

APPELLO - FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE
A.A. 2023/2024, 2 febbraio 2024

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

Siano dati i vettori $\vec{a} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 8\vec{z}$ e $\vec{b} = -\vec{j} + 4\vec{z}$. Determinare:

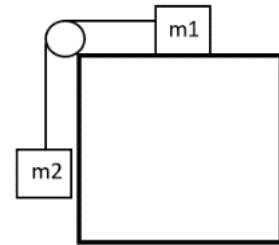
- a) i vettori $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{d} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$;
b) l'angolo compreso tra $\vec{e} = \frac{\vec{c}}{2}$ ed $\vec{f} = \frac{\vec{d}}{2}$.

ESERCIZIO 2 – MECCANICA

Si considerino due masse poste come in figura. $m_1 = 2\text{kg}$ poggia su piano scabro con coefficiente di attrito ignoto.

Sapendo che $m_2 = 3\text{kg}$ e che la tensione della fune è $T = 27\text{N}$, determinare:

- a) l'accelerazione delle masse m_1 e m_2 ;
b) il coefficiente di attrito dinamico μ ;
c) **Facoltativo**: quanto dovrebbe valere il coefficiente di attrito statico μ_s per mantenere il sistema in equilibrio?



ESERCIZIO 3 – FLUIDI

Un cubo di lato $L = 30\text{ cm}$ è completamente immerso in acqua. Sapendo che la densità del cubo è doppia rispetto a quella dell'acqua, determinare:

- a) la spinta di Archimede $\vec{S}$ e la forza peso $\vec{P}$ in modulo, direzione e verso;
b) la minima forza esterna $\vec{F}_{\text{ext}}$, in modulo, direzione e verso, necessaria per portare il cubo in superficie.

ESERCIZIO 4 – TERMODINAMICA

Una mole di gas perfetto monoatomico compie il seguente ciclo termodinamico tra gli stati A, B e C:

A→B: espansione con variazione lineare della pressione con il volume

$$p_A = 1\text{ atm}, p_B = 2p_A, V_A = 1\text{ litro}, V_B = 2V_A;$$

B→C: espansione con variazione lineare della pressione con il volume

$$p_C = p_A, V_C = 3V_A;$$

C→A: compressione isobara.

- a) Disegnare nel piano (p,V) il **grafico** del ciclo termodinamico, specificandone il verso, e determinare la temperatura degli stati A, B e C;
b) Calcolare il **lavoro** svolto dal gas, il **calore** scambiato e la **variazione di energia interna** per l'intero ciclo.

$$(R = 8.31\text{ J/Kmole} = 0.082\text{ l atm /K mol})$$

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA.
Testi, soluzioni ed esiti su ARIEL e alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

SOLUZIONE ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

a) I vettori $\vec{c}$ e $\vec{d}$ sono i seguenti:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (6 + 0)\mathbf{i} + (-3 - 1)\mathbf{j} + (8 + 4)\mathbf{z} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{z}$$

$$\vec{d} = -2\vec{a} + 2\vec{b} = (-12 + 0)\mathbf{i} + (6 - 2)\mathbf{j} + (-16 + 8)\mathbf{z} = -12\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{z}$$

b) Calcoliamo come prima cosa i vettori $\vec{e}$ ed $\vec{f}$

$$\vec{e} = \frac{\vec{c}}{2} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{z}$$

$$\vec{f} = \frac{\vec{d}}{2} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{z}$$

e i rispettivi moduli $|\vec{e}|$ ed $|\vec{f}|$:

$$|\vec{e}| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2} = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

$$|\vec{f}| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} = \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

Per calcolare l'angolo compreso tra i vettori utilizziamo la seguente definizione di prodotto scalare:

$$\vec{e} \cdot \vec{f} = |\vec{e}| |\vec{f}| \cos \theta$$

Dove l'angolo θ è l'angolo compreso tra $\vec{e}$ ed $\vec{f}$.
Quindi:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{e} \cdot \vec{f}}{|\vec{e}| |\vec{f}|}$$

E il prodotto scalare $\vec{e} \cdot \vec{f}$ lo calcoliamo nel seguente modo:

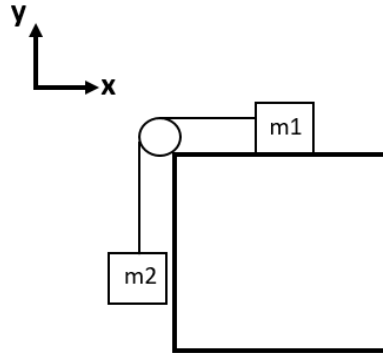
$$\vec{e} \cdot \vec{f} = e_x f_x + e_y f_y + e_z f_z = 3(-6) + (-2)2 + 6(-4) = -18 - 4 - 24 = -46$$

Otteniamo quindi:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{e} \cdot \vec{f}}{|\vec{e}| |\vec{f}|} = \cos^{-1} \frac{-46}{7 \cdot 2\sqrt{14}} = \cos^{-1} \frac{-23}{7\sqrt{14}} = 151^\circ$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2 - MECCANICA

Scegliamo un Sistema di riferimento, come per esempio quello indicato in figura.



