

APPELLO - FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE
A.A. 2020/2021, 23 novembre 2022

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

In un piano cartesiano ortogonale XY sono dati i vettori $\vec{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ e $\vec{b} = 2\vec{a}$. Determinare:

- a) il **modulo** di $\vec{a}$, le coordinate e il modulo di $\vec{b}$ e rappresentare $\vec{a}$ e $\vec{b}$ nel piano cartesiano;
- b) l'angolo θ tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e l'angolo φ tra $\vec{a}$ e $(-\vec{b})$ utilizzando la definizione di prodotto scalare.

ESERCIZIO 2 – MECCANICA

Un blocco di massa $m = 200 \text{ g}$ viene tirato mediante una fune lungo un piano inclinato di $\theta = 30^\circ$, scabro, e si muove con accelerazione costante pari ad $a = 1 \text{ m/s}^2$. Il coefficiente di attrito blocco-piano è pari a $\mu = 0.1$. La velocità v_A del blocco nel punto A, a quota $h_A = 1 \text{ m}$ rispetto al piano orizzontale, vale 2 m/s . Calcolare:

- a) la tensione T della fune;
- b) la velocità v_B nel punto B che si trova a quota $h_B = 2 \text{ m}$ rispetto al piano orizzontale.

ESERCIZIO 3 – FLUIDI

Un cubetto di lato $L = 10 \text{ cm}$, è costituito di materiale plastico, che ha densità $d = 1.2 \text{ g/cm}^3$.

All'interno del cubetto si trova una cavità sferica, concentrica, di raggio incognito.

Sapendo che il peso del cubetto è 8 N , si determini:

- a) il raggio della cavità sferica;
- b) la tensione di una fune, fissata sul fondo di un recipiente pieno di acqua, a cui viene legato il cubetto in modo da risultare, all'equilibrio, totalmente immerso nell'acqua.

ESERCIZIO 4 – TERMODINAMICA

Un gas perfetto **monoatomico** compie il seguente ciclo termodinamico:

- i) $A \rightarrow B$ trasformazione isobara;
- ii) $B \rightarrow C$ trasformazione isocora;
- iii) $C \rightarrow D$ trasformazione isobara;
- iv) $D \rightarrow A$ trasformazione isocora.

Sapendo che $P_A = 0.5 \cdot 10^4 \text{ Pa}$, $P_D = 5 P_A$, $T_B = 2 T_A$ e che il lavoro totale lungo tutto il ciclo vale $L_{\text{tot}} = -13300 \text{ J}$, si svolgano i seguenti punti:

- a) si disegni il grafico del ciclo termodinamico nel piano (p, V) , si esprima il lavoro totale L_{tot} in funzione di P_A e V_A si calcolino i volumi V_A , V_B e la temperatura T_C ;
- b) si calcolino, per le trasformazioni AB e BC, i **calori** (ceduti o assorbiti) e le corrispondenti **variazioni di energia interna**.

(Nota: $R = 8.31 \text{ J/Kmol} = 0.082 \text{ l atm /Kmol}$)

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA. Testi, soluzioni ed esiti alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

SOLUZIONE 1 – PREREQUISITI

a) Il modulo di $\vec{a}$ è dato da

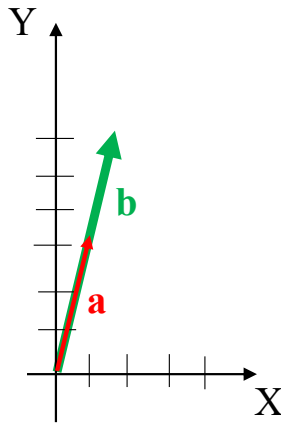
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

mentre le coordinate di $\vec{b}$ sono

$$\vec{b} = 2a_x + 2a_y = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$$

con modulo

$$|\vec{b}| = 2|\vec{a}| = 2\sqrt{10}.$$



b) Dalla definizione di prodotto scalare

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot 2\vec{a}}{2|\vec{a}||\vec{a}|}\right) = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}||\vec{a}|}\right) = \arccos(1) = 0^\circ$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot (-\vec{b})}{|\vec{a}| |-\vec{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot (-2\vec{a})}{2|\vec{a}||\vec{a}|}\right) = \arccos\left(-\frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}||\vec{a}|}\right) = \arccos(-1) = 180^\circ$$

D'altra parte, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ hanno stessa direzione e stesso verso mentre $\vec{a}$ e $(-\vec{b})$ hanno stessa direzione ma verso opposto.

