

1° PARZIALE - FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE
A.A. 2020/21, 11 febbraio 2021

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

In un piano cartesiano ortogonale **XY** sono dati i vettori $\vec{v} = 2\mathbf{j}$ e $\vec{w} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Dopo aver rappresentato i vettori nel piano cartesiano, determinare:

- a) il **modulo** dei vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e il **vettore somma** $\vec{s} = \vec{v} + \vec{w}$ in modulo, direzione e verso e rappresentarlo nel piano cartesiano;
- b) l'angolo θ compreso tra il vettore $\vec{v}$ e il vettore $-\vec{w}$ e l'angolo φ compreso tra il vettore $-\vec{v}$ e il vettore $\vec{w}$, utilizzando la definizione di prodotto scalare.

ESERCIZIO 2 - CINEMATICA

Un aereo antincendio, con un carico d'acqua, viaggia a quota **H** dal suolo, con velocità costante, parallela al suolo, pari a **v = 200 km/h**. Il tempo di volo dell'acqua, dall'istante del lancio al momento in cui colpisce il suolo è pari a **t = 5 s**. Determinare:

- a) la **quota H** a cui viaggia l'aereo e la **distanza orizzontale D** dall'incendio a cui deve essere sganciato il carico d'acqua affinché colpisca l'incendio;
- b) il **vettore velocità** del carico d'acqua al momento in cui colpisce il suolo, specificandone le **componenti**, il **modulo** e l'**angolo** di inclinazione rispetto al suolo.

ESERCIZIO 3 – DINAMICA

Una cassa di massa **m = 12000 g** si muove lungo un piano inclinato di un angolo $\theta = 60^\circ$.

Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico tra il piano e la cassa è $\mu = 0.15$, si calcoli:

- a) la **trazione** della fune, parallela al piano inclinato, con cui la cassa deve essere tirata per farla salire con velocità costante, pari a **v**, e la trazione che deve essere applicata per farla salire con velocità costante **2v**.
- b) Supponendo ora di tagliare la fune, determinare il valore del **coefficiente di attrito** che permetterebbe alla cassa, con un carico aggiuntivo di massa **M**, di raggiungere la base del piano inclinato con velocità costante.

ESERCIZIO 4 – LAVORO/ENERGIA

Un disco da hockey, di massa **M = 100 g** e vincolato ad una fune di lunghezza **R = 30 cm**, si muove di moto circolare uniforme su un piano orizzontale ghiacciato, privo di attrito. Ad un certo istante, la fune si spezza ed il disco, dopo aver percorso un tratto rettilineo di lunghezza **D**, urta in modo completamente anelastico un disco corpo di massa uguale. Dopo l'urto, i due corpi uniti procedono mantenendo la stessa traiettoria rettilinea, con velocità **V = 1 m/s**, ed urtano una molla di costante **k = 200 N/m**. Determinare:

- a) la velocità **v₀** del disco all'istante dell'urto e la tensione **T** all'istante della rottura;
- b) la massima compressione **d** della molla e la massima distanza **D** a cui verrebbe respinto il sistema dei due corpi assumendo che, dal punto di distacco dalla molla, esista un attrito dinamico tra il piano ed i due corpi, con coefficiente pari a **0.1**.

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA.

Testi, soluzioni ed esiti alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

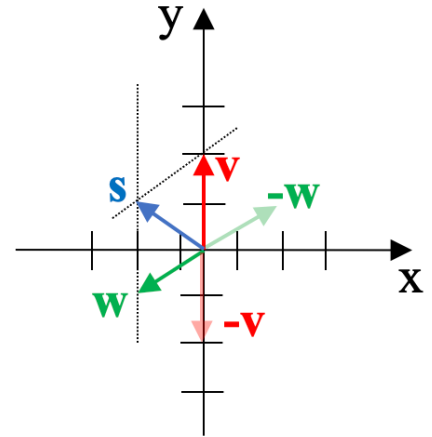
a)

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{0 + 4} = \sqrt{4} = 2$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} = 2.2$$

$$\vec{s} = (v_x + w_x)\mathbf{i} + (v_y + w_y)\mathbf{j} = (0 - 2)\mathbf{i} + (2 - 1)\mathbf{j} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} = 2.2$$



b)

Dalla definizione di prodotto scalare:

$$\vec{v} \cdot (-\vec{w}) = |\vec{v}| |-\vec{w}| \cos \theta$$

si ottiene

$$\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot (-\vec{w})}{|\vec{v}| |-\vec{w}|}$$

dove

$$\vec{v} \cdot (-\vec{w}) = [v_x \cdot (-w_x)] + [v_y \cdot (-w_y)] = -[(v_x \cdot w_x) + (v_y \cdot w_y)] = -(0 - 2) = 2$$

$$\text{e } |-\vec{w}| = |\vec{w}|.$$

Pertanto

$$\theta = \arccos \left[\frac{\vec{v} \cdot (-\vec{w})}{|\vec{v}| |-\vec{w}|} \right] = \arccos \left(\frac{2}{2\sqrt{5}} \right) = 63.44^\circ$$

Infine, dato che $\vec{v} \cdot (-\vec{w}) = (-\vec{v}) \cdot (\vec{w})$ e $|-\vec{v}| = |\vec{v}|$, si ottiene

$$\varphi = \theta = 63.44^\circ$$

ESERCIZIO 2 - CINEMATICA

L'aereo viaggia con velocità

$$V = 200 \text{ km/h} = 200 \cdot 10^3 \text{ m} / 3600 \text{ s} = 55.6 \text{ m/s}$$

Il moto del carico d'acqua è parabolico, ossia rettilineo ed uniforme in x ed uniformemente accelerato in y, con accelerazione $-g$.

