

2° PARZIALE - FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE
A.A. 2018/2019, 15 Aprile 2019

ESERCIZIO 1 – FLUIDI

Una sfera di raggio $R = 5 \text{ cm}$ è sorretta da una molla di costante elastica $k = 400 \text{ N/m}$. Sapendo che in aria la molla si allunga di $l_1 = 2 \text{ cm}$ e che, una volta immersa in un fluido, la sua lunghezza diventa $l_2 = 0.5 \text{ cm}$, determinare:

- a) Il peso della sferetta in aria, il peso apparente nel fluido (entrambi misurati dalla molla) e la spinta di Archimede (in modulo, direzione e verso) che agisce sulla sferetta immersa nel fluido;
- b) la densità del fluido.

ESERCIZIO 2 – TERMODINAMICA/CALORE

Un cubetto di ghiaccio di 10 g a 0°C viene immerso in 500 g di acqua a 1°C .

Determinare:

- a) il calore Q_g necessario al ghiaccio per fondere completamente e la quantità di calore che l'acqua cede per raggiungere la temperatura di 0°C ;
- b) la quantità di ghiaccio residuo, quando il sistema ha raggiunto l'equilibrio.

[N.B. Calore latente di fusione del ghiaccio $L_F = 3.33 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$

Calore specifico acqua $c_A = 4186 \text{ J/kg K}$]

ESERCIZIO 3 – TERMODINAMICA

Una mole di gas perfetto *biatomico* compie un ciclo termodinamico costituito dalle seguenti quattro trasformazioni:

A→B: espansione **isobara** dallo stato A: $p_A = 4 \text{ atm}$ e $V_A = 2 \text{ l}$ allo stato B: $V_B = 2 V_A$;

B→C: trasformazione **isocora** dallo stato B allo stato C: $p_C = p_A/2$;

C→D: compressione **isobara** dallo stato C allo stato D: $V_D = V_A$;

D→A: trasformazione **isocora** dallo stato D allo stato A;

- a) disegnare il grafico della trasformazione ciclica nel piano p-V, determinare le coordinate termodinamiche (p, V, T) degli stati A, B, C e D, ed il lavoro svolto dal gas;
- b) determinare il calore Q scambiato nelle quattro trasformazioni A→B, B→C, C→D e D→A ed il rendimento del ciclo termodinamico.

[N.B. $R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.082 \text{ l atm /K mol}$]

RECUPERI

PREREQUISITI: Dati i vettori spostamento $A = 5 \mathbf{i} + 5 \mathbf{j}$, $B = 2 \mathbf{i} - 3 \mathbf{j}$ e $C = -2 \mathbf{i}$, dopo averli disegnati nel piano cartesiano (x,y), determinare il vettore spostamento totale $S = A+B+C$ e disegnarlo nel piano cartesiano. Calcolare il prodotto scalare con il vettore $F = 3 \mathbf{j}$.

CINEMATICA: Una particella viene lanciata da un'altezza di 0.5 m con velocità 9 m/s inclinata di 30° rispetto all'orizzontale. Determinare la massima distanza orizzontale raggiunta.

DINAMICA: Una particella di massa $m = 0.5 \text{ kg}$ viene lanciata dalla base di un piano inclinato di 30° rispetto all'orizzontale. Il piano è scabro con coefficiente di attrito $\mu_d = 0.6$. Determinare la forza totale che agisce sulla particella.

LAVORO-ENERGIA: Una particella di massa $m = 0.5 \text{ kg}$ viene lanciata dalla base di un piano lungo $L = 1 \text{ m}$ e inclinato di $\theta = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale. Sapendo che il piano è scabro con coefficiente di attrito $\mu_d = 0.6$ e che la velocità iniziale della particella è $v_0 = 10 \text{ m/s}$, determinare l'energia cinetica della particella sulla sommità del piano.

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA.
Testi, soluzioni ed esiti alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

SOLUZIONE 1 – FLUIDI

- a) In aria e nel fluido il sistema molla+sferetta si trova all'equilibrio.

