

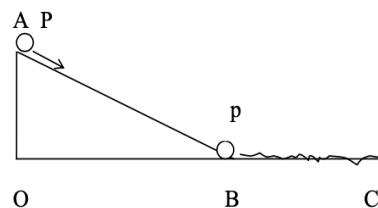
APPELLO - FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE
A.A. 2019/2020, 26 giugno 2020

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

- a) Dati i vettori $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ e $\mathbf{C} = -2\mathbf{i}$, dopo averli disegnati nel piano cartesiano (x,y), calcolare il vettore somma $\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$, il modulo di $\mathbf{S}$, l'angolo θ di inclinazione rispetto all'asse orizzontale x. Disegnare $\mathbf{S}$ nel piano cartesiano.
- b) Calcolare il prodotto scalare di $\mathbf{S}$ con il vettore $\mathbf{F} = 3\mathbf{j}$.

ESERCIZIO 2 – MECCANICA

Una particella P di massa $M = 200$ g viene lanciata dalla sommità (punto A) di un piano liscio inclinato di 30° , rispetto al piano terrestre orizzontale, con velocità iniziale $v_A = 2$ m/s, parallela al piano inclinato. Il piano inclinato ha lunghezza $AB = 4$ m. Nel punto B, alla base del piano inclinato, la particella urta in modo perfettamente anelastico una particella p di massa $m = 50$ g. Dopo l'urto le due particelle unite proseguono il loro moto lungo il piano orizzontale scabro (coefficiente di attrito $\mu = 0.1$) fino al punto C dove si arrestano.



Si determini:

- a) la velocità della particella P immediatamente prima dell'urto e quella delle due particelle unite immediatamente dopo l'urto;
- b) Il tratto BC percorso dopo l'urto;
- c) **Facoltativo:** qualora a metà del tratto BC le due particelle urtassero una molla con costante elastica $k = 500$ N/m, inizialmente in equilibrio, quale sarebbe la massima compressione della molla? (si trascuri l'attrito nel tratto di cui si comprime la molla).

ESERCIZIO 3 – FLUIDI

In una tubatura orizzontale di sezione variabile scorre dell'acqua. La sezione d'ingresso ha area $A_1 = 10 \text{ cm}^2$ mentre quella d'uscita ha area $A_2 = 2A_1$. Sapendo che l'acqua all'ingresso della tubatura ha velocità $\mathbf{v}_1 = 1$ m/s e supponendo il fluido ideale, determinare:

- a) il flusso Φ_2 e la velocità $\mathbf{v}_2$ dell'acqua all'uscita dalla tubatura;
- b) la differenza di pressione ΔP tra la sezione d'uscita e quella d'ingresso.

ESERCIZIO 4 – TERMODINAMICA

Una mole di gas perfetto monoatomico compie il seguente ciclo:

- i) trasformazione isoterma dallo stato A di pressione $P_A = 1 \text{ atm}$ e volume $V_A = 2 \text{ l}$ allo stato B di pressione $P_B = 1/2 P_A$ e volume $V_B = 2V_A$
- ii) trasformazione isobara dallo stato B allo stato C di volume $V_C = V_A$
- iii) trasformazione isocora dallo stato C allo stato A
- a) si **disegni** il ciclo in un diagramma (P,V) e si determinino le **coordinate** termodinamiche nei punti A, B e C;
- b) si calcoli la variazione di energia interna ΔE , la quantità di calore Q scambiata dal gas e il lavoro L compiuto dal gas nell'intero ciclo.

(Nota: $R = 8.31 \text{ J/Kmol} = 0.082 \text{ l atm /Kmol}$)

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA. Testi, soluzioni ed esiti alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

SOLUZIONE 1 – PREREQUISITI

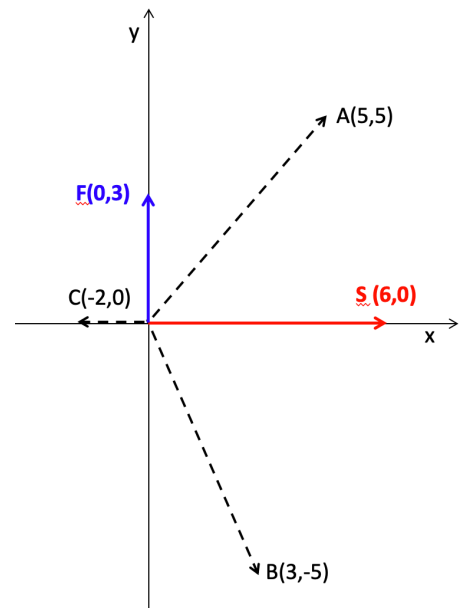
$$\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$$

$$\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$$

$$\mathbf{C} = -2\mathbf{i}$$

Il vettore somma $\mathbf{S}$ si può calcolare per componenti:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \\ &= (5+3-2)\mathbf{i} + (5-5)\mathbf{j} \\ &= 6\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = 6\mathbf{i}\end{aligned}$$



Il vettore $\mathbf{S}$ ha modulo $|\mathbf{S}|$ e inclinazione θ rispetto all'asse x , pari a:

