

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

Si considerino i vettori $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{k}$; $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{c} = -\vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{d} = \vec{i} + 2\vec{k}$.

Determinare:

- Le coordinate e il modulo del vettore $\vec{e} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} - \vec{d}$
 - l'angolo θ_{ad} compreso tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{d}$ e l'angolo φ_{bc} compreso tra i vettori $\vec{b}$ e $\vec{c}$
-

ESERCIZIO 2 – MECCANICA

Si consideri un piano inclinato di $\theta = 60^\circ$ rispetto all'orizzontale, liscio e di lunghezza $l = 2.9\text{m}$. Una pallina di massa incognita parte da ferma dalla sommità del piano inclinato e dopo averne raggiunto la base percorre un tratto di piano scabro con coefficiente di attrito $\mu_d = 0.3$.

Determinare:

- la velocità della pallina alla base del piano inclinato.
 - quanto spazio percorre la pallina prima di fermarsi completamente.
-

ESERCIZIO 3 – FLUIDI

Si considerino due sfere esternamente identiche con una densità $\rho = 11.3 \text{ g/cm}^3$. La prima sfera, completamente piena, pesa $F_1 = 36 \text{ N}$, mentre la seconda, che presenta al proprio interno una cavità sferica vuota, pesa $F_2 = 12 \text{ N}$. Entrambe le sfere sono completamente immerse in acqua. Determinare:

- La spinta di Archimede che agisce sulle 2 sfere e il volume e il raggio della cavità presente all'interno della seconda sfera.
 - Si consideri ora una terza sfera uguale alle prime due ma con una cavità al proprio interno pari ai $2/3$ del volume totale. Quale densità deve avere il corpo per poter galleggiare con il 50% del volume immerso?
-

ESERCIZIO 4 – TERMODINAMICA

Due moli di gas perfetto monoatomico compiono un **ciclo** termodinamico con le trasformazioni seguenti:

A $\rightarrow$ B: **ISOTERMA** con $p_A = 1 \text{ atm}$, $V_A = 1.5 \text{ dm}^3$ e $p_B = \frac{1}{3} p_A$.

B $\rightarrow$ C: **ISOCORA** con $p_C = \frac{4}{3} p_A$.

C $\rightarrow$ A: trasformazione dove la pressione varia **linearmente** con il volume.

Rappresenta il ciclo sul piano p-V e determina:

- Le coordinate termodinamiche degli stati A, B e C;
 - Il calore scambiato e il lavoro compiuto in ogni trasformazione e la variazione di energia interna per l'intero ciclo
-

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA.

Testi, soluzioni ed esiti alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

a) Coordinate del vettore $\vec{e}$:

$$\vec{e} = (5 - 4 - 1)\mathbf{i} + (2 - 1)\mathbf{j} + (-1 + 3 - 2)\mathbf{k} = \mathbf{j}$$

Modulo del vettore $\vec{e}$:

$$|\mathbf{e}| = 1$$

b) Per calcolare l'angolo θ_{ad} consideriamo la seguente relazione.

$$\vec{a} \cdot \vec{d} = |\mathbf{a}||\mathbf{d}|\cos\theta_{ad}$$

dove

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{26}$$

$$|\mathbf{d}| = \sqrt{5}$$

e

$$\vec{a} \cdot \vec{d} = a_x d_x + a_y d_y + a_z d_z = 5 \cdot 1 + 0 - 1 \cdot 2 = 3$$

quindi

$$\theta_{ad} = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{|\mathbf{a}||\mathbf{d}|}\right) = 74.7^\circ$$

Lo stesso ragionamento vale per l'angolo φ_{bc}

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{5}$$

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{10}$$

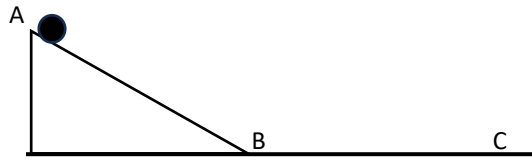
e

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z = -1$$

quindi

$$\varphi_{bc} = \arccos\left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\mathbf{b}||\mathbf{c}|}\right) = 98.1^\circ$$

ESERCIZIO 2 – MECCANICA



- a) Il primo punto possiamo risolverlo applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica; infatti, il piano inclinato è liscio e quindi non presenta attrito. Scriviamo:

