

APPELLO - FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE
A.A. 2019/2020, 14 luglio 2020

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

In un piano cartesiano ortogonale XY si considerino il vettore $\vec{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ e il vettore $\vec{w}$, simmetrico di $\vec{v}$ rispetto all'asse Y. Dopo aver disegnato $\vec{v}$ e $\vec{w}$ nel piano cartesiano, determinare:

- a) il vettore somma $\vec{v} + \vec{w}$ e il vettore differenza $\vec{v} - \vec{w}$ in modulo, direzione e verso e rappresentarli nel piano cartesiano;
- b) l'angolo θ tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ utilizzando la definizione di prodotto scalare.

ESERCIZIO 2 – MECCANICA

Un corpo di massa $m_1 = 1000 \text{ g}$ è posto in un piano orizzontale e comprime una molla di costante elastica $k = 500 \text{ N/m}$ di un tratto $\Delta x = 10 \text{ cm}$. Quando la molla viene rilasciata, il corpo percorre un tratto $d = 1.5 \text{ m}$ scabro con coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.1$ e urta in modo completamente anelastico un secondo corpo di massa $m_2 = 0.7 \text{ kg}$ posto alla base di un piano liscio inclinato di $\theta = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale. Determinare:

- a) la velocità v_1 del corpo m_1 nell'istante in cui si stacca dalla molla e la velocità V del sistema $m_1 + m_2$ subito dopo l'urto;
- b) la massima altezza h raggiunta sul piano inclinato dal sistema $m_1 + m_2$;
- c) FACOLTATIVO: il tempo t impiegato dal sistema $m_1 + m_2$ per raggiungere terra dal momento del distacco dal piano inclinato, nell'ipotesi che l'altezza del piano sia h ricavata nel punto b).

ESERCIZIO 3 – FLUIDI

Una zattera vuota, lunga 1 metro, larga 1.5 m e alta 30 cm, galleggia sulla superficie di un lago con il 50% del proprio volume emergente dall'acqua. Calcolare:

- a) la densità della zattera e la sua massa;
 - b) il numero massimo di lingotti di oro che tale zattera potrebbe trasportare senza che la superficie della zattera finisca sotto il pelo dell'acqua.
- (Nota: dimensione di un lingotto: 10 cm x 20 cm x 5 cm; $\rho_{Au} = 19320 \text{ kg/m}^3$).

ESERCIZIO 4 – TERMODINAMICA

Una mole di un gas ideale monoatomico compie le seguenti trasformazioni:

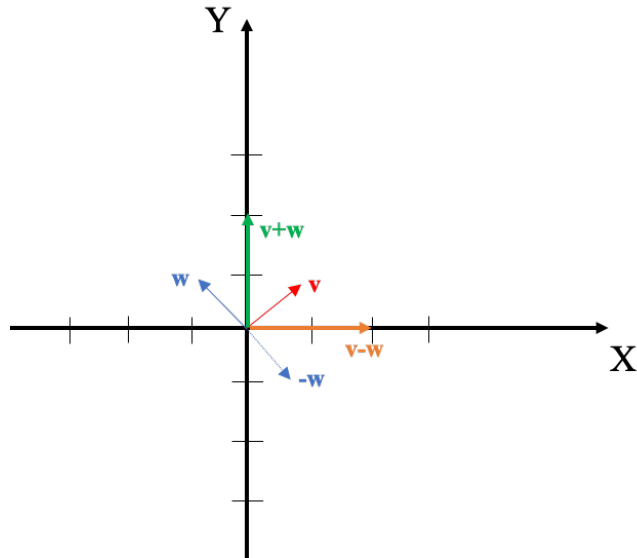
A $\rightarrow$ B: compressione lineare, dal volume $V_A = 3 \text{ dm}^3$ e temperatura $T_A = 192.5 \text{ K}$, al volume $V_B = 2 \text{ dm}^3$, con $T_B = T_A$;

B $\rightarrow$ C: compressione in cui la pressione decresce linearmente fino a $p_C = 6 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ e $V_C = 1 \text{ dm}^3$.

