

APPELLO - FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE
A.A. 2022/2023, 22 novembre 2023

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

Siano dati i vettori $\vec{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{z}$ e $\vec{b} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$. Determinare:

- a) i vettori $\vec{v} = \vec{a} + 3\vec{b}$ e $\vec{w} = -\vec{a} + \vec{b}$ in modulo, direzione e verso
- b) l'angolo compreso tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$

ESERCIZIO 2 – MECCANICA

Un corpo si muove su un tratto rettilineo scabro con coefficiente di attrito $\mu = 0.3$ e di lunghezza $l = 3 \text{ m}$. Sapendo che la velocità iniziale è $v_A = 15 \text{ m/s}$, determinare la velocità del corpo v_B alla fine del tratto rettilineo. Al termine del tratto rettilineo è presente un piano inclinato di base $b = 1.5 \text{ m}$ e altezza $h = 1.2 \text{ m}$ con stesso coefficiente d'attrito del tratto rettilineo. Calcolare quanto spazio percorre il corpo sul piano inclinato prima di fermarsi completamente.

ESERCIZIO 3 – FLUIDI

Si consideri una tubatura orizzontale di sezione variabile, all'interno della quale scorre acqua. La sezione d'ingresso presenta un'area $A_1 = 15 \text{ cm}^2$, mentre la sezione d'uscita $A_2 = \frac{1}{3} A_1$. Sapendo che l'acqua all'ingresso ha una velocità $v_1 = 1 \text{ m/s}$, determinare:

- a) la portata Q_2 e la velocità v_2 dell'acqua in uscita.
- b) la differenza di pressione tra la sezione d'ingresso e la sezione d'uscita.

Nota: Si consideri l'acqua come fluido ideale.

ESERCIZIO 4 – TERMODINAMICA

Due moli di un gas perfetto monoatomico compiono le seguenti trasformazioni reversibili:

A→B isocora con $V_A = 1 \text{ litro}$, $p_A = 2 \text{ atm}$, $p_B = 5p_A$;

B→C isobara con $V_C = 4V_B$;

C→D in cui la **pressione decresce linearmente all'aumentare del Volume**
con $p_D = p_A$ e $V_D = 2 V_C$.

- a) Si rappresentino le tre trasformazioni in un diagramma (V,p) e si calcolino le coordinate termodinamiche degli stati **A, B, C** e **D**;
- b) Si determini il **calore totale Q** scambiato e il **lavoro W** compiuto dal gas nelle **singole** trasformazioni e nell'**intera trasformazione** da A fino a D.

Nota: $R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.082 \text{ l atm /K mol}$

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA.
Testi, soluzioni ed esiti alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

SOLUZIONE ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

$$\vec{v} = \vec{a} + 3\vec{b} = (1 - 3)\mathbf{i} + (1 - 9)\mathbf{j} + (-2)\mathbf{z} = -2\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 2\mathbf{z}$$

$$\vec{w} = -\vec{a} + \vec{b} = (-1 - 1)\mathbf{i} + (-1 - 3)\mathbf{j} + (2)\mathbf{z} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{z}$$

I moduli saranno:

$$|\vec{v}| = \sqrt{4 + 64 + 4} = \sqrt{72}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{24}$$

Per poter calcolare l'angolo compreso tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, è necessario calcolare il loro prodotto scalare:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (-2)(-2) + (-8)(-4) + (-2)(2) = 4 + 32 - 4 = 32$$

e quindi

$$\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} = 0.78$$

$$\theta = \arccos(0.78) = 38^\circ$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2 – MECCANICA

Per calcolare la velocità alla fine del tratto rettilineo è necessario utilizzare il teorema lavoro-energia cinetica

$$\Delta K = L$$

Il lavoro è in questo caso quello compiuto dalla forza di attrito $F_a = \mu N$.