In aria, la forza elastic della molla $F_e = kl$ equaglia la forza peso della sferetta, pertanto:

$$F_p = F_{e_1} = kl_1 = \frac{400N}{m} \times 0.02m = 8N$$

Nel fluido, l'allungamento della molla è inferiore e corrisponde al peso apparente

$$F_{p-app} = F_{e_2} = kl_2 = \frac{400N}{m} \times 0.005m = 2N$$

Il peso apparente (ridotto rispetto al peso in aria) è causato dalla spinta di Archimede esercitata dal fluido sulla sferetta, ed all'equilibrio si ottiene:

$$F_{e_2} - F_p + F_A = 0$$

$$F_A = F_{e_1} - F_{e_2} = k(l_1 - l_2) = 6N.$$

Quindi

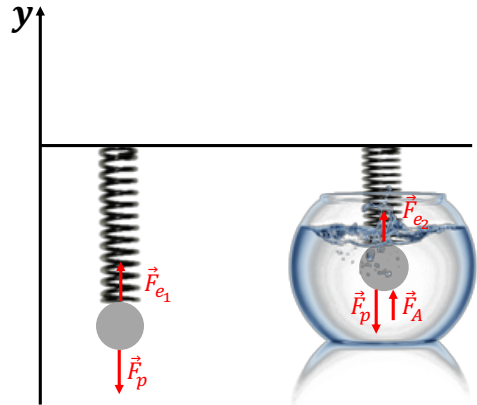
$$\vec{F}_A = 6N \mathbf{j}.$$

- b) La spinta di Archimede è data da:

$$|\vec{F}_A| = \rho_f V_s g$$

da cui si ottiene la densità del fluido:

$$\rho_f = \frac{|\vec{F}_A|}{V_s g} = \frac{|\vec{F}_A|}{\frac{4}{3}\pi R^3 g} = \frac{6N}{5.2 \cdot 10^{-4} m^3 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2}} = 1177.4 \frac{kg}{m^3}$$



ESERCIZIO 2 – TERMODINAMICA/CALORE

Conversione unità di misura:

$$T_0 = 0^\circ\text{C} = +273 \text{ K}$$

$$T_A = 1^\circ\text{C} = (1+273) \text{ K} = 274 \text{ K}$$

$$m_g = 10 \text{ g} = 0.01 \text{ kg}$$

$$m_A = 500 \text{ g} = 0.5 \text{ kg}$$

- a) Il calore assorbito dal ghiaccio per fondere completamente è pari a:

$$Q_g = m_g L_F = 0.01 \text{ kg} \times 3.33 \cdot 10^5 \text{ J/kg} = 3330 \text{ J}$$

Il calore che l'acqua dovrebbe cedere per arrivare a 0°C è pari a:

$$Q_A = c_A m_A (T_0 - T_A) = 4186 \text{ J/(kg K)} \cdot 0.5 \text{ kg} \times (273 - 274) \text{ K} = -2093 \text{ J}$$

- b) Il calore ceduto dall'acqua per arrivare a 0°C non è sufficiente per fondere completamente il ghiaccio. All'equilibrio si avrà quindi una miscela di acqua e ghiaccio. La massa di ghiaccio m_{gF} fusa si ottiene eguagliando il calore latente di fusione al calore massimo che può essere assorbito dall'acqua, in valore assoluto:

$$Q_g = m_{gF} L_F = Q_A$$

$$m_{gF} = Q_A / L_F = 2093 \text{ J} / (3.33 \cdot 10^5 \text{ J/kg}) = 0.006 \text{ kg} = 6 \text{ g}$$

da cui segue che rimangono 4 g di ghiaccio.

ESERCIZIO 3 – TERMODINAMICA

a) Le coordinate termodinamiche (p,V,T) si ricavano dall'equazione di stato dei gas perfetti $pV = nRT$.

