

II° PARZIALE - FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE

A.A. 2019/2020, 8 Aprile 2020

ESERCIZIO 1 – FLUIDI

Un cubo di lato $L = 20$ cm è completamente immerso in acqua. Sapendo che la densità del cubo è **doppia** rispetto a quella dell'acqua, determinare:

- la spinta di Archimede $\vec{S}$ e la forza peso $\vec{P}$ in modulo, direzione e verso;
- la minima forza esterna $\vec{F}_{\text{ext}}$, in modulo, direzione e verso, necessaria per portare il cubo in superficie.

ESERCIZIO 2 – TEMPERATURA/CALORE

Un cubetto di alluminio (Al) di massa $m_{\text{Al}} = 500$ g e temperatura $T_{\text{Al}} = 35$ °C è messo a contatto con un cubetto di rame (Cu) di massa $m_{\text{Cu}} = 250$ g. Sapendo che il sistema è isolato e che la temperatura di equilibrio vale $T_{\text{eq}} = 30$ °C, determinare:

- il calore Q_{Al} scambiato dal cubetto di alluminio;
- la temperatura iniziale T_{Cu} del cubetto di rame.

$[c_{\text{Al}} = 900 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}; c_{\text{Cu}} = 386 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}]$

ESERCIZIO 3 – TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE

Una mole di un gas perfetto **monoatomico** passa dallo stato iniziale **A**, di pressione $p_{\text{A}} = 8 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$ e volume $V = 1000$ litri, allo stato finale **D** compiendo le seguenti trasformazioni reversibili:

A→B isobara con $V_{\text{B}} = 3 V_{\text{A}}$;

B→C isoterma con $p_{\text{C}} = p_{\text{B}}/2$.

C→D isocora con $p_{\text{D}} = p_{\text{A}}$.

- Si rappresentino le tre trasformazioni nel piano pV , si calcolino le temperature T_{A} , T_{B} , T_{C} e T_{D} e la **quantità di calore totale** scambiata passando dallo stato **A** allo stato **D**;
- Si calcoli il **lavoro svolto** e la **variazione di energia** interna del gas nel passaggio da **A** a **D**.

$[R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.082 \text{ l atm /K mol}]$

RECUPERO – PREREQUISITI

Dati i vettori spostamento $\mathbf{A} = 5 \mathbf{i} + 5 \mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 2 \mathbf{i} - 3 \mathbf{j}$, dopo averli disegnati nel piano cartesiano (x, y), calcolare il vettore differenza $\mathbf{S} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$, il modulo di $\mathbf{S}$, l'angolo ϕ di inclinazione rispetto all'asse orizzontale x . Disegnare $\mathbf{S}$ nel piano. Calcolare il prodotto scalare tra $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

RECUPERO - CINEMATICA

Un corpo di massa $m_1 = 300$ g viene lanciato dal punto O (origine di un sistema di riferimento cartesiano) con velocità $v_0 = 3.5 \text{ m/s}$ e con un angolo $\alpha = 30^\circ$ rispetto al piano orizzontale. Calcolare: altezza massima h raggiunta e tempo t necessario per raggiungere la massima altezza.

RECUPERO - DINAMICA

Un corpo di massa $m = 1 \text{ kg}$ è trattenuto da una fune su un piano liscio, inclinato di $\theta = 30^\circ$ e di altezza $h = 1.5 \text{ m}$. Si calcolino: la tensione T della fune e la forza normale sviluppata da piano.

RECUPERO ENERGIA-LAVORO

Un corpo di massa $m_1 = 2 \text{ kg}$ si muove su un piano orizzontale scabro $S = 1 \text{ m}$, con coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.1$, partendo con velocità $v_0 = 10 \text{ m/s}$.

Determinare: energia cinetica e velocità del corpo m_1 alla fine del tratto S .

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA.

Testi, soluzioni ed esiti alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

SOLUZIONE 1 – FLUIDI

a) La spinta di Archimede è data da

$$\vec{S} = \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot V_{\text{imm}} \cdot g \, \mathbf{j} = \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot L^3 \cdot g \, \mathbf{j} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0.2^3 \text{m}^3 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = +78.4 \text{ N } \mathbf{j}$$

La forza peso è data da

$$\vec{P} = -(\rho_{\text{C}} \cdot V_{\text{C}} \cdot g) \, \mathbf{j} = -(2 \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot L^3 \cdot g) \, \mathbf{j} = -2 \cdot S \, \mathbf{j} = -2 \cdot 78.4 \text{ N } \mathbf{j} = -156.8 \text{ N } \mathbf{j}$$

b) La forza netta risultante sul cubo sarà

$$\vec{F}_{\text{net}} = (S - P) \, \mathbf{j} = (\rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot L^3 \cdot g - 2 \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot L^3 \cdot g) \, \mathbf{j} = -\rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot L^3 \cdot g \, \mathbf{j} = -S \, \mathbf{j} = -78.4 \text{ N } \mathbf{j}$$

