

ESERCIZIO 1 – FLUIDI

Si consideri un cubo di piombo ($\rho_{\text{Pb}} = 11.3 \text{ g/cm}^3$) che pesa $F_{\text{p,cubo1}} = 42.5 \text{ N}$ e una sfera di materiale non specificato di volume pari a quello del cubo. Entrambi i corpi sono posti in acqua. Calcolare:

- a) la **spinta di Archimede** agente sui corpi (specificandone intensità, direzione e verso) e la **densità della sfera**, considerandola completamente immersa in acqua e in condizione di equilibrio.

Si consideri ora un secondo cubo, uguale al primo, ma che presenta al suo interno una cavità cubica vuota. Il peso di questo cubo è $F_{\text{p,cubo2}} = 12 \text{ N}$. Calcolare:

- b) la **spinta di Archimede** del nuovo cubo e la lunghezza del **lato L** della cavità presente al suo interno.
-

ESERCIZIO 2 - TEMPERATURA/CALORE

In un recipiente termicamente isolato contiene $m = 250 \text{ g}$ di acqua a temperatura di 293 K . Nel contenitore vengono successivamente immersi 40 g di ghiaccio a temperatura di 265 K .

- a) Determinare la quantità di calore che l'acqua deve cedere per portare il ghiaccio alla temperatura di fusione e la quantità di calore necessaria per fonderlo completamente;
b) Calcolare la temperatura dell'acqua nell'istante in cui il ghiaccio è fuso completamente.

[Nota: calore spec. ghiaccio $c_1 = 2051 \text{ J/(kg K)}$; calore spec. H_2O $c_2 = 4187 \text{ J/(kg K)}$;
calore latente $L_F = 3.33 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$]

ESERCIZIO 3 – TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE

Un gas perfetto **biatomico**, pari a $n = 0.3 \text{ moli}$, compie una trasformazione ciclica tra gli stati A, B e C, come segue:

- i) da A a B: **isoterma**, con $V_A = 4 \text{ l}$, $T_A = 900 \text{ K}$ e $p_B = p_A/4$;
ii) da B a C: **isobara**, con $V_C = V_A$;
iii) da C ad A: **isocora**.
c) Dopo aver disegnato la trasformazione nel piano p-V, si calcolino le coordinate termodinamiche (p, V, T) in A, B e C;
d) Si calcoli il lavoro compiuto dal gas.
(Nota: $R = 8.31 \text{ J/Kmol} = 0.082 \text{ l atm /Kmol}$)
e) **Facoltativo**: Si calcoli il rendimento della macchina termica associata.
-

RECUPERO – PREREQUISITI

Siano dati in un piano cartesiano ortogonale XY i vettori $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ e $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j}$. Determinare i vettori $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{w} = \vec{a} - \vec{b}$ in modulo, direzione e verso e rappresentarli nel piano;

RECUPERO – CINEMATICA

Un corpo si muove con velocità $v = 1.37 \text{ m/s}$ su un gradino orizzontale liscio di lunghezza $AB = 45 \text{ cm}$ e altezza $BC = 35 \text{ cm}$. Giunto alla fine del gradino il corpo cade al suolo. Determinare la lunghezza del tratto orizzontale CH , dove H è il punto di caduta al suolo.

RECUPERO – DINAMICA

Un corpo di massa $m = 500 \text{ g}$ scende lungo un piano scabro, inclinato di un angolo $\theta = 45^\circ$. Determinare il coefficiente di attrito μ affinché il corpo scenda lungo il primo piano inclinato con velocità costante $v = 7 \text{ m/s}$.

RECUPERO – ENERGIA/LAVORO

Un corpo di massa $m = 500 \text{ g}$ viene messo in movimento su un piano orizzontale scabro (coefficiente di attrito $\mu = 1$), con velocità iniziale $v = 7 \text{ m/s}$. Determinare la velocità del corpo dopo un tratto $BC = 1 \text{ m}$. Successivamente il corpo sale lungo un piano liscio, inclinato di un angolo $\phi = 30^\circ$. Determinare la velocità del corpo nel punto D , a quota $h_D = 30 \text{ cm}$ rispetto al piano orizzontale.

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA.

Testi, soluzioni ed esiti alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

ESERCIZIO 1 – FLUIDI

a) Calcoliamo come prima cosa il volume del cubo:

$$F_{p,cubo} = m_{cubo}g = \rho_{Pb}V_{cubo}g$$

da cui segue

$$V_{cubo} = \frac{F_{p,cubo}}{\rho_{Pb}g} = 3.8 \cdot 10^{-4} m^3$$

Possiamo calcolare la spinta di Archimede agente sul cubo (sapendo che la densità dell'acqua è circa 1000 kg/m^3):

$$S_{cubo} = \rho_{h2o}V_{cubo}g = 3.8N$$

Per ipotesi

$$V_{sfera} = V_{cubo}$$

Quindi le due spinte di Archimede sono uguali:

$$S_{sfera} = S_{cubo} = 3.8N$$

La densità della sfera si può dedurre considerando che la condizione di equilibrio per un corpo completamente immerso si ottiene quando la densità dell'oggetto è uguale a quella del liquido nel quale esso è posto, quindi ci aspettiamo che sia 1000 kg/m^3 .

