
ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

Si considerino i vettori $\vec{a} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$; $\vec{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$; $\vec{c} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.
Calcolare

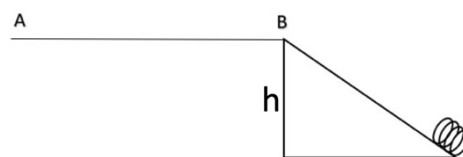
- a) coordinate e modulo del vettore $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}$
- b) l'angolo compreso tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$

ESERCIZIO 2 - MECCANICA

Una sfera parte dal punto A con una velocità $v_A = 2.5 \text{ m/s}$ e percorre un tratto rettilineo di lunghezza $L = 1.25 \text{ m}$ con coefficiente di attrito $\mu = 0.2$. Una volta raggiunto il punto B, la sfera comincia a scendere lungo un piano inclinato liscio, di altezza $h = 1 \text{ m}$, che presenta una molla di costante elastica $k = 300 \text{ N/m}$ alla base.

Si calcoli:

- a) La **velocità** della sfera nel punto B;
- b) La **massa** della sfera, sapendo che, raggiunta la base del piano, la compressione massima della molla sarà $\Delta x = 0.54 \text{ m}$



ESERCIZIO 3 – FLUIDI

In una condotta a sezione circolare scorre un fluido ideale con densità pari alla densità dell'acqua. La condotta è costituita da un primo tratto orizzontale lungo L , a quota $h = 160 \text{ cm}$ dal suolo. All'inizio del tratto L , la sezione S_1 della condotta ha raggio r_1 , mentre alla fine di L il raggio della condotta è pari a $r_2 = 2r_1$.

Successivamente la condotta si abbassa a livello del suolo con sezione che rimane costante ($S_3 = S_2$).

Sapendo che la velocità in corrispondenza della sezione S_1 è pari a $v_1 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, determina:

- a) Le velocità v_2 e v_3 in corrispondenza delle sezioni S_2 ed S_3
- b) Le differenze di pressione $\Delta p_{12} = p_1 - p_2$ e $\Delta p_{23} = p_2 - p_3$ in corrispondenza delle sezioni S_2 ed S_3

ESERCIZIO 4 – TERMODINAMICA

Un gas perfetto biatomico pari a $n=0.4$ moli compie la seguente trasformazione ciclica tra gli stati A, B e C

- i) $A \rightarrow B$ trasformazione isoterma con $p_A = 3 \text{ atm}$, $V_A = 4 \text{ l}$ e $p_B = 0.5 p_A$
- ii) $B \rightarrow C$ trasformazione isobara con $V_C = \frac{2}{3} V_A$
- iii) $C \rightarrow A$ la pressione cresce linearmente con il volume

- a) Disegnare la trasformazione sul piano p-V e calcolare le coordinate termodinamiche degli stati
- b) Si calcoli il lavoro compiuto dal gas nelle tre diverse trasformazioni e il calore totale assorbito durante la trasformazione ciclica

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA.

Testi, soluzioni ed esiti alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

a) Coordinate $\vec{d}$:

$$\vec{d} = (5 - 2 - 3)\mathbf{i} + (-6 + 6)\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = 3\mathbf{k}$$

Modulo di $\vec{d}$:

$$|\vec{d}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 3$$

b) Consideriamo $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta$ dove θ è l'angolo compreso tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.
Calcoliamo:

$$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-6)^2 + 0^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 5 \cdot (-2) + (-6) \cdot 0 + 0 \cdot 3 = -10$$

Quindi:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-10}{\sqrt{61}\sqrt{13}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{-10}{\sqrt{61}\sqrt{13}}\right) = 110 \text{ deg}$$

ESERCIZIO 2 – MECCANICA

- a) Per calcolare la velocità della sfera nel punto B sfruttiamo il teorema dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = L_{\text{tot}}$$

dove l'unica forza che compie lavoro è, in questo caso, la forza d'attrito $F_A = \mu N$.

