

II PARZIALE - FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE

A.A. 2023/2024, 23 aprile 2024

ESERCIZIO 1 – FLUIDI

Una sfera di volume $V = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ galleggia in una bacinella riempita d'acqua con $2/3$ del suo volume immerso.

- Determinare la densità ρ_{sf} della sfera e la forza esterna che si dovrebbe applicare per immergere completamente in acqua la sfera.
- Si consideri ora una sfera identica alla prima ma con una cavità sferica al proprio interno. Si calcoli il raggio r della cavità sapendo che la variazione di forza peso tra la sfera senza cavità e quella con cavità è $\Delta F_p = 2 \text{ N}$.

ESERCIZIO 2 – TEMPERATURA-CALORE

Una sostanza incognita di massa $m_X = 100 \text{ g}$ si trova alla temperatura $T_X = 100^\circ\text{C}$. Tale sostanza viene posta in un contenitore isolato di **alluminio** (calore specifico $c_{Al} = 900 \text{ J/(kg }^\circ\text{K)}$) di massa $m_{Al} = 60.0 \text{ g}$ che contiene una massa di acqua $m_{H_2O} = 150 \text{ g}$, entrambi alla temperatura iniziale $T_{H_2O} = 20^\circ\text{C}$. Quando il sistema (sostanza incognita-contenitore-acqua) raggiunge l'equilibrio termico, la temperatura finale è pari a $T_{eq} = 21.5^\circ\text{C}$.

Si determinino:

- il **calore totale** Q ceduto dalla sostanza incognita e il suo **calore specifico** c_X ;
 - la **massa** m_X della sostanza incognita affinché l'acqua raggiunga la temperatura $T_{eq} = 30^\circ\text{C}$.
- [N.B. calore specifico dell'acqua $c_{H_2O} = 4186 \text{ J/(kg }^\circ\text{K)}$]

ESERCIZIO 3 – TERMODINAMICA

Un gas perfetto biatomico con $n = 2$ moli compie il seguente ciclo termodinamico:

- $A \rightarrow B$ trasformazione isoterma con $p_A = 6 \text{ atm}$, $V_A = 0.5 \text{ l}$, $V_B = 2V_A$
- $B \rightarrow C$ trasformazione isocora con $p_C = \frac{1}{2}p_B$
- $C \rightarrow D$ trasformazione isobara con $V_D = V_A$
- $D \rightarrow A$ trasformazione isocora

- Si disegni il **grafico** del ciclo termodinamico nel piano (p, V) e si determinino le coordinate termodinamiche nei punti A, B, C e D.
- Si calcoli il **lavoro** svolto dal gas e **variazione** di **energia interna** per ogni trasformazione termodinamica e per l'intero ciclo.
- FACOLTATIVO**: si determini il **rendimento** della macchina termica ideale che opera seguendo questo ciclo termodinamico.

[N.B. $R = 8.31 \text{ J/moleK}$]

RECUPERO PREREQUISITI

Si considerino i vettori $\vec{a} = (3\vec{i} + 2\vec{j})\text{m}$, $\vec{b} = (-3\vec{i} + 3\vec{j})\text{m}$, $\vec{c} = (2\vec{i} - 1\vec{j})\text{m}$ ed il vettore $\vec{F} = (4\vec{i} + 3\vec{j})\text{N}$

Determinare il vettore $\vec{s} = (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$, il modulo di F e di s , il prodotto scalare tra F ed s .

RECUPERO CINEMATICA

Un corpo viene lanciato da terra verso l'alto con velocità iniziale v_0 e angolo $\theta = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale. Calcolare la velocità v_0 (modulo) affinché il corpo raggiunga l'altezza $h = 3 \text{ m}$ nel punto di massima quota.

RECUPERO DINAMICA

Un corpo di massa $m = 1 \text{ kg}$ è trattenuto da una fune sulla sommità di piano liscio, inclinato di $\theta = 30^\circ$ e di altezza $h = 1.5 \text{ m}$. Si calcolino la tensione T della fune e la normale N al piano.