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{S_y}{S_x}\right) = 0$$

Il prodotto scalare con il vettore $\mathbf{F}=(0,3)$ è nullo, essendo i due vettori perpendicolari fra loro, come segue dalla definizione di prodotto scalare:

$$\vec{S} \cdot \vec{F} = |\mathbf{S}| \cdot |\mathbf{F}| \cos \phi$$

SOLUZIONE 2 – MECCANICA

- a) Lungo il tratto AB del piano inclinato liscio la forza che compie lavoro è la forza Peso che è conservativa. Pertanto si può calcolare la velocità della particella P in B, prima dell'urto, applicando il teorema di conservazione dell'energia meccanica. Indicata con h l'altezza OA del piano inclinato si ha:

$$\frac{1}{2} M v_A^2 + Mgh = \frac{1}{2} M v_B^2 \text{ da cui si ricava } v_B = 6.57 \text{ m/s}$$

Nell'urto perfettamente anelastico si conserva la quantità di moto del sistema delle due particelle. Indicata con v_f la velocità delle due particelle unite dopo l'urto si ha :

$$M v_B = (M+m) v_f \text{ da cui si ottiene } v_f = 5.26 \text{ m/s}$$

- b) Il tratto BC percorso dalle due particelle lungo il piano orizzontale scabro prima di arrestarsi può essere calcolato in modo semplice utilizzando il teorema lavoro-energia cinetica:

$$-\mu(M+m) g BC = -\frac{1}{2} (M+m) v_f^2 \text{ da cui si ottiene } BC = 14.1 \text{ m}$$

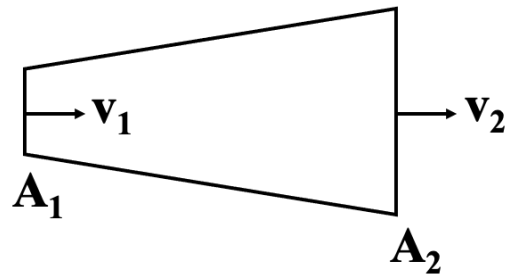
- c) **Facoltativo** : Applicando nuovamente il teorema lavoro-energia cinetica al tratto BD (D è il punto medio di BC) si calcola l'energia cinetica delle due particelle nel punto D :

$$-\mu(M+m) g BD = E_{\text{cin D}} - \frac{1}{2} (M+m) v_f^2 \text{ da cui si ottiene } E_{\text{cin D}} = 1.73 \text{ J.}$$

Trascurando l'attrito nel tratto di compressione della molla, la massima compressione x della molla si calcola applicando il teorema di conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{\text{cin D}} = \frac{1}{2} k x^2 \text{ dove } x \text{ è la massima compressione della molla. Da qui risulta } x = 8.3 \text{ cm.}$$

SOLUZIONE 3 – FLUIDI



- a) Dall'equazione di continuità

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \varphi$$

si ottiene che il flusso $\varphi_2 = \varphi_1 = A_1 v_1$. Pertanto

$$\varphi_2 = A_1 v_1 = 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

La velocità v_2 sarà

$$v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2} = \frac{A_1 v_1}{2A_1} = \frac{1}{2} v_1 = 0.5 \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- b) Utilizzando l'equazione di Bernoulli e tenendo conto che la condotta è orizzontale ($h_1 = h_2 = 0$), si ha

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

da cui si ottiene

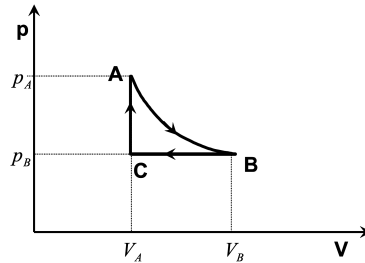
$$\Delta P = p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2)$$

e quindi

$$\Delta P = 0.5 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 0.25 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right) = 375 \text{ Pa}$$

SOLUZIONE 4 – TERMODINAMICA

a) Il ciclo nel piano (P,V) è rappresentato nella seguente figura:



Le coordinate termodinamiche sono:

$$P_A = 1 \text{ atm} \approx 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_A = 2 \text{ l} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_A = \frac{P_A \cdot V_A}{n \cdot R} = \frac{10^5 \text{ Pa} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{1 \text{ mol} \cdot 8.31 \frac{\text{J}}{\text{Kmol}}} = 24 \text{ K}$$

$$P_B = \frac{1}{2} P_A = 5 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

$$V_B = 2V_A = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_B = T_A = 24 \text{ K}$$

$$P_C = P_B = 5 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

$$V_C = V_A = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_C = \frac{P_C \cdot V_C}{n \cdot R} = \frac{\frac{1}{2} P_A \cdot V_A}{n \cdot R} = \frac{1}{2} T_A = 12 \text{ K}$$

b) La variazione di energia interna nell'intero ciclo è $\Delta E=0$, poiché lo stato iniziale e quello finale coincidono.

Dal primo principio della termodinamica $\Delta E = Q - L$ si ottiene per l'intero ciclo

$$Q_{\text{ciclo}} = L_{\text{ciclo}}$$

Utilizzando il lavoro L_{ciclo} , si ha

$$L_{\text{ciclo}} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA}$$

dove

$$L_{AB} = n \cdot R \cdot T_A \cdot \ln \frac{V_B}{V_A} = n \cdot R \cdot T_A \cdot \ln 2 = 1 \text{ mol} \cdot 8.31 \frac{\text{J}}{\text{Kmol}} \cdot 24 \text{ K} \cdot \ln 2 = 138 \text{ J}$$

$$L_{BC} = P_B(V_C - V_B) = \frac{1}{2} P_A(V_A - 2V_A) = -\frac{1}{2} P_A V_A = -0.5 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = -100 \text{ J}$$

$$L_{CA} = 0 \text{ perchè isocora}$$

Quindi

$$L_{\text{ciclo}} = 138 \text{ J} - 100 \text{ J} = 38 \text{ J} = Q_{\text{ciclo}}$$