4 – LAVORO ED ENERGIA

Una pallina di massa $m = 1\text{kg}$ è tenuta ferma alla sommità di un piano inclinato e comprime una molla (con costante elastica $k = 900 \text{ N/m}$) di un tratto $\Delta x = 20 \text{ cm}$. Il piano, liscio, presenta un angolo di inclinazione $\theta = 40^\circ$ rispetto all'orizzontale e una lunghezza di $l = 3\text{m}$. Ad un certo punto la pallina viene lasciata libera di muoversi e dopo aver raggiunto la base del piano inclinato percorre un tratto rettilineo senza attrito. Alla fine del tratto rettilineo è presente un secondo piano inclinato, con inclinazione $\alpha = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale e coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.4$. Determinare:

- a) la **velocità** della pallina alla **base** del primo piano inclinato e alla **fine** del tratto rettilineo;
b) quanto **spazio** percorre la pallina sul secondo piano inclinato prima di fermarsi completamente.

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA.
Testi, soluzioni ed esiti su ARIEL e alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

SOLUZIONE ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

a) I vettori $\vec{c}$ e $\vec{d}$ sono i seguenti:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (6 + 0)\mathbf{i} + (-3 - 1)\mathbf{j} + (8 + 4)\mathbf{z} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{z}$$

$$\vec{d} = -2\vec{a} + 2\vec{b} = (-12 + 0)\mathbf{i} + (6 - 2)\mathbf{j} + (-16 + 8)\mathbf{z} = -12\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{z}$$

b) Calcoliamo come prima cosa i vettori $\vec{e}$ ed $\vec{f}$

$$\vec{e} = \frac{\vec{c}}{2} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{z}$$

$$\vec{f} = \frac{\vec{d}}{2} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{z}$$

e i rispettivi moduli $|\vec{e}|$ ed $|\vec{f}|$:

$$|\vec{e}| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2} = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

$$|\vec{f}| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} = \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

Per calcolare l'angolo compreso tra i vettori utilizziamo la seguente definizione di prodotto scalare:

$$\vec{e} \cdot \vec{f} = |\vec{e}| |\vec{f}| \cos \theta$$

Dove l'angolo θ è l'angolo compreso tra $\vec{e}$ ed $\vec{f}$.
Quindi:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{e} \cdot \vec{f}}{|\vec{e}| |\vec{f}|}$$

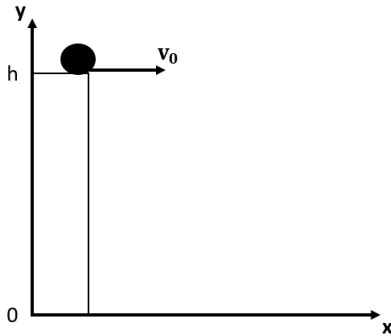
E il prodotto scalare $\vec{e} \cdot \vec{f}$ lo calcoliamo nel seguente modo:

$$\vec{e} \cdot \vec{f} = e_x f_x + e_y f_y + e_z f_z = 3(-6) + (-2)2 + 6(-4) = -18 - 4 - 24 = -46$$

Otteniamo quindi:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{e} \cdot \vec{f}}{|\vec{e}| |\vec{f}|} = \cos^{-1} \frac{-46}{7 \cdot 2\sqrt{14}} = \cos^{-1} \frac{-23}{7\sqrt{14}} = 151^\circ$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2 – CINEMATICA



Il moto descritto dall'oggetto che cade è di tipo parabolico. L'oggetto viene lanciato orizzontalmente dal palazzo quindi, rispetto al sistema di riferimento scelto in figura:

$$\begin{cases} v_{0x} = 3.5 \text{ m/s} \\ v_{0y} = 0 \text{ m/s} \end{cases}$$

- a) Per calcolare l'altezza del palazzo consideriamo il moto dell'oggetto rispetto all'asse y. Il moto verticale è uniformemente accelerato con legge oraria:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Conoscendo il tempo di caduta, determiniamo direttamente l'altezza del palazzo y_0 , imponendo $v_{0y} = 0$ e la posizione y al tempo di caduta $y(t_c) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= y_0 - \frac{1}{2}gt_c^2 \\ y_0 &= \frac{1}{2}gt_c^2 = 78.4 \text{ m} \end{aligned}$$

la gittata si determina dal moto orizzontale, rettilineo ed uniforme, assumendo $x_0 = 0$:

$$x(t_c) = v_{0x}t_c = 14 \text{ m}$$

- b) La componente x della velocità finale sarà uguale alla componente x della velocità iniziale, essendo il moto orizzontale di tipo rettilineo uniforme