RECUPERO LAVORO-ENERGIA

Un corpo di massa $m_1 = 100 \text{ g}$ parte da fermo dalla sommità di un piano inclinato liscio alto $h_1 = 2 \text{ m}$, inclinato di un angolo $\alpha = 30^\circ$ con il piano orizzontale. Alla base del piano, il corpo procede lungo un piano orizzontale liscio lungo $L = 50 \text{ cm}$. Determinare la **velocità** del corpo di massa m_1 alla base del piano inclinato e alla fine del tratto orizzontale liscio L .

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA.
Testi, soluzioni ed esiti su ARIEL e alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

SOLUZIONE FLUIDI

a) La sfera galleggia, cioè è in equilibrio. Possiamo quindi scrivere:

$$F_p = S$$

dove F_p ed S sono rispettivamente la forza peso e la spinta di Archimede, le due forze agenti sulla sfera. Esplicitando queste ultime:

$$\rho_{sf} V g = \rho_{H2O} \frac{2}{3} V g$$

E quindi:

$$\rho_{sf} = \frac{2}{3} \rho_{H2O} = \frac{2}{3} 1000 \frac{kg}{m^3} = 666.6 \frac{kg}{m^3}$$

Per poter immergere completamente la sfera in acqua è necessario applicare una forza esterna. Poniamoci nella condizione in cui la sfera, sotto l'azione della forza peso, della forza esterna e della spinta di Archimede, è all'equilibrio completamente immersa in acqua:

$$F_{ext} + F_p = S$$

$$F_{ext} + \rho_{sf} V g = \rho_{H2O} V g$$

$$F_{ext} = V g (\rho_{H2O} - \rho_{sf}) = \frac{1}{3} V g \rho_{H2O} = 6.5 N$$

b) Per poter calcolare il volume della cavità sferica, e quindi il raggio, consideriamo la differenza di forza peso tra la sfera con cavità e quella senza cavità.

$$\Delta F_p = \rho_{sf} V g - \rho_{sf} (V - V_{cavità}) g$$

$$\Delta F_p = \rho_{sf} V g - \rho_{sf} V g + \rho_{sf} V_{cavità} g$$

$$\Delta F_p = \rho_{sf} V_{cavità} g$$

$$V_{cavità} = \frac{\Delta F_p}{\rho_{sf} g} = 3.06 \cdot 10^{-4}$$

Dall'informazione sul volume ricaviamo subito il raggio della cavità:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 V}{4 \pi}} = 0.04 m$$

SOLUZIONE TEMPERATURA-CALORE

- a) Essendo il sistema isolato, gli scambi di calore avvengono solo tra la sostanza incognita ed il contenitore di alluminio contenente l'acqua. Il calore Q ceduto dalla sostanza è quindi uguale al calore assorbito dall'acqua e dall'alluminio, e tale calore è necessario per far variare la temperatura da 20°C fino a 21.5°C. Si avrà quindi:

$$\begin{aligned} Q &= (m_{H_2O} c_{H_2O} + m_{Al} c_{Al}) (T_{eq} - T_{H_2O}) \\ &= (0.150 \text{ kg} \times 4186 \text{ J/(kg } ^\circ\text{K)} + 0.060 \text{ kg} \times 900 \text{ J/(kg } ^\circ\text{K)}) (21.5 - 20) ^\circ\text{K} = 1023 \text{ J} \end{aligned}$$

Il calore specifico della sostanza sconosciuta vale

$$c_X = Q/[m_X (T_X - T_{eq})] = 1023 \text{ J}/(0.1 \text{ kg} \times (100 - 21.5) ^\circ\text{K}) = 130.3 \text{ J/(kg } ^\circ\text{K)}$$

- b) Per trovare la massa m_X della sostanza incognita tale che la temperatura raggiunga $T_{eq}' = 30^\circ\text{C}$, è necessario calcolare il calore che occorre fornire al sistema acqua – alluminio:

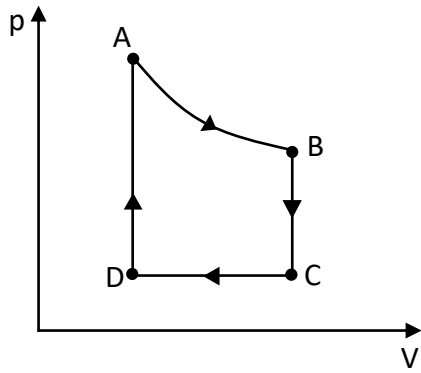
$$\begin{aligned} Q &= (m_{H_2O} c_{H_2O} + m_{Al} c_{Al}) (T_{eq}' - T_{H_2O}) \\ &= (0.150 \text{ kg} \times 4186 \text{ J/(kg } ^\circ\text{K)} + 0.060 \text{ kg} \times 900 \text{ J/(kg } ^\circ\text{K)}) (30 - 20) ^\circ\text{K} = 6819 \text{ J} \end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$m_X = Q/[c_X (T_X - T_{eq}')] = 6819 \text{ J}/(130.3 \text{ J/(kg } ^\circ\text{K)} \times (100 - 30) ^\circ\text{K}) = 0.748 \text{ kg}$$

SOLUZIONE TERMODINAMICA

a)



Calcoliamo le coordinate termodinamiche, considerando la legge dei gas perfetti $pV = nRT$.

Stato A:

$$p_A = 6 \text{ atm} = 6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_A = 0.5 \text{ l} = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = 18 \text{ K}$$

Stato B:

$T_B = T_A = 18 \text{ K}$ poichè la trasformazione $A \rightarrow B$ è isoterma

$$V_B = 2V_A = 1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$p_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{nRT_A}{2V_A} = \frac{1}{2} p_A = 3 \text{ atm} = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Stato C:

$$p_C = \frac{1}{2} p_B = 1.5 \text{ atm} = 1.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$V_C = V_B = 1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3$ poichè la trasformazione $B \rightarrow C$ è isocora

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{\frac{1}{2} p_B V_B}{nR} = \frac{1}{2} T_B = 9 \text{ K}$$

Stato D:

$$p_D = p_C = 1.5 \text{ atm} = 1.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_D = V_A = 0.5 \text{ l} = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_D = \frac{p_D V_D}{nR} = \frac{1}{4} T_A = 4.5 \text{ K}$$

b) Calcoliamo il lavoro compiuto dal gas per ogni ramo della trasformazione termodinamica:

$$L_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p \, dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} \, dV = nRT_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{1}{V} \, dV = nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nRT_A \ln(2) = 206J$$

$$L_{BC} = 0J$$

$$L_{CD} = p_C(V_D - V_C) = -75J$$

$$L_{DA} = 0J$$

Il lavoro totale compiuto dal gas:

$$L_{tot} = 206J - 75J = 131J$$

Calcoliamo la variazione di energia interna per ogni ramo della trasformazione termodinamica (ricordiamoci che stiamo parlando di un gas biatomico quindi $c_V = (5/2)R$):

$$\Delta E_{AB} = nc_V(T_B - T_A) = 0J$$

$$\Delta E_{BC} = nc_V(T_C - T_B) = -374J$$

$$\Delta E_{CD} = nc_V(T_D - T_C) = -187J$$

$$\Delta E_{DA} = nc_V(T_A - T_D) = 561J$$

La variazione di energia interna dell'intero ciclo è :

$$\Delta E_{tot} = 0J$$

c) Il rendimento è definito come il rapporto tra il lavoro totale svolto ed il calore Q assorbito, pari alla somma dei soli calori positivi). Valutiamo quindi i calori scambiati nelle singole trasformazioni:

A→B isoterma: $Q_{AB} = L_{AB} = 206 J > 0$

B→C isocora: $Q_{BC} = \Delta E_{BC} < 0$

C→D isobara: $Q_{CD} = \Delta E_{CD} + L_{CD} < 0$

D→A isocora: $Q_{DA} = \Delta E_{DA} = 561 J > 0$

Il rendimento è quindi pari a

$$\varepsilon = L/(Q_{AB} + Q_{DA}) = 131/(206+561) = 0.17 = 17\%$$

RECUPERO PREREQUISITI

Il vettore $\vec{s}$ si può calcolare per componenti:

$$\begin{aligned}\vec{s} &= (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \\ &= (+3-3-2)\vec{i} + (2+3+1)\vec{j} \\ &= -2\vec{i} + 6\vec{j}\end{aligned}$$

