

APPELLO - FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE
A.A. 2022/2023, 27 aprile 2023

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

Siano dati in un piano cartesiano ortogonale XY i vettori $\vec{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ e $\vec{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$. Determinare:

- a) i vettori $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{w} = \vec{a} - \vec{b}$ in modulo, direzione e verso e rappresentarli nel piano;
- b) il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

ESERCIZIO 2 – MECCANICA

Un corpo di massa $m = 500 \text{ g}$ scende lungo un piano scabro (coefficiente di attrito μ), inclinato di un angolo $\theta = 45^\circ$. Prosegue poi lungo un tratto orizzontale di lunghezza $BC = 1\text{m}$, con il medesimo coefficiente di attrito μ del piano inclinato. Alla fine del tratto orizzontale BC , il corpo sale lungo un piano liscio, inclinato di un angolo $\phi = 30^\circ$ ed urta, in modo **completamente anelastico**, con un corpo di massa $2m$ posto in D , a quota $h_D = 30 \text{ cm}$ rispetto al piano orizzontale. Dopo avere schematicamente disegnato il problema ed avere disegnato il diagramma del corpo libero per la discesa lungo il primo piano inclinato ($\theta = 45^\circ$), determinare:

- a) il coefficiente di attrito μ affinché il corpo scenda lungo il primo piano inclinato con velocità costante $v = 7 \text{ m/s}$, e la velocità del corpo nel punto C , al termine del tratto orizzontale BC ;
- a) la velocità del corpo nel punto D , immediatamente **prima** dell'urto anelastico;

Facoltativo: la velocità del sistema dei due corpi, immediatamente **dopo** l'urto.

ESERCIZIO 3 – FLUIDI

Si consideri un cubo di piombo ($\rho_{Pb} = 11.3 \text{ g/cm}^3$) che pesa $F_{p,cubo1} = 42.5 \text{ N}$ e una sfera di materiale non specificato di volume pari a quello del cubo. Entrambi i corpi sono posti in acqua. Calcolare:

- a) la **spinta di Archimede** agente sui corpi (specificandone intensità, direzione e verso) e la **densità della sfera**, considerandola completamente immersa in acqua e in condizione di equilibrio.

Si consideri ora un secondo cubo, uguale al primo, ma che presenta al suo interno una cavità cubica vuota. Il peso di questo cubo è $F_{p,cubo2} = 12\text{N}$. Calcolare:

- b) la **spinta di Archimede** del nuovo cubo e la lunghezza del **lato L** della cavità presente al suo interno.

ESERCIZIO 4 – TERMODINAMICA

Un gas perfetto **biatomico**, pari a $n = 0.3 \text{ moli}$, compie una trasformazione ciclica tra gli stati A, B e C, come segue:

- i) da A a B: **isoterma**, con $V_A = 4 \text{ l}$, $T_A = 900 \text{ K}$ e $p_B = p_A/4$;
- ii) da B a C: **isobara**, con $V_C = V_A$;
- iii) da C ad A: **isocora**.

- a) Dopo aver disegnato la trasformazione nel piano p-V, si calcolino le coordinate termodinamiche (p, V, T) in A, B e C;
- b) Si calcoli il lavoro compiuto dal gas;
- c) Facoltativo: Si calcoli il rendimento della macchina termica associata.

(Nota: $R = 8.31 \text{ J/Kmol} = 0.082 \text{ l atm /Kmol}$)

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA. Testi, soluzioni ed esiti alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

SOLUZIONE 1 – PREREQUISITI

a) Vettore somma:

$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} = (2 + 1)\mathbf{i} + (4 - 3)\mathbf{j} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$\tan \theta_v = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \theta_v = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1} \frac{1}{3} = 18.44^\circ$$

Vettore sottrazione:

$$\vec{w} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (2 - 1)\mathbf{i} + (4 + 3)\mathbf{j} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

