

1° PARZIALE - FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE
A.A. 2017/2018, 1 Febbraio 2018

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

Siano dati in un piano cartesiano ortogonale XY i vettori $\vec{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ e $\vec{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$. Determinare:

- a) i vettori $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{w} = \vec{a} - \vec{b}$ in modulo, direzione e verso e rappresentarli nel piano;
 - b) il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$.
-

ESERCIZIO 2 - CINEMATICA

Un proiettile viene lanciato dal bordo di una vasca ad un'altezza dal suolo $h_1 = 10 \text{ m}$ con velocità di modulo $|\vec{v}| = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, inclinata di $\theta = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale. Determinare:

- a) la massima altezza H raggiunta dal proiettile e il tempo t impiegato a raggiungerla;
 - b) la distanza orizzontale d , raggiunta dal proiettile, dopo $t = 4.2 \text{ s}$;
 - c) FACOLTATIVO: la profondità h_2 della vasca, sapendo che il tempo necessario per toccare il fondo è $t = 4.2 \text{ s}$.
-

ESERCIZIO 3 - DINAMICA

Un corpo A di massa $m_A = 1 \text{ kg}$ si trova inizialmente alla base di un piano inclinato di $\theta = 45^\circ$ rispetto all'orizzontale e di altezza $h = 0.5 \text{ m}$. Il piano è scabro con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.12$. Il corpo è tirato lungo il piano da una fune, con tensione costante T . Determinare:

- a) la normale al piano n e le componenti della forza peso perpendicolari e parallele al piano;
 - b) la trazione T della fune con cui il corpo è tirato lungo il piano inclinato, con accelerazione costante $a = 5 \text{ m/s}^2$.
-

ESERCIZIO 4 – LAVORO-ENERGIA

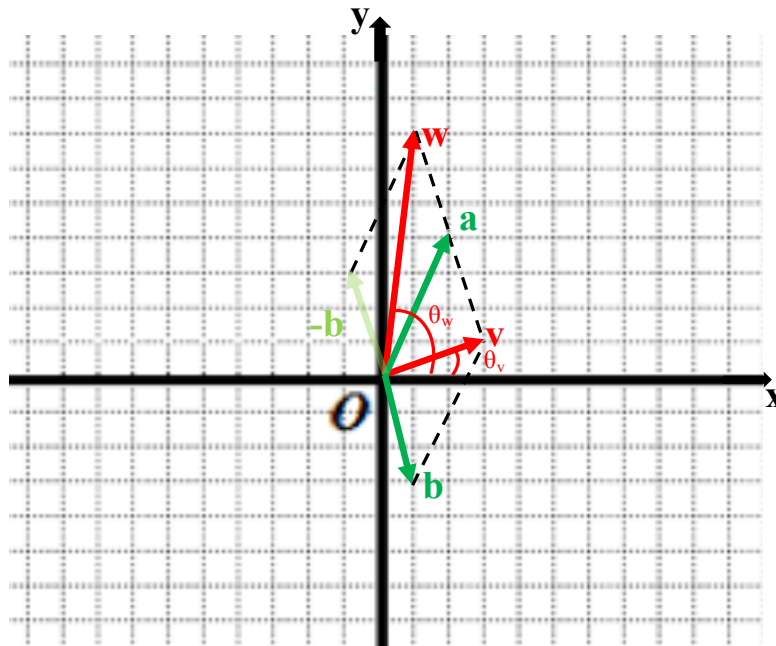
Una pallina di massa $m = 700 \text{ g}$ inizialmente ferma scende dalla sommità di un piano inclinato di $\theta = 25^\circ$ rispetto all'orizzontale e di lunghezza $s = 2.4 \text{ m}$. Il piano è scabro con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.2$. Determinare:

- a) il lavoro della forza peso e della forza di attrito lungo tutto il piano inclinato;
 - b) la velocità v_f della pallina alla fine della discesa e dopo avere percorso un tratto orizzontale $d = 2 \text{ m}$, privo di attrito;
 - c) FACOLTATIVO: la massima compressione d di una molla di costante $k = 7000 \text{ N/m}$, a cui il corpo si appoggia alla fine del tratto orizzontale privo di attrito.
-

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA.
Testi, soluzioni ed esiti alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

SOLUZIONE 1 - PREREQUISITI

a)



Vettore somma:

$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} = (2 + 1)\mathbf{i} + (4 - 3)\mathbf{j} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$\tan \theta_v = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \theta_v = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1} \frac{1}{3} = 18.44^\circ$$