- a) L'accelerazione $\mathbf{a}$ delle masse sarà uguale in modulo, essendo i corpi collegati, e sarà antiparallela all'asse x per il corpo 1 e antiparallela all'asse y per il corpo 2. Il modulo di $\mathbf{a}$ può essere ricavato considerando le forze che agiscono sul blocco 2. Infatti, rispetto al Sistema di riferimento scelto:

$$T - m_2 g = -m_2 a$$

$$a = g - \frac{T}{m_2} = 0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- b) Per quanto riguarda il blocco 1 invece, rispetto al Sistema di riferimento scelto, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} F_A - T = -m_1 a & (\text{asse } x) \\ N - m_1 g = 0 & (\text{asse } y) \end{cases}$$

Considerando quindi che $N = m_1 g$ e che $F_A = \mu N$, abbiamo che:

$$\mu m_1 g - T = -m_1 a$$

$$\mu = \frac{T - m_1 a}{m_1 g} = 1.3$$

- c) **Facoltativo:** se il sistema è in equilibrio, l'accelerazione di entrambi i corpi deve essere nulla ($a=0$). Pertanto la tensione della fune diventa $T=m_2 g$ e il coefficiente di attrito statico risulta

$$\mu_s = \frac{T}{m_1 g} = \frac{m_2 g}{m_1 g} = 1.5$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3 – FLUIDI

a) La spinta di Archimede è data da

$$\vec{S} = \rho_{H_2O} \cdot V_{imm} \cdot g \cdot \mathbf{j} = \rho_{H_2O} \cdot L^3 \cdot g \cdot \mathbf{j} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0.3^3 \text{m}^3 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = +264.6 \text{ N } \mathbf{j}$$

La forza peso è data da

$$\vec{P} = -(\rho_C \cdot V_C \cdot g) \cdot \mathbf{j} = -(2 \cdot \rho_{H_2O} \cdot L^3 \cdot g) \cdot \mathbf{j} = -2 \cdot S \cdot \mathbf{j} = -2 \cdot 264.6 \text{ N } \mathbf{j} = -529.2 \text{ N } \mathbf{j}$$

b) La forza netta risultante sul cubo sarà

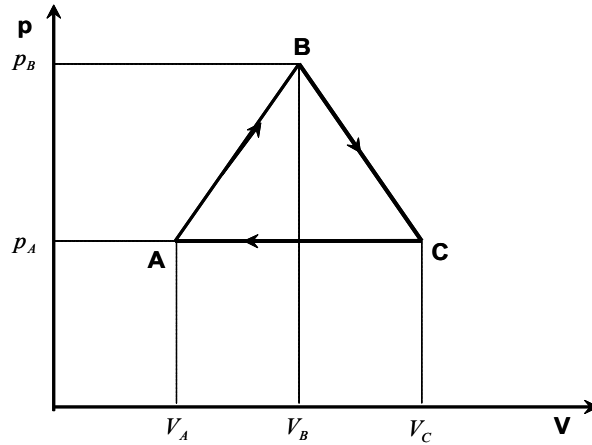
$$\vec{F}_{net} = (S - P) \cdot \mathbf{j} = (\rho_{H_2O} \cdot L^3 \cdot g - 2 \cdot \rho_{H_2O} \cdot L^3 \cdot g) \cdot \mathbf{j} = -\rho_{H_2O} \cdot L^3 \cdot g \cdot \mathbf{j} = -S \cdot \mathbf{j} = -264.6 \text{ N } \mathbf{j}$$

La minima forza esterna per portare il cubo in superficie sarà

$$\vec{F}_{ext} = +264.6 \text{ N } \mathbf{j}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4 – TERMODINAMICA

- a) Il ciclo termodinamico rappresentato nel piano (p,V) è un triangolo percorso in senso orario, come mostrato in figura.



Le temperature degli stati A, B e C si ricavano dalla legge dei gas perfetti:

$$T_A = \frac{1}{nR} p_A V_A$$
$$= \frac{1}{1 \text{ mole} \times 8.31 \text{ J/K} \cdot \text{mole}} \times (10^5 \text{ N/m}^2) \times (10^{-3} \text{ m}^3) = 12 \text{ K}$$

$$T_B = \frac{1}{nR} p_B V_B = \frac{1}{nR} 2p_A 2V_A = 4T_A = 48 \text{ K}$$

$$T_C = \frac{1}{nR} p_C V_C = \frac{1}{nR} p_A 3V_A = 3T_A = 36 \text{ K}$$

- b) Il lavoro svolto dal gas è pari all'area racchiusa dal ciclo (area del triangolo):

$$W = \frac{(V_C - V_A) \times (p_B - p_A)}{2}$$
$$= \frac{(3V_A - V_A) \times (2p_A - p_A)}{2} = p_A V_A$$
$$= (10^5 \text{ N/m}^2) \times (10^{-3} \text{ m}^3)$$
$$= 10^2 \text{ J} = 100 \text{ J}$$

In un ciclo la variazione di energia interna nulla e dal primo principio della termodinamica segue che il calore scambiato è pari al lavoro svolto, quindi $Q = W = 100 \text{ J}$.