

APPELLO - FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE
A.A. 2021/22, 4 Aprile 2022

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

Dati i vettori spostamento $\mathbf{A} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = -2\mathbf{j}$, dopo averli disegnati nel piano cartesiano, calcolare il vettore differenza $\mathbf{S} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$, il modulo di $\mathbf{S}$, l'angolo φ di inclinazione rispetto all'asse orizzontale x . Disegnare $\mathbf{S}$ nel piano cartesiano. Calcolare il prodotto scalare tra $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Trovare l'angolo θ compreso tra $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

ESERCIZIO 2 – MECCANICA

Un proiettile di massa $m_P = 40 \text{ g}$, che ha velocità $v_P = 30 \text{ m/s}$, è sparato contro un blocco di massa $M_B = 100 \text{ g}$, fermo su un piano orizzontale. Dopo l'urto perfettamente anelastico, in cui il proiettile si conficca nel blocco, il sistema (blocco+proiettile) si mette in moto e sale lungo un piano scabro, inclinato di 40° rispetto al piano orizzontale, fino ad arrestarsi.

- a) Si calcoli la **velocità V** del sistema (blocco + proiettile) subito dopo l'urto e l'**altezza massima H** raggiunta dal sistema in assenza di attrito;
- b) Supponendo il piano scabro, con coefficiente $\mu = 0.6$, si determini la **componente della forza risultante** lungo direzione del piano inclinato e si calcoli il **tratto D** , lungo il piano inclinato, percorso dal sistema (blocco + proiettile) prima di arrestarsi.
-

ESERCIZIO 3 – FLUIDI

Un recipiente cilindrico, aperto superiormente, ha diametro $d = 1.5 \text{ m}$. Contiene acqua ed ha sul fondo un foro, che ha sezione $s = 5 \text{ cm}^2$, ed è inizialmente chiuso da un tappo. Tolto il tappo, l'acqua esce dal foro con portata volumetrica $Q = 2 \text{ litri/s}$. Calcolare:

- a) la **velocità v_f** con cui l'acqua esce inizialmente dal foro e la **velocità v_L** dell'acqua in un punto della superficie libera superiore;
- b) l'**altezza h_L** a cui si trova inizialmente la superficie libera dell'acqua, rispetto al fondo, ed il **volume V** di acqua contenuto nel recipiente.

[Nota: Supporre l'acqua nel recipiente un fluido ideale in moto stazionario e irrotazionale.]

ESERCIZIO 4 – TERMODINAMICA

Un gas perfetto **biatomico**, pari a $n = 0.2 \text{ moli}$, compie una trasformazione ciclica tra gli stati A, B e C, come segue:

da A a B: **isoterma**, con $V_A = 5 \text{ l}$, $T_A = 900 \text{ K}$ e $p_B = p_A/3$;

da B a C: **isobara**, con $V_C = V_A$;

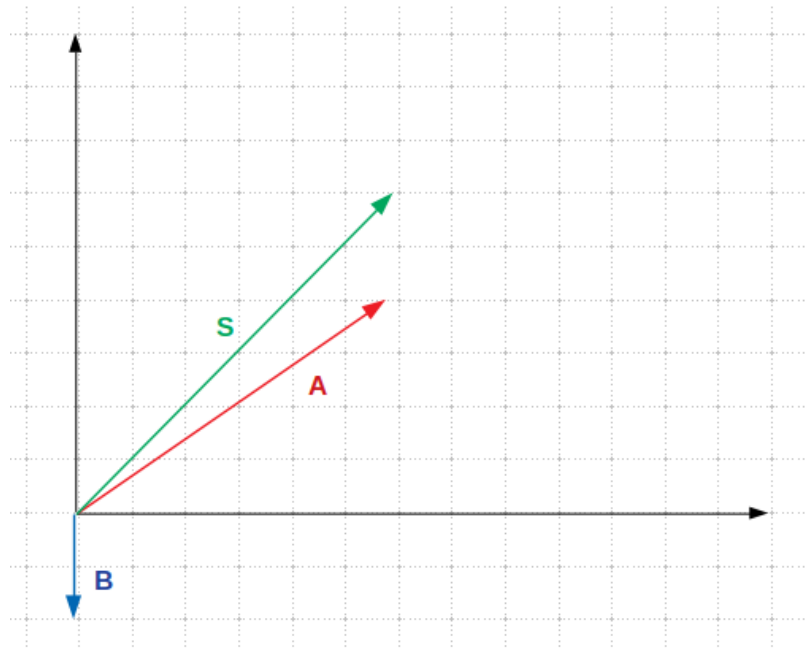
da C ad A: **isocora**.