$$v_{f,x} = 3.5 \text{ m/s}$$

La componente y della velocità finale si ottiene invece dalla relazione

$$v_y(t_c) = v_{0y} - gt_c = -gt_c = -39.2 \text{ m/s}$$

Il modulo della velocità finale è quindi

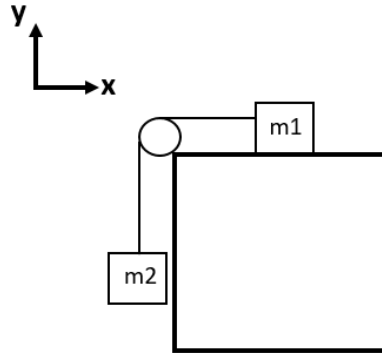
$$v_f = \sqrt{v_{f,x}^2 + v_{f,y}^2} = \sqrt{\left(3.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(-39.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 39.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e l'angolo di inclinazione rispetto all'asse x orizzontale si ottiene come segue:

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{v_{f,y}}{v_{f,x}} = \text{tg}^{-1} \frac{-39.2}{3.5} = -85^\circ$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3 - DINAMICA

Scegliamo un Sistema di riferimento, come per esempio quello indicato in figura.



- a) L'accelerazione $\mathbf{a}$ delle masse sarà uguale in modulo, essendo i corpi collegati, e sarà antiparallela all'asse x per il corpo 1 e antiparallela all'asse y per il corpo 2. Il modulo di $\mathbf{a}$ può essere ricavato considerando le forze che agiscono sul blocco 2. Infatti, rispetto al Sistema di riferimento scelto:

$$T - m_2 g = -m_2 a$$

$$a = g - \frac{T}{m_2} = 0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- b) Per quanto riguarda il blocco 1 invece, rispetto al Sistema di riferimento scelto, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} F_A - T = -m_1 a & (\text{asse } x) \\ N - m_1 g = 0 & (\text{asse } y) \end{cases}$$

Considerando quindi che $N = m_1 g$ e che $F_A = \mu N$, abbiamo che:

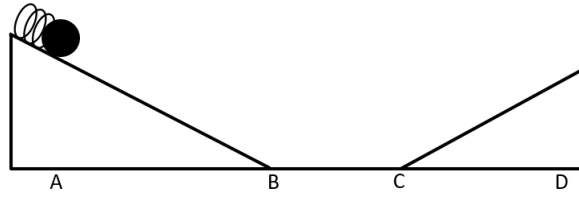
$$\mu m_1 g - T = -m_1 a$$

$$\mu = \frac{T - m_1 a}{m_1 g} = 1.3$$

- c) **Facoltativo:** se il sistema è in equilibrio, l'accelerazione di entrambi i corpi deve essere nulla ($a=0$). Pertanto la tensione della fune diventa $T=m_2 g$ e il coefficiente di attrito statico risulta

$$\mu_s = \frac{T}{m_1 g} = \frac{m_2 g}{m_1 g} = 1.5$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4 – LAVORO ED ENERGIA



- a) Per determinare la velocità della pallina alla base del piano inclinato (punto B) è sufficiente applicare la conservazione dell'energia meccanica, non essendo presenti forze di attrito. Eguagliamo l'energia meccanica del punto A, di partenza, con quella del punto B

$$E_A = E_B$$

$$\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$v_B^2 = \frac{k}{m}(\Delta x)^2 + 2gh_A$$

$$v_B = \sqrt{\frac{k}{m}(\Delta x)^2 + 2gh_A} = 8.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

sapendo che il piano inclinato è lungo $l=3\text{m}$, per cui $h_A = l \sin\theta = 1.9 \text{ m}$.

La velocità della pallina alla fine del tratto rettilineo (punto C) è uguale alla velocità v_B essendo il tratto rettilineo senza attrito, per cui vale la conservazione dell'energia meccanica ($v_B = v_C$).

- b) Dal punto C la pallina sale lungo il secondo piano inclinato (con attrito). Per determinare lo spazio percorso prima di fermarsi completamente utilizziamo il teorema Lavoro-Energia cinetica ($\Delta K = L$), dove si considera il lavoro totale compiuto dalle forze che agiscono sulla pallina. In questo caso, le forze che compiono lavoro sono la forza di attrito e la forza peso:

$$L_A = \vec{F}_A \cdot \vec{s} = F_A s \cos(180^\circ) = -F_A s = -\mu mg \cos \alpha s$$

$$L_P = \vec{F}_{Px} \cdot \vec{s} = F_{Px} s \cos(180^\circ) = -F_{Px} s = -mg \sin \alpha s$$

da cui segue (ponendo la velocità nel punto D uguale a zero):

$$\frac{1}{2}mv_D^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = L_P + L_A$$

$$-\frac{1}{2}mv_C^2 = -mg \sin \alpha s - \mu mg \cos \alpha s$$

$$s mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = \frac{1}{2}mv_C^2$$

$$s = \frac{v_C^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} = 4.4 \text{ m}$$