La minima forza esterna per portare il cubo in superficie sarà

$$\vec{F}_{\text{ext}} = +78.4 \text{ N } \mathbf{j}$$

SOLUZIONE 2 – TEMPERATURA/CALORE

- a) Il calore scambiato dal cubetto di alluminio sarà

$$Q_{\text{Al}} = m_{\text{Al}} \cdot c_{\text{Al}} \cdot (T_{\text{eq}} - T_{\text{Al}}) = 0.5 \text{ kg} \cdot 900 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot (30^\circ\text{C} - 35^\circ\text{C}) = -2250 \text{ J}$$

- b) All'equilibrio abbiamo $Q_{\text{Al}} = -Q_{\text{Cu}}$, cioè

$$m_{\text{Al}} \cdot c_{\text{Al}} \cdot (T_{\text{eq}} - T_{\text{Al}}) = -m_{\text{Cu}} \cdot c_{\text{Cu}} \cdot (T_{\text{eq}} - T_{\text{Cu}})$$

da cui

$$\Delta T_{\text{Cu}} = (T_{\text{eq}} - T_{\text{Cu}}) = -\frac{m_{\text{Al}} \cdot c_{\text{Al}} \cdot (T_{\text{eq}} - T_{\text{Al}})}{m_{\text{Cu}} \cdot c_{\text{Cu}}} = -\frac{0.5 \text{ kg} \cdot 900 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot (30^\circ\text{C} - 35^\circ\text{C})}{0.25 \text{ kg} \cdot 386 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}} = 23.3^\circ\text{C}$$

Pertanto

$$T_{\text{Cu}} = T_{\text{eq}} - \Delta T_{\text{Cu}} = 30^\circ\text{C} - 23.3^\circ\text{C} = 6.7^\circ\text{C}$$

SOLUZIONE 3 – TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE

a) $V_A = 1000 \text{ litri} = 1 \text{ m}^3$

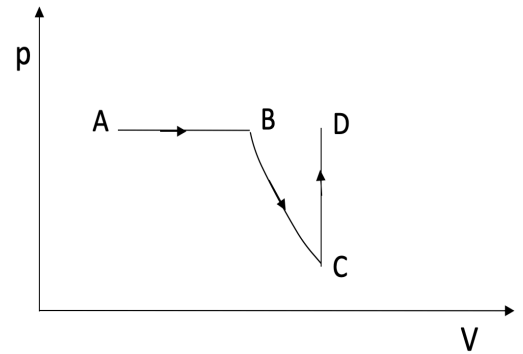
Le temperature sono pari a

$$T_A = p_A V_A / nR = 962.7 \text{ K}$$

$$T_B = p_B V_B / nR = 3p_A V_A / nR = 3T_A = 2888.1 \text{ K}$$

$$T_C = T_B = 2888.1 \text{ K}$$

$$T_D = p_D V_D / nR = p_A V_C / nR = p_A / p_C T_C = 2 T_C = 5776.2 \text{ K}$$



La quantità di calore totale scambiata dal gas è pari a

$$Q_{\text{tot}} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD}$$

dove:

$$Q_{AB} = n c_p (T_B - T_A) = 40000 \text{ J}$$

$$Q_{BC} = L_{BC} = nRT_C \ln(V_C/V_B) \\ = nRT_C \ln(nRT_C / (nRT_B) p_B/p_C) = nRT_C \ln(2) = 16636 \text{ J}$$

$$Q_{CD} = n c_v (T_D - T_C) = 36000 \text{ J}$$

$$Q_{\text{tot}} = 92636 \text{ J (positivo, assorbito)}$$

b) Il lavoro svolto totale è pari a:

$$L_{\text{tot}} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} = L_{BC} + L_{CD}$$

$$L_{CD} = 0 \text{ (CD è isocora)}$$

$$L_{BC} = nRT_C \ln(V_C/V_B) = 16636 \text{ J (si veda punto precedente)}$$

$$L_{AB} = p_A (V_B - V_A) = p_A (3V_A - V_A) = 2 p_A V_A = 16000 \text{ J}$$

da cui segue

$$L_{\text{tot}} = 32636 \text{ J}$$

La variazione di energia interna ΔE_{AD} è:

$$\Delta E_{AD} = n c_v (T_D - T_A) = 3/2 R (T_D - T_A) = 60000 \text{ J}$$

SOLUZIONE RECUPERO – PREREQUISITI

Il vettore differenza **S** si può calcolare per componenti:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x)\mathbf{i} + (A_y - B_y)\mathbf{j} \\ \mathbf{S} &= (5 - 2)\mathbf{i} + (5 + 3)\mathbf{j} = 3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}\end{aligned}$$