- a) Dopo aver disegnato la trasformazione nel piano p - V , si calcolino le coordinate termodinamiche (p, V, T) in A, B e C ed il **lavoro L compiuto** dal gas durante la trasformazione **isoterma**;
- b) Si calcoli il **calore scambiato Q** dal gas durante la trasformazione ciclica ed il **rendimento** della corrispondente macchina termica.
-

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA.

Testi, soluzioni ed esiti alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI



Il vettore differenza si può calcolare per componenti:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x)\mathbf{i} + (A_y - B_y)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{S} = (6 - 0)\mathbf{i} + (4 + 2)\mathbf{j} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$$

Il vettore $\mathbf{S}$ ha modulo $|\mathbf{S}|$ e inclinazione φ rispetto all'asse x , pari a:

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 8.5.$$

L'angolo di inclinazione φ è pari a:

$$\varphi = \text{atan}(S_y/S_x) = \text{atan}(6/6) = 45^\circ.$$

Il prodotto scalare tra i vettori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ si ottiene per componenti:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x \times B_x) + (A_y \times B_y) = 6 \times 0 + 4 \times (-2) = -8.$$

Per trovare l'angolo ϑ compreso tra $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ serve prima calcolare i moduli di $\mathbf{A}$ e di $\mathbf{B}$.

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = 7.2,$$

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2.$$

Si usi quindi la definizione di prodotto scalare

$$\mathbf{AB} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos \vartheta \quad \text{da cui}$$

$$\cos \vartheta = \mathbf{AB} / |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \quad \text{dalla quale si ottiene}$$

$$\vartheta = \arccos (\mathbf{AB} / |\mathbf{A}||\mathbf{B}|) = 123.7^\circ.$$

SOLUZIONE 2 – MECCANICA

a) Nell'urto si conserva la quantità di moto totale del sistema e pertanto, indicato con m_P ed M_B le masse del proiettile e del blocco, con v_P la velocità del proiettile e con V la velocità del sistema blocco+proiettile dopo l'urto, si ha:

$$m_P v_P = (m_P + M_B) V$$

da cui si ricava V .

Sostituendo i valori numerici si ha $V = 8.6 \text{ m/s}$

In assenza di attrito, l'unica forza che compie lavoro è la forza peso che è conservativa, pertanto l'energia meccanica si conserva:

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

$$-1/2 (m_P + M_B) V^2 = - (m_P + M_B) g H$$

da cui si ottiene

$$H = V^2 / (2g) = 3.8 \text{ m}$$

b) Salendo sul piano inclinato il sistema (blocco + proiettile) è soggetto alla forza peso, alla forza di attrito e alla reazione normale al piano. Scelto l'asse x di un sistema d'assi (x,y) , parallelo al piano inclinato, con verso coincidente con quello del moto (verso l'alto), e con origine O alla base del piano inclinato, la componente x della forza risultante è:

$$\begin{aligned} F_x &= - (m_P + M_B) g \sin 40^\circ - \mu (m_P + M_B) g \cos 40^\circ \\ &= - (m_P + M_B) g (\sin 40^\circ + \mu \cos 40^\circ) \\ &= - 1.5 \text{ N} \end{aligned}$$

Il Lavoro compiuto dalla forza risultante nel tratto D percorso prima di arrestarsi uguaglia la variazione di energia cinetica del blocco (+ proiettile). Vale pertanto

$$- (m_P + M_B) g \sin 40^\circ D - \mu (m_P + M_B) g \cos 40^\circ D = \Delta K = 0 - \frac{1}{2} (m_P + M_B) V^2$$

da cui si ricava D :

$$D = V^2 / (2g (\mu \cos 40^\circ + \sin 40^\circ)).$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene $D = 3.4 \text{ m}$