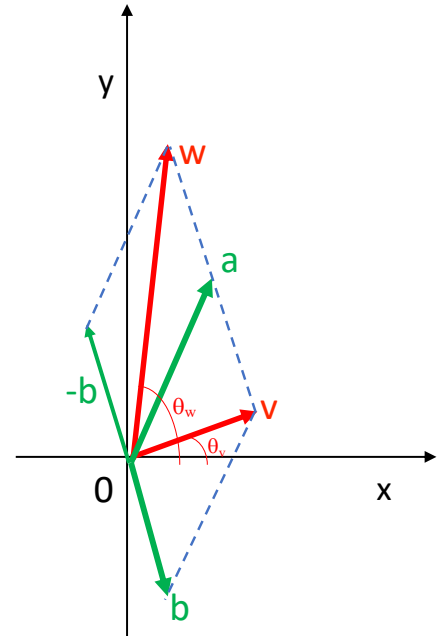
$$\tan \theta_w = \frac{w_y}{w_x} \Rightarrow \theta_w = \tan^{-1} \frac{w_y}{w_x} = \tan^{-1} 7 = 81.89^\circ$$

b) prodotto scalare:

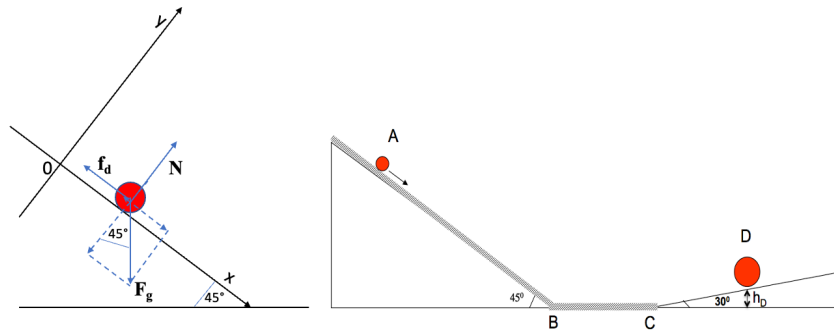
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos(\theta_{v-w})$$

$$\theta_{v-w} = \theta_w - \theta_v = 81.89^\circ - 18.44^\circ = 63.45^\circ$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sqrt{10} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \cos(63.45^\circ) = 10$$



SOLUZIONE 2 – MECCANICA



- a) Il corpo scende con velocità costante lungo il piano inclinato se la forza risultante $\vec{F}_R$ che agisce sul corpo m è nulla:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_g + \vec{f}_d + \vec{N} = 0$$

ove F_g , f_d e N sono la forza peso, la forza di attrito e la forza normale.

Proiettando l'equazione vettoriale sugli assi x e y (x parallelo al piano e y perpendicolare, come in figura), si ottiene:

$$\text{asse } x : -f_d + mg \sin \theta = 0$$

$$\text{asse } y : N - mg \cos \theta = 0$$

con $f_d = \mu N = \mu mg \cos \theta$, da cui segue:

$$\mu = \tan \theta = \tan (45^\circ) = 1.0$$

Giunto alla base del piano inclinato il corpo procede lungo il tratto BC orizzontale scabro. La velocità alla fine del tratto BC si ottiene applicando il teorema lavoro-energia cinetica, dove l'unica forza che compie lavoro è la forza di attrito:

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = \vec{f}_d \cdot BC = -\mu mg |BC|$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = -\mu mg |BC| + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$v_C = \sqrt{v_B^2 - 2\mu g |BC|}$$

$$= \sqrt{(7 \text{ m/s})^2 - 2 \times 1.0 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 1 \text{ m}} = 5.4 \text{ m/s}$$

- b) La velocità del corpo m immediatamente prima dell'urto si ottiene dal teorema di conservazione dell'energia meccanica, tra il punto C ed il punto D :

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgh_D$$

$$v_D = \sqrt{v_C^2 - 2gh_D}$$

$$= \sqrt{(5.4 \text{ m/s})^2 - 2 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 0.3 \text{ m}} = 4.8 \text{ m/s}$$