Quindi:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -\mu mgL$$

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2\mu gL} = 1.16 \text{ m/s}$$

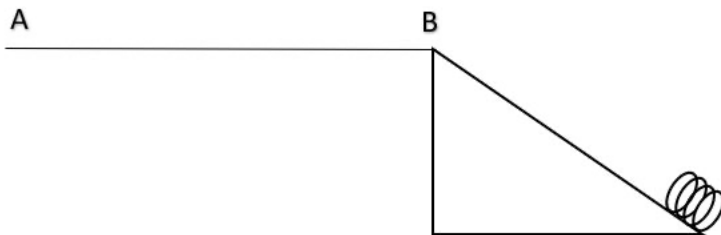
- b) Essendo la superficie del piano priva di attrito, è qui sufficiente impostare la conservazione dell'energia meccanica

$$E_{m,i} = E_{m,f}$$

Quindi

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgh = \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

$$m = \frac{k\Delta x^2}{v_B^2 + 2gh} = 4.2 \text{ kg}$$



ESERCIZIO 3 – FLUIDI

- a) Attraverso l'equazione di continuità si calcolano le velocità v_2 e v_3 in corrispondenza delle sezioni S_2 ed S_3 , infatti

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = S_3 v_3$$

in particolare

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} v_1 = \frac{r_1^2}{4r_1^2} v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e

$$v_3 = \frac{S_2}{S_3} v_2 = v_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- b) Applichiamo il teorema di Bernoulli:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh = \text{costante}$$

quindi

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$\Delta p_{12} = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) = -3 \cdot 10^4 \text{Pa}$$

e

$$p_2 + \rho gh = p_3$$

$$\Delta p_{23} = -\rho gh = -1.6 \cdot 10^4 \text{Pa}$$

ESERCIZIO 3 – TERMODINAMICA

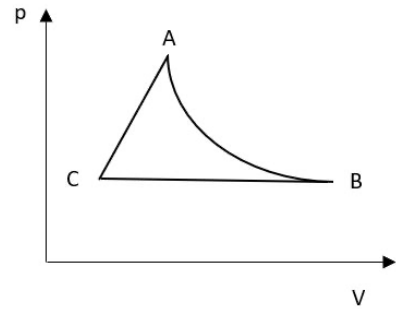
- a) Considerando l'equazione dei gas perfetti $pV = nRT$, calcoliamo le coordinate (p, V, T) dello stato A, B, C.

Stato A

$$p_A = 3 \text{ atm} \approx 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_A = 4 \text{ l} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = 361 \text{ K}$$



Stato B

Poiché la trasformazione $A \rightarrow B$ è isoterma

$$T_B = T_A = 361 \text{ K}$$

$$p_B = \frac{1}{2} p_A = 1.5 \text{ atm}$$

$$V_B = \frac{nRT_B}{p_B} = \frac{2nRT_A}{p_A} = 2V_A = 8 \text{ l}$$

Stato C

$$p_C = p_B = 1.5 \text{ atm}$$

$$V_C = \frac{2}{3} V_A = 2.6 \text{ l}$$

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{T_A}{3} = 120 \text{ K}$$

- b) Calcoliamo adesso il lavoro compiuto dal gas nelle tre trasformazioni.

Trasformazione $A \rightarrow B$:

$$L_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p \, dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT_A}{V} \, dV = nRT_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT_A \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) = nRT_A \ln 2 \approx 832 \text{ J}$$

Trasformazione $B \rightarrow C$:

$$L_{BC} = p_B (V_C - V_B) \approx -810 \text{ J}$$

Trasformazione $C \rightarrow A$:

$$L_{CA} = \frac{(p_A + p_C)(V_A - V_C)}{2} \approx 315 \text{ J}$$

Essendo la trasformazione ciclica, la variazione di energia interna $\Delta E_{\text{int}} = 0$ e quindi il calore totale assorbito sarà

$$Q = L_{\text{tot}} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} = 832 \text{ J} - 810 \text{ J} + 315 \text{ J} = 337 \text{ J}$$