

APPELLO - FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE
A.A. 2023/2024, 14 Giugno 2024

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

In un piano cartesiano ortogonale XY sono dati i vettori $\vec{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ e $\vec{b} = 3\vec{a}$. Determinare:

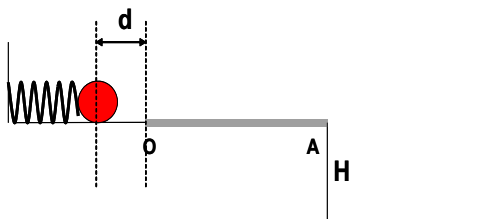
- il **modulo** di $\vec{a}$, le coordinate e il modulo di $\vec{b}$ e rappresentare $\vec{a}$ e $\vec{b}$ nel piano cartesiano;
- l'angolo θ tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e l'angolo φ tra $\vec{a}$ e $(-\vec{b})$ utilizzando la definizione di prodotto scalare.

ESERCIZIO 2 – MECCANICA

Un corpo di massa $m = 0.5 \text{ kg}$ poggia su un gradino orizzontale di altezza $H = 1 \text{ m}$ e comprime di un tratto $d = 10 \text{ cm}$ una molla di costante elastica $k = 10^3 \text{ N/m}$, come mostrato in figura.

Determinare:

- la velocità con cui il corpo si stacca dalla molla, dopo che questa è ritornata alla lunghezza naturale, e la velocità raggiunta alla fine del tratto orizzontale $OA = 3\text{m}$, supponendo che lungo il percorso OA la superficie sia scabra, con coefficiente di attrito $\mu = 0.2$;
- la distanza massima orizzontale X raggiunta, dopo la caduta dal gradino.



ESERCIZIO 3 – FLUIDI

Un recipiente cilindrico, alto $H = 3 \text{ m}$ e del diametro $d = 2 \text{ m}$ poggia a terra ed ha un forellino circolare ad una altezza $h = 1 \text{ m}$ dal suolo. Il rapporto fra le velocità dell'acqua alla superficie libera del recipiente, V , e quella all'uscita dal forellino, v , V/v è pari a 10^{-4} .

Supponendo l'acqua un fluido ideale, in moto stazionario e irrotazionale, si determini:

- il raggio del forellino;
- la velocità iniziale di deflusso dell'acqua dal forellino, facendo le opportune approssimazioni.

ESERCIZIO 4 – TERMODINAMICA

Una mole di un gas perfetto monoatomico compie un ciclo reversibile a partire dallo stato iniziale A , con pressione $p_A = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ e volume $V_A = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, costituito dalle seguenti trasformazioni:

$A \rightarrow B$, in cui la pressione aumenta linearmente con il volume, $p_B = 2 p_A$ e $V_B = 3 V_A$;

$B \rightarrow C$, isovolumica; $C \rightarrow A$, isoterma. Si svolgano i seguenti punti:

- si disegni il ciclo in un diagramma (p, V) , si calcolino le coordinate termodinamiche (p, V, T) ed il **lavoro compiuto dal gas** nelle trasformazioni AB , BC e CA e nell'intero ciclo;
- si calcoli il **calore scambiato** nelle singole trasformazioni;
- Facoltativo:** si determini il rendimento della macchina che opera con lo stesso ciclo.

[Nota: $R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.082 \text{ l atm /Kmole}$]

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA.

Testi, soluzioni ed esiti su Ariel e alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

SOLUZIONE 1 – PREREQUISITI

a) Il modulo di $\vec{a}$ è dato da

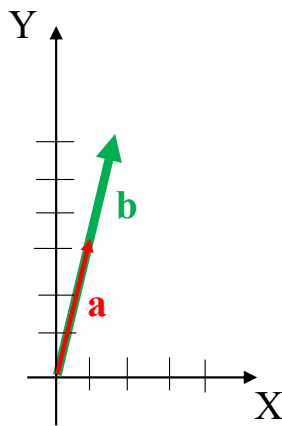
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

mentre le coordinate di $\vec{b}$ sono

$$\vec{b} = 3a_x + 3a_y = 3\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$$

con modulo

$$|\vec{b}| = 3|\vec{a}| = 3\sqrt{10}.$$



b) Dalla definizione di prodotto scalare

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot 3\vec{a}}{3|\vec{a}||\vec{a}|}\right) = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}||\vec{a}|}\right) = \arccos(1) = 0^\circ$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot (-\vec{b})}{|\vec{a}||-\vec{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot (-3\vec{a})}{3|\vec{a}||\vec{a}|}\right) = \arccos\left(-\frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}||\vec{a}|}\right) = \arccos(-1) = 180^\circ$$

D'altra parte, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ hanno stessa direzione e stesso verso mentre $\vec{a}$ e $(-\vec{b})$ hanno stessa direzione ma verso opposto.