- a) Si disegnino nel piano (p,V) le trasformazioni termodinamiche, si calcolino per ogni stato le coordinate termodinamiche (p,V,T) ed il lavoro totale compiuto dal gas da A a C;
 - b) Si calcolino la variazione di energia interna e il calore scambiato dal gas da A a C, specificando se il calore sia assorbito o ceduto.
 - c) FACOLTATIVO: Calcolare la variazione di energia interna tra A e C e nei rami AB e AC se la trasformazione A $\rightarrow$ B fosse una isoterma.
- (Nota: $R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.082 \text{ l atm /K mol}$)

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA. Testi, soluzioni ed esiti alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

SOLUZIONE 1 – PREREQUISITI



- a) Il vettore $\vec{w}$, simmetrico di $\vec{v}$ rispetto all'asse Y ha coordinate

$$\vec{w} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

quindi

$$\vec{v} + \vec{w} = (1 - 1)\mathbf{i} + (1 + 1)\mathbf{j} = 2\mathbf{j}$$

con direzione asse Y, verso positivo e modulo 2 e

$$\vec{v} - \vec{w} = (1 + 1)\mathbf{i} + (1 - 1)\mathbf{j} = 2\mathbf{i}$$

con direzione asse X, verso positivo e modulo 2.

- b) Il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$ è dato da

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = -1 + 1 = 0$$

e dalla definizione di prodotto scalare

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \theta = 0$$

si ricava

$$\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

SOLUZIONE 2 – MECCANICA

- a) Per il principio di conservazione dell'energia meccanica si ha

$$\frac{1}{2} k \Delta x^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

quindi

$$v_1 = \Delta x \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 0.1 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{500 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{1 \text{ kg}}} = 2.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La velocità v_{1f} del corpo m_1 alla fine del tratto orizzontale scabro di lunghezza d si ottiene dal teorema energia-lavoro $\Delta K = L$, dove a compiere lavoro è solo la forza d'attrito $\vec{f}_a$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \vec{f}_a \cdot \vec{d} = -f_a d = -m_1 g \mu d$$

da cui

$$v_{1f} = \sqrt{v_1^2 - 2g\mu d} = \sqrt{4.8 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 2 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.1 \cdot 1.5 \text{ m}} = 1.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La velocità V del sistema $m_1 + m_2$ dopo l'urto si ricava quindi dalla conservazione della quantità di moto

$$m_1 v_{1f} = (m_1 + m_2) V$$

da cui

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1f} = \frac{1 \text{ kg}}{1 \text{ kg} + 0.7 \text{ kg}} \cdot 1.4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- b) La massima altezza h raggiunta sul piano inclinato dal sistema $m_1 + m_2$ si ricava nuovamente dal principio di conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = (m_1 + m_2) g h$$

da cui

$$h = \frac{V^2}{2g} = \frac{0.6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0.03 \text{ m} = 3 \text{ cm}$$

- c) FACOLTATIVO: se il piano inclinato è alto h , il sistema $m_1 + m_2$ compierà un moto puramente verticale dal momento del distacco dal piano e sarà soggetto alla sola forza di gravità. Dalla legge oraria del moto uniformemente accelerato

$$0 = h - \frac{1}{2} g t^2$$

si ricava

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.03 \text{ m}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0.08 \text{ s}$$

SOLUZIONE 3 – FLUIDI

La densità della zattera si ricava considerando che, per l'effetto della spinta di Archimede, la frazione di corpo immersa risulta essere pari al rapporto tra la densità del corpo stesso (ρ_Z) e la densità del fluido (ρ_A) in cui il corpo è immerso. In questo caso la frazione di zattera **immersa** è pari a 0.50, da cui segue:

$$m_Z g = m_A g$$
$$\rho_Z V_Z g = 0.5 \rho_A V_Z g$$

$$\rho_Z = 0.5 \rho_A = 0.5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 = 500 \text{ kg/m}^3$$

La massa della zattera è pari a:

$$m_Z = \rho_Z V_Z = 500 \text{ kg/m}^3 \times 1 \text{ m} \times 1.5 \text{ m} \times 0.3 \text{ m} = 225 \text{ kg}$$

- b) Quando carichiamo sulla zattera i lingotti di Au, il peso della zattera e dei lingotti viene equilibrato dalla spinta di Archimede:

$$m_{zattera} \cdot g + n_{lingotti} \cdot m_{lingotto} \cdot g = F_{Arch.} = V_{immerso} \cdot \rho_{H_2O} \cdot g$$

La situazione richiesta nel problema (che la superficie della zattera non vada sott'acqua) corrisponde al caso in cui il volume immerso è tutto e solo il volume della zattera.

