

APPELLO- FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE

A.A. 2022/23, 20 Luglio 2023

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

Si considerino i vettori $\vec{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; $\vec{b} = -7\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$; $\vec{c} = \mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Determinare:

- Le coordinate e il modulo del vettore $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c}$
- l'angolo θ_{ab} compreso tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e l'angolo θ_{ac} compreso tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{c}$

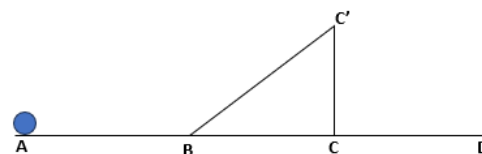
ESERCIZIO 2 – MECCANICA

In riferimento alla figura, una pallina parte dal punto A con una velocità iniziale $\mathbf{v}_A = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ percorrendo il tratto rettilineo

liscio AB. Raggiunto il punto B, comincia a salire lungo un piano inclinato scabro, caratterizzato da un coefficiente d'attrito

$\mu = 0.1$. La base del piano inclinato misura $BC = 1.5 \text{ m}$ e l'angolo di inclinazione rispetto ad essa è $\theta = 60^\circ$. Calcolare:

- La velocità della pallina nei punti B e C'
- Raggiunto il punto C', la pallina continua il suo moto cadendo dal piano attraverso un moto di tipo parabolico. Calcolare la massima distanza orizzontale raggiunta quando tocca il suolo.



ESERCIZIO 3 – FLUIDI

Un palloncino sferico di raggio $r = 10.6 \text{ cm}$ e $m = 4.2 \text{ g}$ è riempito di Elio ($\rho_{\text{He}} = 0.177 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) e mantiene sollevata in aria ($\rho_{\text{air}} = 1.129 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$), in equilibrio, una massa m_x dal valore incognito.

- Quali forze agiscono sul Sistema (palloncino-massa)? Si trascuri il filo del palloncino. Specificarne il modulo, dove possibile.
- Calcolare il valore della massa m_x

ESERCIZIO 4 – TERMODINAMICA

Un gas perfetto monoatomico subisce la trasformazione descritta dall'equazione $p = k V$, ove p è la pressione, V il volume e k una costante positiva. Lo stato iniziale è il punto A in cui $p_A = 4 \text{ atm}$, $V_A = 9 \text{ litri}$ e $T_A = 200 \text{ K}$. Lo stato finale è il punto B, dove $V_B = 2 V_A$.

- Disegnare in un diagramma (p, V) la trasformazione AB e calcolare la corrispondente **variazione di energia interna** del gas.
- Calcolare il **lavoro** compiuto dal gas durante la trasformazione AB.

[N.B. $R = 8.31 \text{ J/Kmole}$]

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA.

Testi, soluzioni ed esiti alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

ESERCIZIO 1

- a) Essendo $\vec{a} = 2\vec{c}$, si può subito dire che $\vec{d} = 2\vec{b}$, quindi $\vec{d} = -14\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Per completezza, riportiamo comunque il conto delle coordinate del vettore:

$$\vec{d} = (2 - 14 - 2)\mathbf{i} + (-3 + 2 + 3)\mathbf{j} + (4 + 1 - 4)\mathbf{k} = -14\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Il modulo di $\vec{d}$ è:

$$|\vec{d}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = \sqrt{196 + 4 + 1} = \sqrt{201}$$

- b) Consideriamo $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta_{ab}$ dove θ_{ab} è l'angolo compreso tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{201}}{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 2 \cdot (-7) + (-3) \cdot 1 + \frac{4}{2} = -15$$

Quindi:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-30}{\sqrt{29} \sqrt{201}} =$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{-30}{\sqrt{29} \sqrt{201}}\right) = 113 \text{ deg}$$

Senza fare conti, è chiaro invece che l'angolo compreso tra il vettore $\vec{a}$ e il vettore $\vec{c}$ è 0.

ESERCIZIO 2

- a) La velocità nel punto B sarà identica alla velocità iniziale della pallina. Infatti il tratto AB non presenta attrito, quindi si conclude facilmente che $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Per calcolare la velocità alla sommità del piano inclinato C' utilizziamo invece il teorema dell'energia cinetica

$$\Delta K = L_{\text{tot}}$$

Le forze che compiono lavoro sono, in questo caso, la forza d'attrito $\overrightarrow{F}_{\text{att}} = \mu \vec{N}$, con $\vec{N} = m\vec{g} \cos(\theta)$, e la componente della forza peso lungo il piano inclinato stesso, $\overrightarrow{F}_{\text{px}} = m\vec{g} \sin(\theta)$.