SOLUZIONE 2 – MECCANICA

- a) Per il principio di conservazione dell'energia meccanica, quando la molla torna a riposo l'energia potenziale elastica della molla viene convertita completamente in energia cinetica del corpo:

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

da cui segue che

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}d = \\ = 4.5 \text{ m/s}$$

Per il teorema lavoro-energia cinetica, il lavoro compiuto della forza di attrito lungo il tratto OA=L è pari alla variazione di energia cinetica del corpo:

$$L_{att} = \Delta K \\ \vec{F}_{att} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \\ -\mu mgL = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \\ \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 - \mu mgL \\ v_f = \sqrt{v_i^2 - 2\mu gL} \\ = 2.9 \text{ m/s}$$

- b) Il corpo cadendo dal gradino compie un moto parabolico, soggetto alla sola accelerazione di gravità. L'equazione del moto lungo y è quindi:

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = H - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

il tempo di caduta è quindi:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 1m}{9.8m/s^2}} = 0.45s$$

Essendo il moto lungo x rettilineo ed uniforme, la massima distanza x raggiunta è pari a

$$x = v_{0x}t = v_f t = \\ = 2.9 \text{ m/s} \times 0.45 \text{ s} = 1.3 \text{ m}$$

SOLUZIONE 3 – FLUIDI

a) La portata volumetrica dell'acqua si conserva (equazione di continuità), pertanto

$$V \cdot S = v \cdot s$$

dove S è l'area della superficie libera del recipiente che ha raggio R
e s è l'area del forellino che ha raggio r .

Pertanto

$$V \cdot \pi R^2 = v \cdot \pi r^2$$
$$(r/R)^2 = V/v$$

e quindi $r/R = 10^{-2}$, da cui segue $r=1$ cm.

b) Applicando il teorema di Bernoulli a due punti situati rispettivamente sulla superficie libera dell'acqua nel recipiente e nel forellino, si ha:

$$p(\text{atmosferica}) + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g H = p(\text{atmosferica}) + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h$$

dove H è l'altezza dell'acqua nel recipiente, h quella del forellino e ρ è la densità dell'acqua.

Poichè $V \ll v$ si ricava

$$v = (2 g (H-h))^{1/2} = 6.3 \text{ m/s}$$

SOLUZIONE 4 – TERMODINAMICA

a) Le coordinate termodinamiche sono le seguenti:

stato A:

$$p_A = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_A = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_A = p_A V_A / nR = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / 8.31 \text{ J/moleK} = 72.2 \text{ K}$$

stato B:

$$p_B = 2 p_A = 6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_B = 3 V_A = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

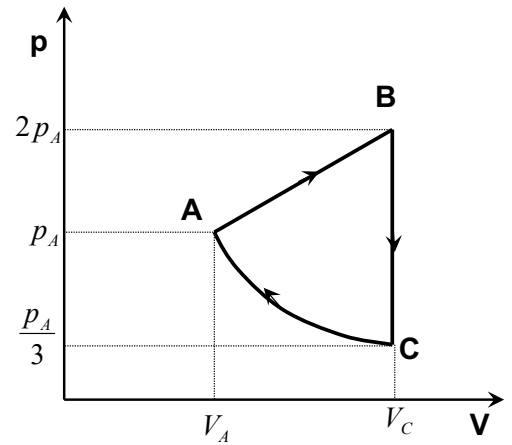
$$T_B = p_B V_B / nR = 2 p_A \cdot 3 V_A / nR = 6 T_A = 433.2 \text{ K}$$

stato C:

$$V_C = V_B = 3 V_A = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_C = T_A = 72.2 \text{ K}$$

$$p_C = nRT_A / 3V_A = 1/3 p_A = 10^5 \text{ Pa}$$



In un diagramma di questo tipo il Lavoro compiuto dal gas nelle trasformazioni AB, BC e CA è pari all'area delimitata dalle trasformazioni stesse e dall'asse V, tra lo stato iniziale e quello finale.

Pertanto:

$$L_{AB} = (p_B + p_A) (V_B - V_A) / 2 = 1800 \text{ J}$$

$$L_{BC} = 0$$

$$L_{CA} = nRT_A \ln(V_A/V_C) = 8.31 \text{ J/moleK} \times 72.2 \text{ K} \ln(1/3) = -659 \text{ J}$$

Per l'intero ciclo si ottiene:

$$L_{\text{ciclo}} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} = 1141 \text{ J}$$

b) Il calore scambiato nelle varie trasformazioni si ottiene dal 1. Principio della termodinamica.

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= \Delta E_{AB} + L_{AB} = n c_V \Delta T + L_{AB} = \\ &= 3/2 R (T_B - T_A) + L_{AB} = (15/2 \times 8.31 \times 72.2 + 1800) \text{ J} = 6300 \text{ J} \end{aligned}$$

$$Q_{BC} = \Delta E_{BC} + L_{BC} = n c_V \Delta T = 3/2 R (T_C - T_B) = -15/2 \times 8.31 \times 72.2 \text{ J} = -4500 \text{ J}$$

$$Q_{CA} = \Delta E_{CA} + L_{CA} = L_{CA} = -659 \text{ J}$$

c) Facoltativo:

Il rendimento della macchina è pari a:

$$\eta = L_{\text{ciclo}} / Q_{\text{ass}} = 1141 / 6300 = 0.18$$