Considerando infatti la condizione di equilibrio si ottiene:

$$S_{sfera} - F_{p,sfera} = \rho_{h2o}V_{sfera}g - \rho_{sfera}V_{sfera}g = (\rho_{h2o} - \rho_{sfera})V_{sfera}g = 0$$

e quindi, come ci aspettavamo

$$\rho_{h2o} = \rho_{sfera}$$

b) La spinta di Archimede del cubo con cavità sarà identica a quella del cubo senza cavità poiché la spinta di Archimede dipende solo dalla massa di liquido spostato.

Il volume della cavità si trova a partire dalla differenza di peso dei due cubi, nel seguente modo:

$$L^3 = V_{cavità} = \frac{F_{p,cubopieno} - F_{p,cuboconcavità}}{\rho_{Pb}g} = 2.810^{-4} m^3$$

da cui segue che il lato L della cavità è pari a

$$L = 0.07m$$

ESERCIZIO 2 – TEMPERATURA/CALORE

a) Il calore che serve per portare la temperatura del ghiaccio a 0 gradi Celsius è pari a

$$Q_0 = m_g c_g \Delta T = 656 \text{ J}$$

mentre il calore per fondere completamente il ghiaccio è pari a

$$Q_F = m_g L = 13320 \text{ J}$$

Il calore necessario totale per fondere completamente il ghiaccio è quindi

$$Q_{\text{TOT}} = Q_0 + Q_F = 1.4 \cdot 10^4 \text{ J}$$

b) La temperatura T_a dell'acqua nell'istante in cui il ghiaccio è completamente fuso si ottiene eguagliando il calore assorbito dal ghiaccio con il calore ceduto dall'acqua:

$$Q_{\text{TOT}}(\text{assorbito}) = - m_a c_a (T_a - T_{i,a})$$

da cui si ricava

$$m_a c_a T_a = m_a c_a T_{i,a} - Q_{\text{TOT}}$$

$$T_a = (m_a c_a T_{i,a} - Q_{\text{TOT}}) / m_a c_a = 279.6 \text{ K}$$

ESERCIZIO 3 – TERMODINAMICA

a) Le coordinate termodinamiche si ricavano dall'equazione di stato dei gas perfetti

$$pV = nRT$$

e sono le seguenti:

Stato A

$$V_A = 4 \text{ l} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_A = 900 \text{ K}$$

$$p_A = nR T_A / V_A = 5.6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Stato B

$$T_B = T_A = 900 \text{ K}$$

$$p_B = p_A/4 \sim 1.4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

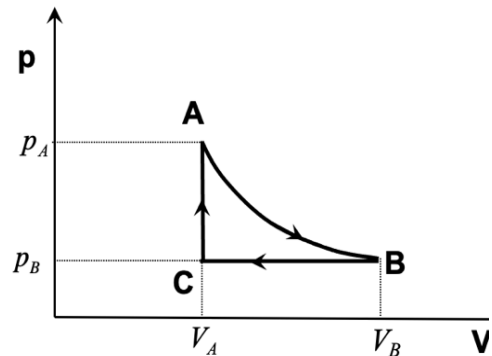
$$V_B = nR T_B / p_B = 4 nR T_A / p_A = 4 V_A = 16 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Stato C

$$p_C = p_B \sim 1.4 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$$

$$V_C = V_A = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_C = p_C V_C / (nR) = p_B V_A / (nR) = 1/4 p_A V_A / (nR) = 1/4 T_A = 225 \text{ K}$$



b) Il lavoro svolto dal gas durante la trasformazione isoterma è pari a

$$L_{AB} = nRT_A \ln(V_B/V_A) = nRT_A \ln(4V_A/V_A) = nRT_A \ln(4) = 3110 \text{ J}$$

Il lavoro svolto durante la trasformazione isobara è pari all'area del rettangolo sotto la curva BC

$$L_{BC} = p_B (V_C - V_B) = -1680 \text{ J}$$

Il lavoro svolto durante la trasformazione isocora è nullo.