Il vettore **S** ha modulo $|\mathbf{S}|$ e inclinazione θ rispetto all'asse x, pari a:

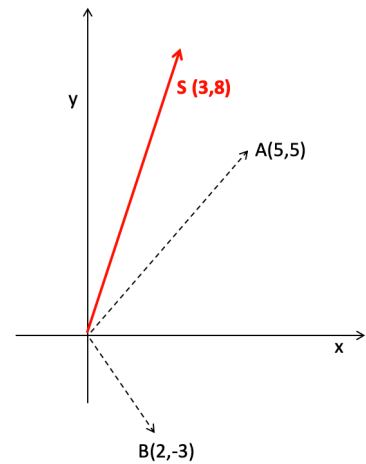
$$|\mathbf{S}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{9 + 64} = 8.5$$

L'angolo di inclinazione ϕ è pari a:

$$\phi = \text{atan}\left(\frac{S_y}{S_x}\right) = \text{atan}(8/3) = 69^\circ$$

Il prodotto scalare tra i vettori **A** e **B** si ottiene per componenti:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x B_x) + (A_y B_y) = 10 - 15 = -5$$



SOLUZIONE RECUPERO – CINEMATICA

Si tratta di un moto in due dimensioni; il moto lungo x è rettilineo uniforme, con velocità iniziale $\mathbf{v}_{0x} = \mathbf{v}_0 \cos \alpha$, e quello lungo y è uniformemente accelerato, con velocità iniziale $\mathbf{v}_{0y} = \mathbf{v}_0 \sin \alpha$ e accelerazione $-\mathbf{g}$ (negativa perché diretta verso il basso).

Le equazioni del moto sono le seguenti:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}g \cdot t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - g \cdot t \end{cases}$$

L'altezza massima corrisponde all'istante in cui la velocità nella direzione y si annulla.

Ponendo $v_y = 0$, si trova l'istante corrispondente alla quota massima e, sostituendo il valore di t nella equazione y(t), si ottiene h:

$$v_y(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{3.5 \frac{m}{s} \cdot \sin(30^\circ)}{9.8 \frac{m}{s^2}} = 0.179 \text{ s}$$

$$\begin{aligned}y(t) = h &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}g \cdot t^2 = \\ &= 0 \text{ m} + 3.5 \frac{m}{s} \cdot \sin(30^\circ) \cdot 0.179 \text{ s} - \frac{1}{2} 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot (0.179 \text{ s})^2 \\ &= 0.156 \text{ m}\end{aligned}$$

SOLUZIONE RECUPERO – DINAMICA

Disegniamo il diagramma del corpo libero utilizzando un sistema di assi cartesiani con x parallelo al piano inclinato, come mostrato in figura.

Il corpo è in equilibrio e l'equazione del moto è:

$$\vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_g = m\vec{a} = 0$$

Proietto l'equazione del moto sugli assi x e y :

asse x :

$$-T + mg \sin \theta = ma_x = 0$$

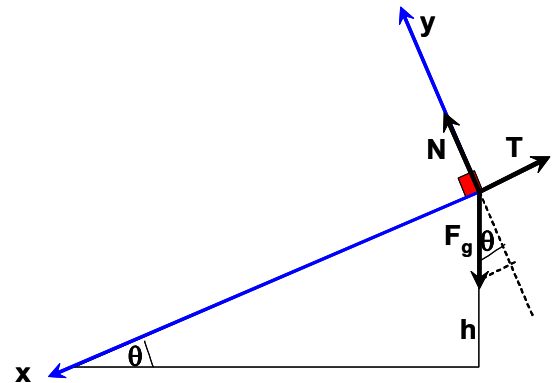
asse y :

$$N - mg \cos \theta = ma_y = 0$$

da cui si ricava:

$$N = mg \cos \theta = 1kg \times (9.8m/s^2) \times \cos(30^\circ) = 8.5J$$

$$T = mg \sin \theta = 1kg \times (9.8m/s^2) \times \sin(30^\circ) = 4.9J$$



SOLUZIONE RECUPERO – ENERGIA- LAVORO

Lungo il tratto S l'unica forza che compie lavoro, a scapito della energia cinetica iniziale, è la forza di attrito:

$$\Delta K = L_{att}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_1v_0^2 = \vec{F}_{att} \cdot \vec{d} = -\mu Nd = -\mu mgd = -0.1 \times 2kg \times 9.8 \frac{m}{s^2} \times 1m = -1.96J$$

da cui si ottiene l'energia cinetica e la velocità alla fine del tratto S:

$$K_f = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \Delta K + \frac{1}{2}m_1v_0^2 = -1.96J + 0.5 \times 2kg \times (10 \frac{m}{s})^2 = 98.04J$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2K_f}{m_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 98.04J}{2kg}} = 9.9 \frac{m}{s}$$