Quindi

$$L_{\text{att}} = -\mu mg \cos(\theta)L$$

e

$$L_{\text{px}} = -mg \sin(\theta)L$$

e

$$L_{\text{tot}} = -mgL(\mu \cos(\theta) + \sin(\theta))$$

$$\text{dove } L = \frac{BC}{\cos(\theta)}$$

Applicando quindi il teorema dell'energia cinetica abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 &= -mg BC (\mu + \tan(\theta)) \\ v_C &= \sqrt{v_B^2 - 2gBC(\mu + \tan(\theta))} = 6.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

- b) Consideriamo il moto parabolico come la composizione di due moti indipendenti: moto rettilineo uniforme sull'asse x e moto uniformemente accelerato sull'asse y.

Scomponiamo la velocità in C' appena ottenuta sui due assi così da ottenere le velocità iniziali del moto parabolico:

$$v_{\text{ox}} = v_{C'} \cos(\theta) = 3.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{\text{oy}} = v_{C'} \sin(\theta) = 5.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dal moto su y ricaviamo il tempo di caduta della pallina, considerando che la distanza y percorsa è pari ad $h = L \sin(\theta) = BC \tan(\theta) = 2.6 \text{ m}$, da cui

$$y_f = 0 = y_i + v_{\text{oy}}t - \frac{1}{2}gt^2 = h + v_{\text{oy}}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t_{1,2} = [-v_{\text{oy}} \pm \sqrt{v_{\text{oy}}^2 + 2gh}] / (-g)$$

Le due soluzioni sono

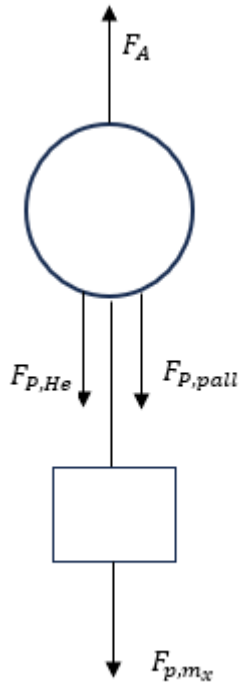
$$t_1 = 1.7 \text{ s}$$

$$t_2 = -7.6 \text{ s (non fisica)}$$

da cui si ottiene

$$x = v_x t_{\text{caduta}} = v_{\text{ox}} t_{\text{caduta}} = 5.7 \text{ m}$$

ESERCIZIO 3



a) Le forze che agiscono sul Sistema palloncino-massa sono:

i) La forza di Archimede $F_A = \rho_{\text{air}} V_{\text{pall}} g = 0.055 \text{ N}$ dove

$$V_{\text{pall}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

ii) La forza peso del palloncino $F_{p,\text{pall}} = m g = 0.041 \text{ N}$

iii) La forza peso dovuta al gas presente all'interno del palloncino

$$F_{p,\text{He}} = \rho_{\text{He}} V_{\text{pall}} g = 0.009 \text{ N}$$

iv) La forza peso della massa incognita $F_{p,x} = m_x g$

b) La massa incognita la calcoliamo impostando l'equazione per l'equilibrio per il Sistema palloncino-massa:

$$F_A - F_{p,\text{pall}} - F_{p,\text{He}} = F_{p,m_x}$$

$$\rho_{\text{air}} V_{\text{pall}} g - m g - \rho_{\text{He}} V_{\text{pall}} g = m_x g$$

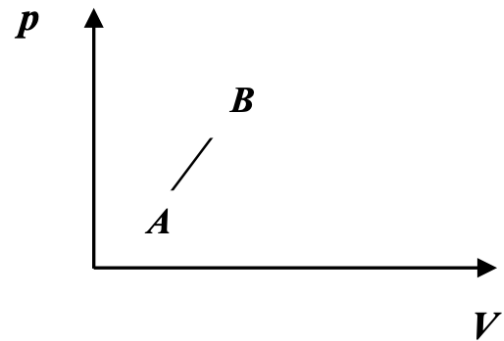
$$m_x = \rho_{\text{air}} V_{\text{pall}} - m - \rho_{\text{He}} V_{\text{pall}} = 0.54 \text{ g}$$

ESERCIZIO 4

Nel Sistema Internazionale

$$p_A = 4 \text{ atm} = 4.04 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_A = 9 \text{ litri} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$



a) Nella trasformazione AB

$$p = k V$$

$$\text{pertanto se } V_B = 2 V_A, \quad p_B = k V_B = k 2 V_A = 2 p_A$$

$$\text{Inoltre } T_A = p_A V_A / nR, \quad T_B = p_B V_B / nR = 4 p_A V_A / nR = 4 T_A = 800 \text{ K}$$

La variazione di energia interna è pari a

$$\begin{aligned} \Delta E &= n c_V \Delta T = n \frac{3}{2} R (4T_A - T_A) = n \frac{9}{2} R T_A \\ &= \frac{9}{2} p_A V_A = 4.5 \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 8.21 \cdot 10^{-3} \text{ N m} = 16362 \text{ J} \end{aligned}$$

b) Il lavoro compiuto dal gas è pari all'area delimitata dalla trasformazione tra il punto A e il punto B, quindi :

$$L = (V_B - V_A) (p_B + p_A) / 2 = 3 V_A p_A / 2 = 1.5 p_A V_A = 5454 \text{ J}$$