I moduli di $\vec{s}$ e $\vec{F}$ valgono:

$$\begin{aligned}|\vec{s}| &= \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = 6.3 \\ |\vec{F}| &= \sqrt{(4)^2 + 3^2} = 5\end{aligned}$$

Il prodotto scalare si può calcolare per componenti:

$$\begin{aligned}L &= \vec{F} \cdot \vec{s} \\ &= F_x s_x + F_y s_y = 10\end{aligned}$$

RECUPERO CINEMATICA

Prendiamo un sistema di riferimento centrato sulla posizione iniziale del corpo, con l'asse x diretto come l'orizzontale e l'asse y diretto verso l'alto. Il corpo si muove di moto parabolico, ovvero le leggi del moto sono

$$\begin{aligned}a_x &= 0 & a_y &= -g \\ v_x &= v_0 \cos \theta & v_y &= v_0 \sin \theta - gt \\ x &= v_0 \cos \theta t & y &= v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2\end{aligned}$$

Il punto di massima altezza corrisponde al punto in cui la componente della velocità lungo y si annulla e viene raggiunto all'istante $t = v_0 \sin \theta / g$.

La quota corrispondente è pari a $y = (v_0 \sin \theta)^2 / 2g$ e la velocità in $y=h$ vale

$$v_0 = (2gh)^{1/2} / \sin \theta = 15.3 \text{ m/s.}$$

RECUPERO DINAMICA

Disegniamo il diagramma del corpo libero utilizzando un sistema di assi cartesiani con x parallelo al piano inclinato, come mostrato in figura.

Il corpo è in equilibrio e l'equazione del moto è:

$$\vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_g = m\vec{a} = 0$$

Proietto l'equazione del moto sugli assi x e y:

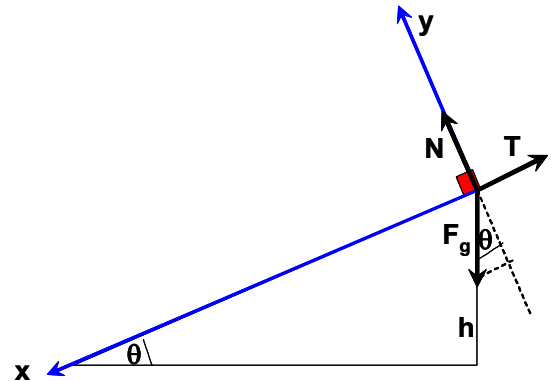
$$\text{asse x: } -T + mg \sin \theta = ma_x = 0$$

$$\text{asse y: } N - mg \cos \theta = ma_y = 0$$

da cui si ricava:

$$N = mg \cos \theta = 1\text{kg} \times (9.8\text{m/s}^2) \times \cos(30^\circ) = 8.5\text{J}$$

$$T = mg \sin \theta = 1\text{kg} \times (9.8\text{m/s}^2) \times \sin(30^\circ) = 4.9\text{J}$$



RECUPERO ENERGIA

La velocità del corpo 1 alla base del piano inclinato si ricava dal principio di conservazione dell'energia, tenendo conto del fatto che in cima al piano il corpo è fermo. Indicando con h_0 ($=0$) la quota relativa al piano orizzontale e con h_1 la cima del piano inclinato, abbiamo:

$$m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + m g h_0$$

$$v_1^2 = 2g(h_1 - h_0) \Rightarrow v_1 = \sqrt{2 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 2\text{m}} = 6.26 \text{ m/s}$$

Dalla base del piano inclinato, il corpo m_1 procede lungo il tratto orizzontale L liscio, pertanto la sua energia cinetica non cambierà e la sua velocità all'istante prima dell'urto rimarrà uguale a v_1 .