ESERCIZIO 3 – FLUIDI

a) La portata volumetrica Q , costante, è $Q = v \cdot S$ dove v è la velocità del fluido attraverso la sezione S del condotto. La velocità di efflusso dell'acqua dal foro v_f si calcola quindi dalla $v_f = Q/S_f$ dove S_f è la sezione del foro. Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$v_f = 2 \cdot 10^{-3} \text{ (m}^3\text{/s)} / 5 \cdot 10^{-4} \text{ (m}^2\text{)} = 4 \text{ m/s.}$$

Analogamente la velocità alla superficie libera superiore v_L è $v_L = Q/S_L$ dove S_L è la sezione del cilindro. Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$v_L = 2 \cdot 10^{-3} \text{ (m}^3\text{/s)} / 0.75^2 \cdot \pi \text{ (m}^2\text{)} = 1.1 \cdot 10^{-3} \text{ (m/s).}$$

b) Applicando il teorema di Bernoulli ai punti della superficie libera dell'acqua e a quelli del foro si ha:

$\frac{1}{2} \rho v_L^2 + \rho g h_L = \frac{1}{2} \rho v_f^2$ dove h_L è l'altezza dell'acqua contenuta nel cilindro. Il termine $\frac{1}{2} \rho v_L^2$ è trascurabile rispetto a $\frac{1}{2} \rho v_f^2$ e pertanto

$$h_L \cong \frac{1}{2} v_f^2 / g = 0.81 \text{ m.}$$

Il volume di acqua inizialmente contenuto è pertanto:

$$V = S_L h_L = 0.75^2 \cdot \pi \text{ (m}^2\text{)} \cdot 0.81 \text{ (m)} = 1.43 \text{ m}^3.$$

ESERCIZIO 4 – TERMODINAMICA

a)

Le coordinate termodinamiche si ricavano dall'equazione di stato dei gas perfetti $pV = nRT$ e sono le seguenti:

Stato A

$$V_A = 5 \text{ l} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_A = 900 \text{ K}$$

$$p_A = nR T_A / V_A = 2.99 \cdot 10^5 \text{ Pa} \sim 3 \text{ atm}$$

Stato B

$$T_B = T_A = 900 \text{ K}$$

$$p_B = p_A/3 \sim 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$$

$$V_B = nR T_B / p_B = 3 nR T_A / p_A = 3 V_A = 15 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Stato C

$$p_C = p_B \sim 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$$

$$V_C = V_A = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_C = p_C V_C / (nR) = p_B V_A / (nR) = 1/3 p_A V_A / (nR) = 1/3 T_A = 300 \text{ K}$$

Il lavoro svolto dal gas durante la trasformazione isoterma è pari a

$$L_{AB} = nRT_A \ln(V_B/V_A) = nRT_A \ln(3V_A/V_A) = nRT_A \ln(3) = 1643 \text{ J}$$

b) Il calore Q_{TOT} scambiato dal gas nell'intera trasformazione ciclica è pari alla somma dei calori scambiati nelle trasformazioni individuali, ove

$$Q_{AB} = L_{AB} = 1643 \text{ J} > 0$$

$$Q_{BC} = n c_p (T_C - T_B) = n \cdot 7/2 R (T_A/3 - T_A) = -n \cdot 7/3 R T_A = -3490 \text{ J} < 0$$

$$Q_{CA} = n c_v (T_A - T_C) = n \cdot 5/2 R (T_A - T_A/3) = n \cdot 5/3 R T_A = 2493 \text{ J} > 0$$

da cui segue

$$Q_{TOT} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 646 \text{ J}$$

Il rendimento ε della corrispondente macchina termica è pari al rapporto tra lavoro svolto dalla macchina ed il calore assorbito in un ciclo, come segue

$$\varepsilon = L_{TOT}/Q_{positivo} = Q_{TOT}/Q_{positivo} = (646 \text{ J})/(1643 \text{ J} + 2493 \text{ J}) = 0.16 = 16 \%$$

