

1° PARZIALE - FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE
A.A. 2021/22, 14 febbraio 2022

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

Dati i vettori $\vec{u} = 2i + 6j$, $\vec{v} = -3i - j$ e $\vec{w} = -2i + j$, si calcoli:

- a) il **modulo** del vettore $\vec{s} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ e l'**angolo** di inclinazione θ di $\vec{s}$ rispetto all'asse x .
Si rappresentino tutti e quattro i vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ed $\vec{s}$ nel piano cartesiano;
- b) il **prodotto scalare** tra $\vec{s}$ e $\vec{f} = -2i + 3j$ e l'**angolo** ϕ compreso tra i vettori $-\vec{s}$ ed $\vec{f}$.
-

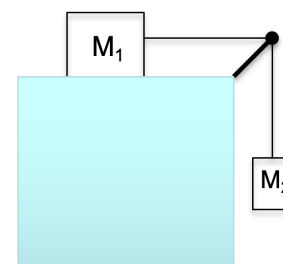
ESERCIZIO 2 - CINEMATICA

Una macchinina giocattolo parte da ferma dalla base di un piano inclinato di un angolo $\theta = 45^\circ$ e sale con accelerazione costante $a = 0.5 \text{ m/s}^2$, percorrendo tutto il piano di lunghezza $L = 300 \text{ cm}$. Determinare:

- a) il **tempo** impiegato per giungere alla sommità del piano e la **velocità** alla fine del tratto L , specificandone modulo e componenti;
- b) la **massima quota** raggiunta dopo avere lasciato la sommità del piano (supponendo che sulla macchinina giocattolo agisca la sola accelerazione di gravità) e la **distanza orizzontale** a cui cade la macchinina.
-

ESERCIZIO 3 – DINAMICA

Una cassa di massa M_1 poggia su un piano orizzontale scabro, con coefficiente di attrito μ . La cassa è collegata, mediante una fune ed una carrucola, ad un corpo di massa $M_2 = M_1/3$, come mostrato in figura. Determinare:



- a) il coefficiente di attrito μ necessario perché il sistema sia in **quiete**;
- b) assumendo per μ il valore trovato al punto a) e supponendo ora $M_1 = M_2$, calcolare l'**accelerazione** di ciascun corpo, specificandone modulo, direzione e verso.

[N.B. Si assumano uguali i coefficienti di attrito statico e dinamico].

ESERCIZIO 4 – LAVORO/ENERGIA

Un corpo di massa m comprime di $x = 20 \text{ cm}$ una molla di costante elastica $k = 500 \text{ N/m}$, posta su un piano orizzontale liscio seguito da un piano inclinato di $\theta = 60^\circ$ rispetto al piano orizzontale.

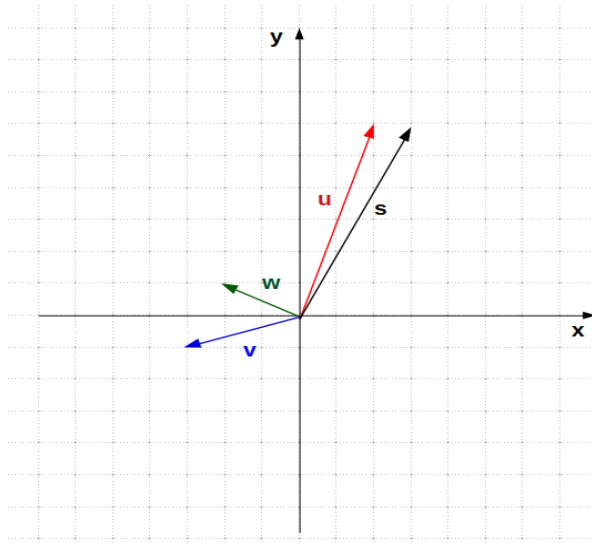
- a) Nel caso in cui il piano inclinato sia anch'esso privo di attrito il corpo arriva ad una altezza $h = 40 \text{ cm}$ dal suolo. Si determini il valore della massa m .
- b) Trovata la massa al punto a) si trovi il valore dell'altezza h_2 a cui arriverebbe il corpo se la superficie del piano inclinato fosse invece scabra con coefficiente di attrito $\mu_d = 0.2$.

Facoltativo: Una volta fermatosi ad un'altezza pari ad h_2 , il corpo ridiscende lungo lo stesso piano inclinato scabro fino ad essere fermato completamente dalla molla che si comprime, in questo caso, di una quantità x_2 . Si determini il valore di x_2 .

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA.