Le equazioni del moto, per le coordinate x ed y sono:

$$x = x_0 + v_{0x} t$$

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

Prendiamo un sistema di assi cartesiani con asse x parallelo al suolo e origine nel punto di coordinate $(x_0, 0)$. Il tempo di volo e la coordinata x di atterraggio si ottengono imponendo $y=0$:

$$0 = y_0 - \frac{1}{2} g t^2 = H - \frac{1}{2} g t^2$$

$$H = \frac{1}{2} g t^2 = 122.5 \text{ m}$$

$$D = v_{0x} t = V t = 55.6 \text{ m/s} \cdot 5 \text{ s} = 277.8 \text{ m}$$

2. Le equazioni per le componenti del vettore velocità sono le seguenti:

$$v_x = v_{0x}$$

$$v_y = v_{0y} - gt = -gt$$

da cui si ricava per il vettore velocità al momento di atterraggio:

$$v_x = v_{0x} = V = 250 \text{ km/h} = 55.6 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_{0y} - gt = -gt = -9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 5 \text{ s} = -49 \text{ m/s}$$

$$|v| = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = 74.1 \text{ m/s}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} (v_y/v_x) = -41.4^\circ$$

ESERCIZIO 3 – DINAMICA

La massa del corpo, nel SI, è pari a $m = 12000 \text{ g} = 12 \text{ kg}$.

- a) La forza risultante agente sulla cassa è nulla quando la cassa si muove con velocità costante.

L'equazione della dinamica, scritta in forma vettoriale è la seguente:

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = \mathbf{F}_g + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{\text{att}} + \mathbf{T} = 0$$

Si scelga il semiasse positivo x parallelo al piano e con verso concorde a quello del moto (verso l'alto) e l'asse y perpendicolare al piano e con verso uscente dal piano. L'equazione della dinamica, proiettata sull'asse x e delle y , è la seguente:

$$\text{asse } x: T - mg \sin 60^\circ - F_{\text{att}} = 0$$

$$\text{asse } y: -mg \cos 60^\circ + N = 0$$

da cui si ottiene $N = mg \cos 60^\circ$, $F_{\text{att}} = \mu N = \mu mg \cos 60^\circ$ e

$$T = + mg \sin 60^\circ + \mu mg \cos 60^\circ = 110.7 \text{ N}$$

La trazione della fune è sempre la stessa se la cassa sale con velocità costante.

- b) Durante la discesa lungo il piano inclinato, con velocità costante, l'equazione della dinamica è la seguente:

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = \mathbf{F}_g + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{\text{att}} = 0$$

Tale equazione, proiettata sull'asse delle x (preso con verso concorde con il moto, ossia verso il basso) e delle y , equivale a:

$$\text{asse } x: (m+M)g \sin 60^\circ - F_{\text{att}} = 0$$

$$\text{asse } y: -(m+M)g \cos 60^\circ + N = 0$$

da cui si ottiene $N = (m+M)g \cos 60^\circ$, $F_{\text{att}} = \mu N = \mu (m+M)g \cos 60^\circ$ e quindi:

$$\mu (m+M)g \cos 60^\circ = (m+M)g \sin 60^\circ$$

$$\mu = \tan(60^\circ) = 1.73$$

Tale coefficiente non dipende dalla massa del sistema.

ESERCIZIO 4 – LAVORO/ENERGIA

- a) Nel caso del moto circolare, la tensione della fune T è la forza centripeta che trattiene il disco sulla traiettoria circolare, pertanto:

$$T = Mv_0^2/R$$

E' quindi necessario determinare la velocità all'istante dell'urto, per poter determinare la tensione di rottura.

Essendo un urto completamente anelastico, la velocità V dei due corpi (uniti dopo l'urto) si ottiene dalla conservazione della quantità di moto:

$$Mv_0 = (M+M) V$$

da cui segue:

$$v_0 = 2V = 2 \text{ m/s}$$

$$T = Mv_0^2/R = 0.1 \text{ kg } (2\text{m/s})^2/(0.3 \text{ m}) = 1.33 \text{ N}$$

- b) Dopo l'urto, i due corpi uniti procedono con traiettoria rettilinea ed energia cinetica

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} (2M)V^2 = 0.1 \text{ J}$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica è possibile ottenere la massima compressione d della molla:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} (2M)V^2 = U_k = \frac{1}{2} k d^2$$

$$d = [(2M)V^2/k]^{1/2} = 0.03 \text{ m} = 3 \text{ cm}$$

Se la molla respingesse i due corpi uniti (nell'ipotesi di attrito dinamico con coefficiente $\mu = 0.1$ tra il piano ed i due corpi, a partire dal punto di distacco dalla molla), la massima D distanza percorsa si otterrebbe dal teorema lavoro-energia cinetica, considerando la forza di attrito come unica forza che compie lavoro:

$$L_{\text{tot}} = \mathbf{F}_{\text{att}} \mathbf{d} = - \mu 2Mg D = E_{\text{kin},f} - E_{\text{kin},0} = 0 - \frac{1}{2} k d^2$$

$$D = (\frac{1}{2} k d^2)/(\mu 2Mg) = (0.1 \text{ J})/(0.1 \cdot 0.2 \text{ kg } 9.8 \text{ m/s}^2) = 0.51 \text{ m}$$