Ricordando inoltre che

$$V_{imm} = V_Z = 1 \text{ m} \times 1.5 \text{ m} \times 0.3 \text{ m} = 0.45 \text{ m}^3$$

$$m_Z = 225 \text{ kg}$$

$$m_{lingotto} = \rho_{Au} V_{lingotto} = 19320 \text{ kg/m}^3 \times 0.1 \text{ m} \times 0.2 \text{ m} \times 0.05 \text{ m} = 19.32 \text{ kg}$$

si ricava che il massimo numero di lingotti che la zattera può trasportare senza che la sua superficie finisca sotto il pelo dell'acqua è pari a

$$n_{lingotti} = (V_Z \rho_A - m_Z) / m_{lingotto} = (0.45 \text{ m}^3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 - 225 \text{ kg}) / 19.32 \text{ kg} = 11.65$$

Il numero di lingotti deve essere un numero intero, quindi la risposta esatta a questo quesito è 11 (e non 12). In questo caso si deve sempre approssimare per difetto. Se si mettessero 12 lingotti sulla zattera, infatti, la superficie della stessa andrebbe sott'acqua, e non verrebbero rispettate le condizioni del problema.

SOLUZIONE 4 – TERMODINAMICA

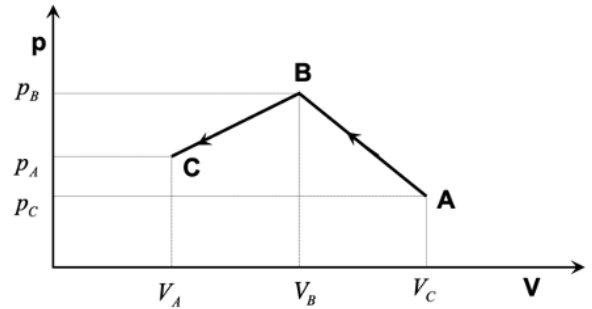
Il grafico delle trasformazioni AB-BC nel diagramma (p,V) è mostrato a destra.

Le coordinate termodinamiche (p,V,T) dei vari stati si ottengono dai dati iniziali e dalla equazione di stato dei gas perfetti ($pV = nRT$):

$$\begin{aligned}p_A &= 5.3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \\V_A &= 3 \text{ dm}^3 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \\T_A &= 192.5 \text{ K}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_B &= 8 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \\V_B &= 2 \text{ dm}^3 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \\T_B &= 192.5 \text{ K}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_C &= 6 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \\V_C &= 1 \text{ dm}^3 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \\T_C &= 72.2 \text{ K}\end{aligned}$$



Il Lavoro totale è $L = L_{AB} + L_{BC}$, dove

$$\begin{aligned}L_{AB} &= \frac{1}{2} (p_A + p_B)(V_B - V_C) = -665 \text{ J} \\L_{BC} &= \frac{1}{2} (p_B + p_C)(V_C - V_B) = -700 \text{ J}\end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$L = -1365 \text{ J}$$

b) La variazione di energia interna ΔE_{AC} è:

$$\Delta E_{AC} = n c_V (T_C - T_A) = 3R/2 (T_C - T_A) = -1499.5 \text{ J}$$

Dal primo principio della termodinamica si ha:

$$\Delta E = Q - L \text{ e pertanto } Q = L + \Delta E$$

$$Q = -2864.5 \text{ J}$$

Q è negativo, pertanto il calore è ceduto dal gas.

FACOLTATIVO:

L'energia interna è una funzione di stato, pertanto la sua variazione dipende solo dal punto iniziale e finale della trasformazione e non dal percorso svolto. Nel caso in esame:

$$\Delta E_{AC} = -1499.5 \text{ J}$$

$$\Delta E_{AB} = 0 \text{ J (come anche nel caso precedente, dato che } T_A = T_B)$$

$$\Delta E_{BC} = n c_V (T_C - T_B) = 3/2 R (T_C - T_B) = -1499.5 \text{ J} = \Delta E_{AC}$$