Testi, soluzioni ed esiti alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI



a) Il vettore $\vec{s}$ ha componenti

$$\vec{s} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = (2 - (-3) - 2)i + (6 - (-1) + 1)j = 3i + 8j$$

da cui il modulo

$$|\vec{s}| = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{9 + 64} = \sqrt{73}.$$

L'angolo θ di $\vec{s}$ rispetto all'asse x si ottiene, per esempio, da:

$$s_x = |\vec{s}| \cos \theta \text{ da cui } \theta = \arccos\left(\frac{s_x}{|\vec{s}|}\right) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{73}}\right) = 69.44^\circ$$

b) Il prodotto scalare $\vec{s} \cdot \vec{f}$ è dato da $\vec{s} \cdot \vec{f} = (3 \cdot (-2)) + (8 \cdot 3) = -6 + 24 = 18$.

Per calcolare l'angolo tra i due vettori si utilizzi la definizione di prodotto scalare:

$$-\vec{s} \cdot \vec{f} = |-\vec{s}| \cdot |\vec{f}| \cdot \cos \phi.$$

Si calcoli prima il prodotto scalare $-\vec{s} \cdot \vec{f}$

$$\text{dato da } -\vec{s} \cdot \vec{f} = (-3 \cdot (-2)) + (-8 \cdot 3) = 6 - 24 = -18.$$

$$\text{e poi i moduli } -\vec{s} \cdot \vec{f} \text{ e } |\vec{f}|, \text{ dove } |-\vec{s}| = |\vec{s}| = \sqrt{73} \text{ e } |\vec{f}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

$$\text{Segue che } \cos \phi = \frac{-\vec{s} \cdot \vec{f}}{|-\vec{s}| \cdot |\vec{f}|}$$

da cui

$$\phi = \arccos\left(\frac{-\vec{s} \cdot \vec{f}}{|-\vec{s}| \cdot |\vec{f}|}\right) = \arccos\left(\frac{-18}{\sqrt{73} \cdot \sqrt{13}}\right) = \arccos(-0.584) = 125.8^\circ$$

ESERCIZIO 2 - CINEMATICA

a) L'auto giocattolo si muove lungo il piano di moto rettilineo ed uniformemente accelerato.
La legge oraria è la seguente:

$$L = L_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a t^2$$

dato che il giocattolo parte da fermo ($v_0=0$) e dalla base del piano ($L_0=0$).
Il tempo per percorrere il tratto L è quindi pari a

$$t = \sqrt{2 L/a} = 3.5 \text{ s}$$

Alla fine del tratto L , la velocità in modulo è pari a

$$v = v_0 + at = at = 1.8 \text{ m/s}$$

e le componenti sono pari a $v_x = v_y = v \sqrt{2}/2 = 1.3 \text{ m/s}$

b) Giunta alla fine del tratto L , il moto segue le leggi del moto del proiettile con coordinate iniziali

$$(x_0, y_0) = (0, H) = (0, L\sqrt{2}/2) = (0, 2.1 \text{ m})$$

e velocità iniziale di componenti

$$(v_{0x}, v_{0y}) = (1.3, 1.3) \text{ m/s}$$

Le equazioni del moto, per le coordinate x ed y sono

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x} t = v_{0x} t \\ y &= y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = H + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

e le equazioni della velocità sono

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} = 1.3 \text{ m/s} \\ v_y &= v_{0y} - g t \end{aligned}$$

Il punto di massima quota è caratterizzato da $v_y = 0$, da cui è possibile ricavare il tempo per raggiungere tale quota massima:

$$t = v_{0y}/g = 0.1 \text{ s}$$

Utilizzando l'equazione del moto per la coordinata y si ottiene che la quota massima è pari a
 $y_{\max} = 2.2 \text{ m}$.

Per determinare la distanza massima raggiunta in orizzontale, calcoliamo il tempo di volo dallo stacco dal piano inclinato, ossia dal punto di coordinate $(0, H)$, fino a terra, ossia fino al punto di coordinate $(D, 0)$. Il tempo di volo si ottiene dalla equazione in y :

$$0 = H + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \text{ che fornisce } t = 0.8 \text{ s}$$

La distanza massima orizzontale percorsa sarà quindi $D = v_{0x} t = 1.0 \text{ m}$

ESERCIZIO 3 – DINAMICA

a) Scriviamo la seconda legge della dinamica per ciascuno dei due corpi:

$$\vec{F}_1 = \vec{f}_k + \vec{F}_{g1} + \vec{N} + \vec{T} = 0$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{g2} + \vec{T} = 0$$

La tensione T è la medesima in modulo, essendo i corpi collegati.

Si proiettano ora le equazioni sugli assi x e y, per il corpo 1, e solo y per il corpo 2:

$$(1) \quad \begin{array}{l} \text{su x: } -\mu N + T = 0 \\ \text{su y: } -M_1 g + N = 0 \end{array}$$

$$(2) \quad \text{su y: } -M_2 g + T = 0$$

Da cui si ricava

$$N = M_1 g$$

$$T = M_2 g$$

$$\mu = T/N = M_2/M_1 = 1/3 = 0.3$$

b)

Supponiamo ora $M_1 = M_2 = M$ e $\mu = 0.3$.