Il lavoro totale svolto durante il ciclo è pertanto:

$$L_{TOT} = L_{AB} + L_{BC} = 1430 \text{ J}$$

c) Facoltativo

Il rendimento di una macchina termica è definito come il rapporto tra il lavoro svolto ed il calore Q_c assorbito (positivo):

$$\eta = L_{TOT}/Q_c$$

In questo caso si ha assorbimento di calore lungo la isoterma e l'isocora:

$$Q_{AB} = L_{AB} = 3110 \text{ J}$$

$$Q_{CA} = n c_V (T_A - T_C) = 4207 \text{ J}$$

$$Q_c = Q_{AB} + Q_{CA} = 7317 \text{ J}$$

da cui si ottiene $\eta = 0.195$

SOLUZIONE RECUPERO – PREREQUISITI

Vettore somma:

$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} = (2 + 1)\mathbf{i} + (4 - 3)\mathbf{j} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

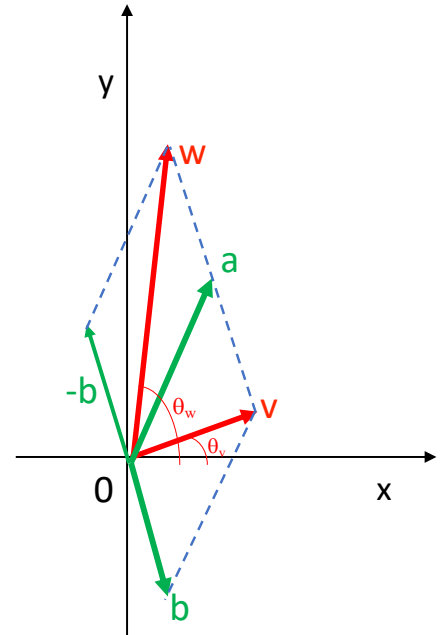
$$\tan \theta_v = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \theta_v = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1} \frac{1}{3} = 18.44^\circ$$

Vettore sottrazione:

$$\vec{w} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (2 - 1)\mathbf{i} + (4 + 3)\mathbf{j} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\tan \theta_w = \frac{w_y}{w_x} \Rightarrow \theta_w = \tan^{-1} \frac{w_y}{w_x} = \tan^{-1} 7 = 81.89^\circ$$



SOLUZIONE RECUPERO CINEMATICA

Lungo il tratto AB orizzontale liscio la velocità è costante e pari $v=1.37 \text{ m/s}$.

Alla fine del tratto, il corpo segue le leggi del moto del proiettile, ossia rettilineo ed uniforme sull'asse x, mentre lungo l'asse y ha un moto uniformemente accelerato, diretto verso il basso:

$$\begin{cases} x = v_{AB} \cdot t \\ y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}$$

Il corpo tocca il suolo quando ha percorso nella direzione y un tratto pari all'altezza del gradino. Il tempo necessario a compiere questo spostamento si ricava da

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot \overline{BC}}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.35 \text{ m}}{9.8 \text{ m/s}^2}} = 0.27 \text{ s}$$

e lo spazio percorso nella direzione x in questo tempo è dato da

$$x(t = 0.27 \text{ s}) = \overline{CH} = 1.37 \text{ m/s} \cdot 0.27 \text{ s} = 0.37 \text{ m} = 37 \text{ cm}.$$

SOLUZIONE RECUPERO DINAMICA

Il corpo scende con velocità costante lungo il piano inclinato se la forza risultante $\vec{F}_R$ che agisce sul corpo m è nulla:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_g + \vec{f}_d + \vec{N} = 0$$

ove F_g , f_d e N sono la forza peso, la forza di attrito e la forza normale.

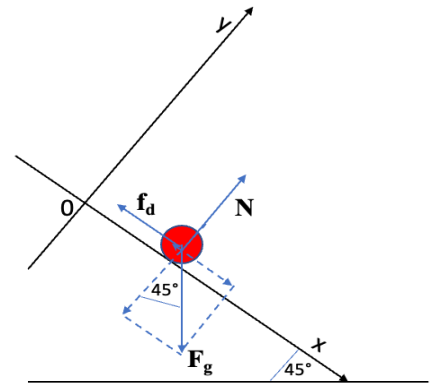
Proiettando l'equazione vettoriale sugli assi x e y (x parallelo al piano e y perpendicolare, come in figura), si ottiene:

$$\text{asse } x: -f_d + mg \sin \theta = 0$$

$$\text{asse } y: N - mg \cos \theta = 0$$

con $f_d = \mu N = \mu mg \cos \theta$, da cui segue:

$$\mu = \tan \theta = \tan (45^\circ) = 1.0$$



SOLUZIONE RECUPERO LAORO ENERGIA

La velocità alla fine del tratto BC scabro si ottiene applicando il teorema lavoro-energia cinetica, dove l'unica forza che compie lavoro è la forza di attrito:

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = \vec{f}_d \cdot BC = -\mu mg |BC|$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = -\mu mg |BC| + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$v_C = \sqrt{v_B^2 - 2\mu g |BC|}$$

$$= \sqrt{(7 \text{ m/s})^2 - 2 \times 1.0 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 1 \text{ m}} = 5.4 \text{ m/s}$$

La velocità del corpo sul piano inclinato a quota $h_D = 0.3 \text{ m}$ si ottiene dal teorema di conservazione dell'energia meccanica, tra il punto C ed il punto D:

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgh_D$$

$$v_D = \sqrt{v_C^2 - 2gh_D}$$

$$= \sqrt{(5.4 \text{ m/s})^2 - 2 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 0.3 \text{ m}} = 4.8 \text{ m/s}$$