Stato A:

$$p_A = 4 \text{ atm} = 4 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_A = 2 \text{ l} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_A = p_A V_A / (nR)$$

$$= (4 \times 10^5 \text{ Pa} \times 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3) / (1 \text{ mole} \times 8.31 \text{ J/moleK})$$

$$\sim 96 \text{ K}$$

Stato B:

$$p_B = p_A = 4 \text{ atm} = 4 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_B = 2 V_A = 4 \text{ l} = 4 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_B = p_B V_B / (nR)$$

$$= 2 p_A V_A / (nR)$$

$$= 2 T_A$$

$$\sim 192 \text{ K}$$

Stato C:

$$p_C = p_A / 2 = 2 \text{ atm} = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_C = 2 V_A = 4 \text{ l} = 4 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_C = p_C V_C / (nR)$$

$$= p_A / 2 \cdot 2 V_A / (nR)$$

$$= T_A$$

$$\sim 96 \text{ K}$$

Stato D:

$$p_D = p_A / 2 = 2 \text{ atm} = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$$

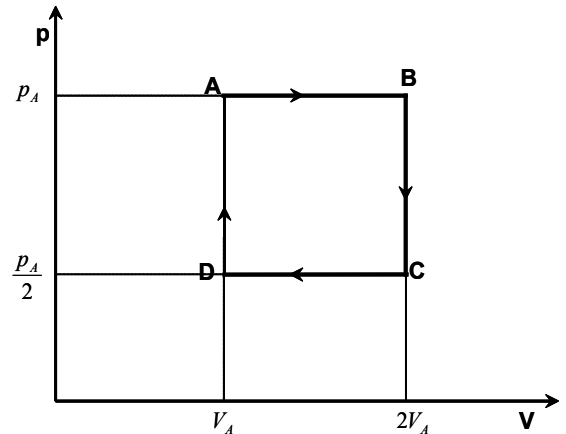
$$V_D = V_A = 2 \text{ l} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_D = p_D V_D / (nR)$$

$$= p_A / 2 \cdot V_A / (nR)$$

$$= T_A / 2$$

$$\sim 48 \text{ K}$$



Il lavoro svolto dal gas è pari all'area del quadrato ABCD, ossia:

$$W = (V_B - V_A) \times (p_A - p_D)$$

$$= V_A p_A / 2$$

$$= 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \times 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 400 \text{ J}$$

c) Il calore scambiato nelle singole trasformazioni assume i seguenti valori:

$$Q_{AB} = n c_p \Delta T$$

$$= 1 \times \frac{7}{2} R (T_B - T_A) = \frac{7}{2} R T_A$$

$$= \frac{7}{2} \times 8.31 \text{ J / (moleK)} \times 96 \text{ K}$$

$$\approx + 2792 \text{ J} > 0$$

$$\begin{aligned}
Q_{BC} &= nc_V \Delta T \\
&= 1 \times \frac{5}{2} R(T_C - T_B) = \frac{5}{2} R(T_A - 2T_A) = -\frac{5}{2} RT_A \\
&= -\frac{5}{2} \times 8.31 J / (moleK) \times 96 K \\
&\approx -1994 J < 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{CD} &= nc_p \Delta T \\
&= 1 \times \frac{7}{2} R(T_D - T_C) = \frac{7}{2} R(T_A / 2 - T_A) = -\frac{7}{4} RT_A \\
&= -\frac{7}{4} \times 8.31 J / (moleK) \times 96 K \\
&\approx -1396 J < 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{DA} &= nc_V \Delta T \\
&= 1 \times \frac{5}{2} R(T_A - T_D) = \frac{5}{2} R(T_A - T_A / 2) = \frac{5}{4} RT_A \\
&= \frac{5}{4} \times 8.31 J / (moleK) \times 96 K \\
&\approx +998 J
\end{aligned}$$

Il rendimento del ciclo è dato dal rapporto tra il lavoro svolto ed il calore assorbito (somma dei calori positivi), ed è quindi pari a:

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{W}{Q_c} = \frac{W}{Q_{AB} + Q_{DA}} \\
&= \frac{p_A V_A / 2}{RT_A (\frac{7}{2} + \frac{5}{4})} \\
&= \frac{1}{2(\frac{7}{2} + \frac{5}{4})} = \frac{2}{19} = 0.105 \approx 11\%
\end{aligned}$$