Le equazioni della dinamica per i due corpi sono ora

$$\vec{F}_1 = \vec{f}_k + \vec{F}_{g1} + \vec{N} + \vec{T} = M\vec{a}$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{g2} + \vec{T} = M\vec{a}$$

Ove l'accelerazione $\vec{a}$ è la medesima in modulo, essendo i corpi collegati.

Proiettando le equazioni su x e su y, si ottiene:

$$\text{corpo 1: } -\mu Mg + T = M a$$

$$\text{corpo 2: } -Mg + T = -M a$$

ove si è assunto che il corpo uno si muova da sinistra a destra e che di conseguenza il corpo 2 scenda lungo y.

Si ottiene quindi, sottraendo membro a membro le due equazioni precedenti,

$$-\mu Mg + Mg = 2 M a$$

$$a = g (1 - \mu)/2 = 3.4 \text{ m/s}^2$$

ESERCIZIO 4 – LAVORO/ENERGIA

a) L'energia meccanica iniziale posseduta dal corpo è data unicamente dall'energia potenziale elastica della molla $U_e = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$.

In assenza di forze non conservative l'energia meccanica si conserva. Quando il corpo si stacca dalla molla, tutta l'energia potenziale elastica è convertita in energia cinetica. Tale energia cinetica verrà convertita completamente in energia potenziale gravitazionale quando il corpo è arrivato ad altezza h , in cima al piano ($K_f=0$). Si può quindi scrivere

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = m \cdot g \cdot h \quad \text{da cui} \quad m = \frac{k \cdot x^2}{2 \cdot g \cdot h} = \frac{500 \cdot 0.2^2}{2 \cdot 9.8 \cdot 0.4} = 2.55 \text{ kg}.$$

b) Nel caso in cui la superficie del piano sia scabra, una parte dell'energia meccanica iniziale posseduta dal corpo viene dissipata a causa dell'attrito. Possiamo quindi applicare il teorema lavoro-energia cinetica, dove le uniche forze che compiono lavoro sono la forza di attrito (non conservativa) e la forza peso (conservativa):

$$L_{tot} = L_g + L_{att} = K_f - K_i$$

$$-(U_{gf} - U_{gi}) + L_{att} = -K_i = -\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

da cui si ottiene, riorganizzando i termini,

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 + L_{att} = m \cdot g \cdot h_2 \quad (0)$$

dato che le energie potenziali gravitazionali iniziali e finali sono $U_{gi} = 0$ (siamo alla base del piano) e U_{gf} (siamo sul piano a quota massima h_2).

Il lavoro della forza di attrito è pari a $L_{att} = -F_{att} d$, ove d è distanza percorsa dal corpo sul piano inclinato prima di fermarsi. Per le regole di trigonometria, la distanza d è data da

$$d = \frac{h_2}{\sin \theta}, \quad (1)$$

mentre la forza di attrito F_{att} è data da

$$F_{att} = \mu_d \cdot m \cdot g \cdot \cos \theta. \quad (2)$$

Sostituendo (1) e (2) in (0) otteniamo

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 - \mu_d \cdot m \cdot g \cdot \cos \theta \frac{h_2}{\sin \theta} = m \cdot g \cdot h_2$$

$$\frac{k \cdot x^2}{2 \cdot m \cdot g} = h_2 \left(1 + \frac{\mu_d}{\tan \theta} \right)$$

$$h_2 = \frac{k \cdot x^2}{2 \cdot m \cdot g} \cdot \left(1 + \frac{\mu_d}{\tan \theta} \right)^{-1} = \frac{500 \cdot 0.2^2}{2 \cdot 2.55 \cdot 9.8} \cdot \left(1 + \frac{0.2}{1.73} \right)^{-1} = 0.4 \cdot 0.9 = 0.36 \text{ m} = 36 \text{ cm}.$$

Facoltativo: Partendo da fermo da altezza h_2 ($K_i = 0$), il corpo scende lungo il piano inclinato dissipando energia cinetica a causa della forza di attrito, definita dall'equazione (2). Il corpo si andrà poi a fermare ($K_f = 0$) comprimendo la molla di una quantità x_2 .

Applichiamo di nuovo il teorema lavoro energia cinetica:

$$L_{tot} = L_g + L_k + L_{att} = K_f - K_i$$

$$m \cdot g \cdot h_2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2^2 - \mu_d \cdot m \cdot g \cdot \cos \theta \frac{h_2}{\sin \theta} = 0$$

da cui

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h_2}{k} \cdot \left(1 - \frac{\mu_d}{\tan \theta} \right)} = 0.18 \text{ m} = 18 \text{ cm}.$$