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -\mu mgl$$

E risolvendo l'equazione si ottiene:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2\mu gl} = 14.4 \frac{m}{s}$$

Lo stesso ragionamento lo si può applicare anche al secondo punto del problema, considerando però che questa volta anche la componente x della forza peso compie lavoro. Prima di svolgere i conti, è utile calcolarsi l'angolo di inclinazione del piano:

$$\theta = \operatorname{artg} \frac{h}{b} = 38.7^\circ$$

Svolgiamo i conti applicando il teorema dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -\mu mg \cos \theta s - mg \sin \theta s$$

Dove $v_C = 0 \frac{m}{s}$.

Svolgendo l'equazione si ottiene

$$-\frac{1}{2}mv_B^2 = -mgs(\mu \cos \theta + \sin \theta)$$

$$s = \frac{v_B^2}{2g(\mu \cos \theta + \sin \theta)} = 12.3 \text{ m}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3 – FLUIDI

Consideriamo l'equazione di continuità:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = Q$$

Dove Q è la portata ed è una costante.

Per calcolare quindi la portata scriviamo:

$$Q_2 = A_1 v_1 = 15 \cdot 10^{-4} m^2 \cdot 1 \frac{m}{s} = 15 \cdot 10^{-4} \frac{m^3}{s}$$

La velocità v_2 invece la calcoliamo utilizzando l'equazione di continuità, come segue

$$v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2} = \frac{3A_1 v_1}{A_1} = 3v_1 = 3 \frac{m}{s}$$

Per calcolare la differenza di pressione tra il punto d'ingresso e quello di uscita è sufficiente utilizzare l'equazione di Bernoulli:

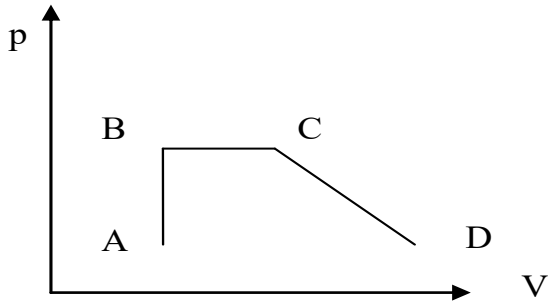
$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh = costante$$

Essendo la condotta orizzontale $h_1 = h_2$, da cui segue:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) = 4000 Pa$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4 – TERMODICA



a) Coordinate termodinamiche di A, B, C, D:

Punto A

$$p_A = 2 \text{ atm}, V_A = 1 \text{ litro}$$

Applicando la legge dei gas perfetti $pV = nRT$ con $R = 0.082 \text{ l atm /K mole}$ si ottiene $T_A = 12.2 \text{ K}$.

Punto B : $V_B = V_A = 1 \text{ l}$ e $p_B = 5 p_A = 10 \text{ atm}$, si ha quindi $T_B = 5 T_A = 61.0 \text{ K}$

Punto C : $p_C = p_B = 5 p_A = 10 \text{ atm}$, $V_C = 4 V_A = 4 \text{ l}$, $T_C = 20 T_A = 243.9 \text{ K}$

Punto D : $p_D = p_A = 2 \text{ atm}$, $V_D = 8 V_A = 8 \text{ l}$, $T_D = 8 T_A = 97.6 \text{ K}$.

b)

La trasformazione AB è isocora, pertanto

$$L_{AB} = 0$$

$$Q_{AB} = n c_V (T_B - T_A) = 1216.1 \text{ J}.$$

La trasformazione BC è isobara, pertanto

$$L_{BC} = p_C (V_C - V_A) = 3040.3 \text{ J}$$

$$Q_{BC} = n c_p (T_C - T_B) = 7600 \text{ J}.$$

La trasformazione CD è lineare:

$$L_{CD} = (p_C + p_D) (V_D - V_C) / 2 = 2432 \text{ J}.$$

$$\text{La variazione di energia interna } \Delta E = n c_V (T_D - T_C) = -3648 \text{ J}.$$

Applicando il primo principio della termodinamica si ricava $Q_{CD} = -1216,2 \text{ J}$.

La quantità di calore totale scambiata dal gas ed il lavoro totale svolto si ottengono dalla somma delle quantità relative alle singole trasformazioni:

$$Q_{\text{tot}} = 7600 \text{ J}$$

$$L_{\text{tot}} = 5472.2 \text{ J}.$$