SOLUZIONE 2 – MECCANICA

- a) Dalla seconda legge di Newton ricaviamo il modulo della forza $\vec{F}$ agente sul blocco:

$$F = ma = 0.2 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.2 \text{ N}$$

La forza $\vec{F}$ è la risultante di tutte le forze agenti sul blocco, ossia la forza peso $\vec{P}$, la forza di attrito $\vec{f}_a$, la normale $\vec{N}$ e la tensione della fune $\vec{T}$:

$$\vec{P} + \vec{f}_a + \vec{T} + \vec{N} = \vec{F}$$

Proiettando le forze lungo l'asse x parallelo al piano inclinato e orientato verso la direzione del moto, si ottiene:

$$-P_x - f_a + T = F$$

cioè

$$-mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta + T = F$$

Quindi:

$$T = F + mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta = 0.2 \text{ N} + 0.2 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{2} + 0.1 \cdot 0.2 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e pertanto

$$T = 1.35 \text{ N}$$

- b) Dal teorema lavoro-energia cinetica, il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ nel tratto AB è:

$$L_F = F \cdot AB = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

da cui

$$v_B = \sqrt{\frac{2F \cdot AB}{m} + v_A^2}$$

$$\text{dove } AB = \frac{h_B - h_A}{\sin\theta} = \frac{2 \text{ m} - 1 \text{ m}}{\frac{1}{2}} = 2 \text{ m}$$

quindi

$$v_B = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.2 \text{ N} \cdot 2 \text{ m}}{0.2 \text{ kg}} + 4 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 2.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

SOLUZIONE 3 – FLUIDI

a) Se NON ci fosse la cavità, la massa del cubetto risulterebbe

$$m = 1.2 \text{ kg} \quad (L^3 \times d)$$

ed il peso

$$P = 11.76 \text{ N}.$$

Poiché il peso è solo 8 N, il peso mancante corrisponde ad una massa di

$$m' = 0.384 \text{ kg}$$

ed a un volume di

$$V' = 320 \text{ cm}^3.$$

Poiché il volume della sfera è dato da $V_{\text{sfera}} = \frac{4}{3} \pi R^3$, il raggio della cavità sferica risulta

$$R = 4.24 \text{ cm}.$$

b) Quando il cubetto è immerso in acqua agiscono la forza Peso e la tensione T della fune, verso il fondo del recipiente e la spinta archimedeica S, verso l'alto.

All'equilibrio la risultante delle forze è nulla, pertanto

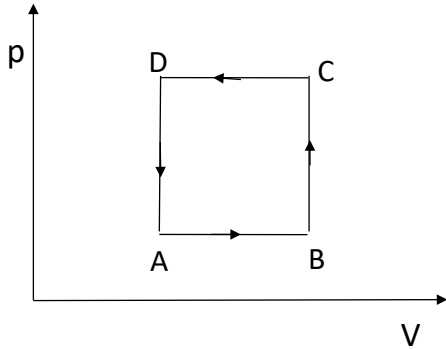
$$S - P - T = 0$$

Poiché S è il peso di un cubo di acqua di 10 cm di lato, cioè 9.8 N, risulta

$$T = 1.8 \text{ N}$$

SOLUZIONE 4 – TERMODINAMICA

a) Il ciclo nel piano (P,V) è rappresentato nella seguente figura:



Scrivo il lavoro totale L_{tot} come somma dei lavori delle singole trasformazioni:

$$L_{AB} = (V_B - V_A) p_A = nR(T_B - T_A) = nR T_A = p_A V_A$$

$$L_{BC} = 0$$

$$L_{CD} = (V_D - V_C) p_D = (V_A - V_B) p_D = 5 p_A (V_A - V_B) = 5 nR (T_A - T_B) = -5 nR T_A = -5 p_A V_A$$

$$L_{DA} = 0$$

$$L_{\text{tot}} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = -4 p_A V_A$$

Si ottiene quindi:

$$V_A = -L_{\text{tot}} / (4 p_A) = -(-13300 \text{ J}) / (4 \times 0.5 \cdot 10^4 \text{ Pa}) = 0.7 \text{ m}^3$$

$$V_B = nR T_B / p_B = nR 2T_A / p_A = 2 V_A = 1.4 \text{ m}^3$$

2) Calcoliamo i calori scambiati:

$$Q_{AB} = n c_p (T_B - T_A) = 5/2 nR T_A = 5/2 p_A V_A = 8750 \text{ J} \quad (\text{calore assorbito})$$

$$\begin{aligned} Q_{BC} &= n c_p (T_C - T_B) = 5/2 nR (p_C V_C / (nR) - 2T_A) \\ &= 5/2 nR (p_D V_B / (nR) - 2T_A) = \\ &= 5/2 nR (5 p_A 2V_A / (nR) - 2 p_A V_A / (nR)) = \\ &= 5/2 \times 8 p_A V_A = 70000 \text{ J} \quad (\text{calore assorbito}) \end{aligned}$$

Le variazioni di energia interna corrispondenti sono le seguenti:

$$\Delta E_{AB} = Q_{AB} - L_{AB} = 5250 \text{ J}$$

$$\Delta E_{BC} = Q_{BC} - L_{BC} = 70000 \text{ J}$$