RECUPERI

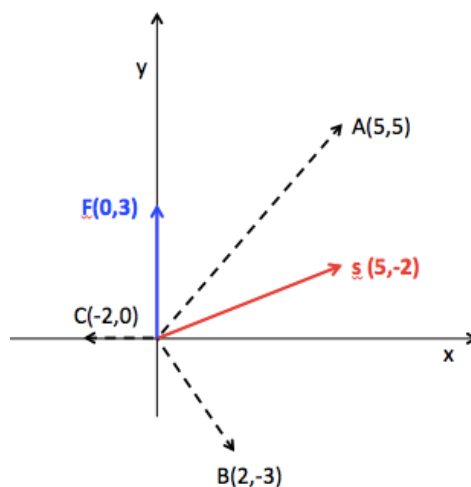
PREREQUISITI

Il vettore spostamento $\vec{s}$ si può calcolare per componenti:

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \\ &= (5+2-2)\vec{i} + (5-3)\vec{j} \\ &= 5\vec{i} + 2\vec{j}\end{aligned}$$

Il prodotto scalare con il vettore $F=(0,3)$ si ottiene per componenti:

$$\begin{aligned}\vec{S} \cdot \vec{F} &= \\ &= S_x F_x + S_y F_y \\ &= 5 \times 0 + 2 \times 3 = 6\end{aligned}$$



CINEMATICA

La massima distanza orizzontale raggiunta si ottiene dal sistema:

$$\begin{cases} 0 = h_0 + v_{py}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ x_f = v_{px}t \end{cases}$$

dove

$$\begin{aligned}v_{px} &= v_p \cos \theta = 9 \frac{m}{s} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7.8 \frac{m}{s} \\ v_{py} &= v_p \sin \theta = 9 \frac{m}{s} \cdot \frac{1}{2} = 4.5 \frac{m}{s}\end{aligned}$$

Dalla prima equazione si ottiene:

$$t = \frac{v_{py} + \sqrt{v_{py}^2 + 2gh_0}}{g} = \frac{4.5 \frac{m}{s} + \sqrt{20.25 \frac{m^2}{s^2} + 2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 0.5 m}}{9.8 \frac{m}{s^2}} = 1 s$$

e quindi

$$x_f = v_{px}t = 7.8 \frac{m}{s} \cdot 1 s = 7.8 m$$

DINAMICA

La forza totale che agisce sulla particella è data da:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_g + \vec{F}_a + \vec{F}_N$$

Proiettando l'equazione lungo gli assi (x parallelo al piano e concorde con il moto della particella, y perpendicolare e uscente dal piano) si ottiene:

$$\begin{aligned}(F_{TOT})_x &= -mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta \\ (F_{TOT})_y &= -mg \cos \theta + mg \cos \theta = 0\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}(F_{TOT})_x &= -mg(\sin \theta + \mu \cos \theta) = -0.5 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 0.6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -5 \text{ N} \\ (F_{TOT})_y &= 0\end{aligned}$$

ossia

$$\vec{F}_{TOT} = -5 \text{ N } \mathbf{i}$$

LAVORO-ENERGIA

Dal teorema lavoro-energia si ha:

$$\Delta K = L_{TOT}$$

Il lavoro totale è quello compiuto dalla forza risultante che agisce sulla particella lungo il piano inclinato:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_g + \vec{F}_a$$

che proiettata lungo gli assi risulta:

$$F_{TOT} = -mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta$$

da cui

$$L_{TOT} = -mg(\sin \theta + \mu \cos \theta)L = -0.5 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 0.6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 1 \text{ m} = -5 \text{ J}$$

Pertanto:

$$K_f = K_i + L_{TOT} = \frac{1}{2} m v_i^2 + L_{TOT} = \frac{1}{2} \cdot 0.5 \text{ kg} \cdot 100 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 5 \text{ J} = 20 \text{ J}$$