Vettore sottrazione:

$$\vec{w} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (2 - 1)\mathbf{i} + (4 + 3)\mathbf{j} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\tan \theta_w = \frac{w_y}{w_x} \Rightarrow \theta_w = \tan^{-1} \frac{w_y}{w_x} = \tan^{-1} 7 = 81.89^\circ$$

b) prodotto scalare:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos(\theta_{v-w})$$

$$\theta_{v-w} = \theta_w - \theta_v = 81.89^\circ - 18.44^\circ = 63.45^\circ$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sqrt{10} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \cos(63.45^\circ) = 10$$

SOLUZIONE 2 – CINEMATICA

a) Le equazioni del moto uniformemente accelerato sull'asse y sono le seguenti:

$$\begin{cases} v_y = v_{oy} - gt = v \sin \theta_v - gt \\ y = h_1 + v_{oy}t - \frac{1}{2} gt^2 = h_1 + v \sin \theta_v t - \frac{1}{2} gt^2 \end{cases}$$

Ponendo $v_y = 0$ e $y = H$

si ottiene un sistema di 2 equazioni in due incognite, da cui è possibile ricavare il tempo t impiegato a raggiungere la massima quota H e il valore della massima quota H :

$$t = \frac{v \sin \theta_v}{g} = \frac{30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0.5}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1.5 \text{ s}$$

$$H = h_1 + \frac{v^2 \sin^2 \theta_v}{2g} - \frac{1}{2} g \frac{v^2 \sin^2 \theta_v}{g^2}$$

$$H = h_1 + \frac{1}{2} \frac{v^2 \sin^2 \theta_v}{g} = 10 \text{ m} + 0.5 \frac{900 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot 0.25}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 21.5 \text{ m}$$

b) Lungo la direzione x il moto è rettilineo ed uniforme, si ottiene quindi:

$$d = v_{ox}t = v \cos \theta_v t$$

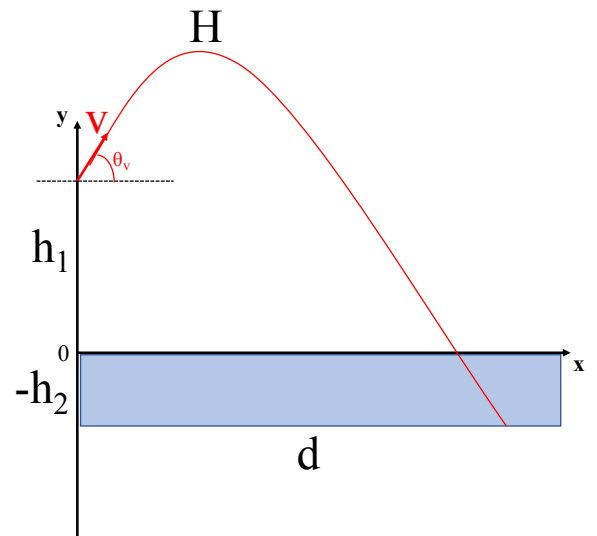
$$d = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4.2 \text{ s} = 109.1 \text{ m}$$

c) **FACOLTATIVO:**

La profondità h_2 si ottiene utilizzando nuovamente l'equazione del moto sulla y:

$$-h_2 = h_1 + v_{oy}t - \frac{1}{2} gt^2 = h_1 + v \sin \theta_v t - \frac{1}{2} gt^2$$

$$h_2 = -h_1 - v \sin \theta_v t + \frac{1}{2} gt^2 = -10 \text{ m} - 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0.5 \cdot 4.2 \text{ s} + 0.5 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 17.6 = 13.2 \text{ m}$$



SOLUZIONE - DINAMICA

Il problema può essere risolto applicando l'equazione della dinamica al corpo di massa m_A

$$\vec{F}_A + \vec{T} + \vec{f}_{att} + \vec{n} = m_A \vec{a}$$

le proiezioni sugli assi sono:

$$\begin{cases} T - f_{att} - F_A \sin \theta = m_A a \\ n - F_A \cos \theta = 0 \end{cases}$$

da cui segue:

$$n = F_A \cos \theta = 1 \text{ kg} \cdot \frac{9.8 \text{ m}}{\text{s}^2} \sqrt{2}/2 = 6.9 \text{ N}$$

ove le componenti x e y della forza peso sono:

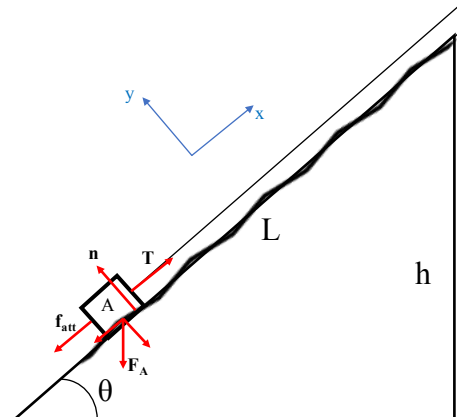
$$(F_A)_x = F_A \sin \theta = 6.9 \text{ N}$$

$$(F_A)_y = F_A \cos \theta = 6.9 \text{ N}$$

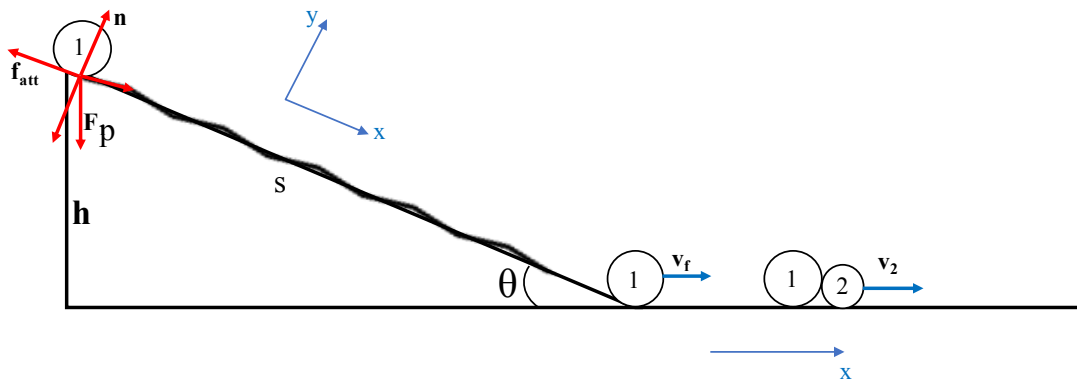
b) La tensione della fune si ricava dal bilancio delle forze:

$$f_{att} = \mu_d F_A \cos \theta = \mu_d m_A g \cos \theta$$

$$\begin{aligned} T &= \mu_d m_A g \cos \theta + m_A g \sin \theta + m_A a \\ &= m_A (\mu_d g \cos \theta + g \sin \theta + a) \\ &= 1 \text{ kg} \cdot \left(0.12 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 12.8 \text{ N} \end{aligned}$$



SOLUZIONE 4 – LAVORO-ENERGIA



a)

$$L_{f_{att}} = \vec{f}_{att} \cdot \vec{s} = |\vec{f}_{att}| |\vec{s}| \cos(\theta_{f_{att}-s}) = \mu_d m_1 g \cos \theta s \cos(\theta_{f_{att}-s})$$

$$L_{f_{att}} = 0.2 \cdot 0.7 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos(25^\circ) 2.4 \text{ m} \cos(180^\circ) = -2.9 \text{ J}$$

La forza peso è conservativa, pertanto il suo lavoro può essere calcolato anche come variazione di energia potenziale:

$$L_{F_p} = \vec{F}_p \cdot \vec{s} = |\vec{F}_p| |\vec{s}| \cos(\theta_{F_p-s}) = m_1 g s \cos(\theta_{F_p-s}) = m g h = m g s \sin(25^\circ)$$

$$L_{F_p} = 0.7 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 2.4 \text{ m} \cos(65^\circ) = 6.9 \text{ J}$$

b) La velocità alla base del piano si ottiene dal teorema lavoro energia cinetica

$$\Delta K = \sum_i L_i = L_{f_{att}} + L_{F_p} = L_{tot}$$

$$L_{tot} = 6.9 \text{ J} - 2.9 \text{ J} = 4 \text{ J}$$

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = L_{tot} \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2 L_{tot}}{m_1}}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \text{ J}}{0.7 \text{ kg}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{0.7 \text{ kg}}} = 3.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Al termine del tratto d, orizzontale e liscio, la velocità è invariata.

d) FACOLTATIVO:

L'unica forza che compie lavoro è la forza elastica, conservativa, pertanto è possibile applicare il principio di conservazione della energia meccanica:

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} k d^2$$

$$d = \sqrt{\frac{m}{k}} v_f = 0.034 \text{ m} = 3.4 \text{ cm}$$