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

dove

$$K_i = \frac{1}{2} m v_A^2 = 0 \text{ poiché la pallina parte da ferma e quindi la velocità iniziale è nulla;}$$

$$U_i = mgh = mgl \sin(\theta)$$

$$K_f = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$U_f = 0$$

Quindi:

$$v_B = \sqrt{2gl \sin(\theta)} \approx 7 \text{ m/s}$$

- b) Applichiamo ora il teorema dell'energia cinetica

$$\Delta K = L$$

dove il Lavoro è quello compiuto dalla forza di attrito

$$L = \overrightarrow{F_{att}} \cdot \vec{s} = \mu \vec{N} \cdot \vec{s} = \mu m \vec{g} \cdot \vec{s} = -\mu mgs$$

quindi:

$$\frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = -\mu mgs$$

$$s = \frac{v_B^2}{2\mu g} \approx 8.5 \text{ m}$$

ESERCIZIO 3 – FLUIDI

- a) **La spinta di Archimede agente sulla sfera con cavità sarà identica a quella agente sulla sfera senza cavità** poiché la spinta di Archimede dipende solo dal volume del **liquido** spostato.

Calcoliamo quindi il volume immerso della sfera piena:

$$F_1 = m_1 g = \rho V_1 g$$
$$V_1 = \frac{F_1}{\rho g} \sim 3.2 \cdot 10^{-4} m^3$$

Il volume di liquido spostato dalla sfera piena è uguale a quello spostato dalla sfera con cavità ed è

$$V = V_1$$

La spinta di Archimede agente sulle sfere è quindi:

$$S = \rho_{H_2O} V g \approx 3.2 N$$

Il volume della cavità si trova con la seguente equazione:

$$V_{cav} = \frac{F_1 - F_2}{\rho g} \approx 2.2 \cdot 10^{-4} m^3$$

e il raggio

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 0.04 m$$

- b) Poiché il corpo galleggia con il 50% del volume immerso, vale la seguente situazione di equilibrio:

$$F_p = S$$

dove F_p è la forza peso agente sulla sfera, S è la spinta di Archimede calcolata sul volume immerso $V_{imm} = 0.5V$

Considerando che V è il volume della sfera se fosse piena, ρ_x è la densità incognita, V_c il volume della cavità e V_{imm} il volume di acqua spostata:

$$\rho_x (V - V_c) g = \rho_{H_2O} V_{imm} g$$

$$\rho_x \left(V - \frac{2}{3} V \right) = \rho_{H_2O} V_{imm}$$

$$\rho_x \left(\frac{1}{3} V \right) = \rho_{H_2O} V_{imm}$$

$$\rho_x = \frac{3\rho_{H_2O} V_{imm}}{V} = 3\rho_{H_2O} 0.5 \frac{V}{V} = 1500 \text{ kg/m}^3$$

ESERCIZIO 4 – TERMODINAMICA

a) **Stato A:**

$$p_A = 1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_A = 1.5 \text{ dm}^3 = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = 9 \text{ K}$$

Stato B:

$$p_B = \frac{1}{3} p_A$$

$$T_B = T_A$$

$$V_B = \frac{nRT_B}{p_B} = \frac{3nRT_A}{p_A} = 3V_A = 4.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Stato C:

$$p_C = \frac{4}{3} p_A$$

$$V_C = V_B = 3V_A$$

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{4p_A V_A}{nR} = 4T_A = 36 \text{ K}$$

b) Trasformazione A $\rightarrow$ B:

$$L_{AB} = nRT_A \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = 71 \text{ J}$$

$\Delta E_{AB} = 0 \text{ J}$ poichè la variazione di energia dipende dalla variazione di temperatura

$$Q_{AB} = L_{AB} = 71 \text{ J}$$

Trasformazione B $\rightarrow$ C:

$$L_{BC} = 0 \text{ J}$$

$$\Delta E_{BC} = n c_V \Delta T_{BC} = 673 \text{ J}$$

$$Q_{BC} = \Delta E_{BC} = 673 \text{ J}$$

Trasformazione C $\rightarrow$ A:

$$L_{CA} = \frac{1}{2} (p_A + p_C) (V_A - V_C) = -350 \text{ J}$$

$$\Delta E_{BC} = n c_V \Delta T_{CA} = -\Delta E_{BC} = -673 \text{ J}$$

$$Q_{CA} = \Delta E_{CA} + L_{CA} = -1023 \text{ J}$$

Per l'intero ciclo $\Delta E = 0$ poichè $\Delta E \propto \Delta T$ ma la variazione di temperatura è nulla essendo il punto iniziale e il punto finale coincidenti.