- c) La velocità immediatamente dopo l'urto anelastico si ottiene dalla conservazione della quantità di moto:

$$mv_D = (m + 2m)V$$

$$V = \frac{v_D}{3} = 1.6 \text{ m/s}$$

SOLUZIONE 3 – FLUIDI

a) Calcoliamo come prima cosa il volume del cubo:

$$F_{p,cubo} = m_{cubo}g = \rho_{Pb}V_{cubo}g$$

da cui segue

$$V_{cubo} = \frac{F_{p,cubo}}{\rho_{Pb}g} = 3.8 \cdot 10^{-4} m^3$$

Possiamo calcolare la spinta di Archimede agente sul cubo (sapendo che la densità dell'acqua è circa 1000 kg/m^3):

$$S_{cubo} = \rho_{h2o}V_{cubo}g = 3.8N$$

Per ipotesi

$$V_{sfera} = V_{cubo}$$

Quindi le due spinte di Archimede sono uguali:

$$S_{sfera} = S_{cubo} = 3.8N$$

La densità della sfera si può dedurre considerando che la condizione di equilibrio per un corpo completamente immerso si ottiene quando la densità dell'oggetto è uguale a quella del liquido nel quale esso è posto, quindi ci aspettiamo che sia 1000 kg/m^3 .

Considerando infatti la condizione di equilibrio si ottiene:

$$S_{sfera} - F_{p,sfera} = \rho_{h2o}V_{sfera}g - \rho_{sfera}V_{sfera}g = (\rho_{h2o} - \rho_{sfera})V_{sfera}g = 0$$

e quindi, come ci aspettavamo

$$\rho_{h2o} = \rho_{sfera}$$

b) La spinta di Archimede del cubo con cavità sarà identica a quella del cubo senza cavità poiché la spinta di Archimede dipende solo dalla massa di liquido spostato.

Il volume della cavità si trova a partire dalla differenza di peso dei due cubi, nel seguente modo:

$$L^3 = V_{cavità} = \frac{F_{p,cubopieno} - F_{p,cuboconcaività}}{\rho_{Pb}g} = 2.810^{-4} m^3$$

da cui segue che il lato L della cavità è pari a

$$L = 0.07m$$

SOLUZIONE 4 – TERMODINAMICA

a) Le coordinate termodinamiche si ricavano dall'equazione di stato dei gas perfetti

$$pV = nRT$$

e sono le seguenti:

Stato A

$$V_A = 4 \text{ l} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_A = 900 \text{ K}$$

$$p_A = nR T_A / V_A = 5.6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Stato B

$$T_B = T_A = 900 \text{ K}$$

$$p_B = p_A/4 \sim 1.4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

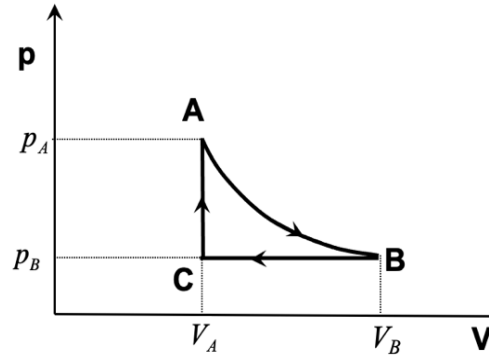
$$V_B = nR T_B / p_B = 4 nR T_A / p_A = 4 V_A = 16 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Stato C

$$p_C = p_B \sim 1.4 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$$

$$V_C = V_A = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_C = p_C V_C / (nR) = p_B V_A / (nR) = 1/4 p_A V_A / (nR) = 1/4 T_A = 225 \text{ K}$$



b) Il lavoro svolto dal gas durante la trasformazione isoterma è pari a

$$L_{AB} = nRT_A \ln(V_B/V_A) = nRT_A \ln(4V_A/V_A) = nRT_A \ln(4) = 3110 \text{ J}$$

Il lavoro svolto durante la trasformazione isobara è pari all'area del rettangolo sotto la curva BC

$$L_{BC} = p_B (V_C - V_B) = -1680 \text{ J}$$

Il lavoro svolto durante la trasformazione isocora è nullo.

Il lavoro totale svolto durante il ciclo è pertanto:

$$L_{TOT} = L_{AB} + L_{BC} = 1430 \text{ J}$$

c) Facoltativo

Il rendimento di una macchina termica è definito come il rapporto tra il lavoro svolto ed il calore Q_c assorbito (positivo):

$$\eta = L_{TOT}/Q_c$$

In questo caso si ha assorbimento di calore lungo la isoterma e l'isocora:

$$Q_{AB} = L_{AB} = 3110 \text{ J}$$

$$Q_{CA} = n c_V (T_A - T_C) = 4207 \text{ J}$$

$$Q_C = Q_{AB} + Q_{CA} = 7317 \text{ J}$$

da cui si ottiene $\eta = 0.195$