

4APPELLO - FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE
A.A. 2019/2020, 10 settembre 2020

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

Dati i vettori $\vec{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\vec{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\vec{c} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

ed il vettore $\vec{F} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, disegnarli nel piano cartesiano (x,y) e determinare:

- a) il vettore totale $\vec{s} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ e disegnarlo nel piano cartesiano;
- b) il modulo di $\vec{F}$ e di $\vec{s}$;
- c) il prodotto scalare tra $\vec{F}$ e $\vec{s}$;
- d) l'angolo tra $\vec{F}$ e $\vec{s}$ (si sfruttino le proprietà del prodotto scalare).

ESERCIZIO 2 – MECCANICA

Un corpo di massa $M = 0.5 \text{ kg}$ è messo in moto in **A**, con velocità $v = 5 \text{ m/s}$, lungo un tratto orizzontale liscio. Dopo avere percorso una distanza L il corpo urta in modo **completamente anelastico** un corpo di massa uguale M , posto nel punto **B**. Dopo l'urto i due corpi procedono uniti per un tratto **orizzontale scabro** di lunghezza d e coefficiente di attrito $\mu = 0.2$. Successivamente il tratto orizzontale d diventa nuovamente liscio ed **inclinato** di un angolo $\theta = 45^\circ$. Determinare:

- a) La velocità del corpo di massa M nel punto **B**, immediatamente **prima** dell'urto, e la velocità dei due corpi in **B**, immediatamente **dopo** l'urto. Si determini la lunghezza del tratto d , scabro, sapendo che la velocità del sistema di due corpi, alla fine del tratto orizzontale d è **dimezzata**.
- b) La **quota massima h** raggiunta dal sistema di due corpi sul piano inclinato liscio.

ESERCIZIO 3 – FLUIDI

Una sfera cava di **alluminio** ($\rho_{Al} = 2.7 \text{ g/cm}^3$) di raggio $r = 10 \text{ cm}$, la cui cavità occupa il **70%** del volume totale, viene posta in **acqua**. Determinare:

- a) il volume della sfera immerso V_{imm} ;
- b) la massa d'acqua m_a con cui riempire la cavità in modo che la sfera risulti completamente immersa nel fluido ed il volume V_a occupato dall'acqua versata.
- c) FACOLTATIVO: calcolare il volume della sfera immerso V'_{imm} nel caso in cui la cavità venisse riempita con mercurio ($\rho_{Hg} = 13.6 \text{ g/cm}^3$) di massa m_{Hg} uguale a quella dell'acqua m_a trovata nel punto b).

ESERCIZIO 4 – TERMODINAMICA

Due moli di un gas perfetto **monoatomico** compiono un ciclo termodinamico definito dalle seguenti trasformazioni:

A $\rightarrow$ B: isobara dal volume $V_A = 1 \text{ l}$ e pressione $P_A = 4 \text{ atm}$ al volume $V_B = 10V_A$;

B $\rightarrow$ C: isocora fino alla pressione $P_C = \frac{1}{4}P_A$;

C $\rightarrow$ D: isobara;

D $\rightarrow$ A: isoterma.

- a) **Disegnare** nel piano (P,V) le trasformazioni e calcolare per ogni stato le **coordinate** termodinamiche (P,V,T);
- b) calcolare il **lavoro** compiuto e il **calore** scambiato dal gas in ognuna delle trasformazioni e per l'intero ciclo, specificando se il calore è ceduto o assorbito.

(Nota: $R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.082 \text{ l atm /K mol}$)

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA. Testi, soluzioni ed esiti alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

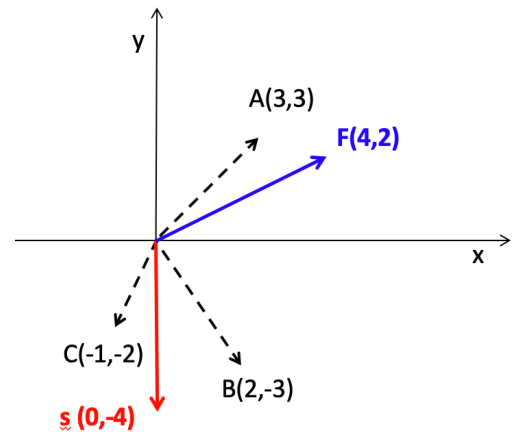
SOLUZIONE 1 – PREREQUISITI

a) Dati i vettori

$$\vec{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \vec{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \vec{c} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

il vettore s si può calcolare per componenti:

$$\begin{aligned}\vec{s} &= -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \\ \vec{s} &= (-3 + 2 + 1)\vec{i} + (-3 - 3 + 2)\vec{j} \\ &= 0\vec{i} - 4\vec{j}\end{aligned}$$



b) I moduli di s e F valgono:

$$\begin{aligned}|\vec{s}| &= 4 \\ |\vec{F}| &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{16 + 4} = 4.47\end{aligned}$$

c) Il prodotto scalare si può calcolare per componenti:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \\ \vec{s} &= -4\mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = F_x s_x + F_y s_y = 4 \cdot (0) - 2 \cdot 4 = -8$$

d) L'angolo tra F e s si ottiene dalla definizione di prodotto scalare:

$$\begin{aligned}w &= \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| |\vec{s}| \cos\theta \\ \cos\theta &= w / (|\vec{F}| |\vec{s}|) = -\frac{8}{4.47 \times 4} = -0.44 \\ \theta &= \arccos(-0.44) = 118^\circ\end{aligned}$$

SOLUZIONE 2 – MECCANICA

a) In B, alla fine del tratto L liscio e orizzontale, il corpo di massa M ha la stessa velocità

$$v_B = v_A = 5 \text{ m/s.}$$

Dopo l'urto, completamente anelastico, la velocità V dei due corpi uniti è data da

$$Mv_B = (M+M)V = 2M V$$

$$V = v_B/2 = 2.5 \text{ m/s}$$

La lunghezza del tratto d, scabro, si ricava dal teorema Lavoro-energia cinetica, ove l'unica forza che compie lavoro è la forza di attrito:

$$L_d = K_f - K_i$$

$$- f_k d = - \mu 2M g d = \frac{1}{2} (2M) (V/2)^2 - \frac{1}{2} (2M) (V)^2 = M(V/2)^2 - M (V)^2 = - \frac{3}{4} M V^2$$

$$d = 3/8 V^2/(\mu g) = 1.2 \text{ m}$$

b) La quota massima raggiunta sul piano liscio, inclinato di 45° , si ottiene applicando la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2} (2M) (V/2)^2 = (2M) g h$$

$$h = \frac{1}{2} (V/2)^2/g = 0.08 \text{ m}$$

SOLUZIONE 3 – FLUIDI

- a) Il volume immerso V_{imm} si ricava sapendo che all'equilibrio la forza peso F_P è pari alla spinta di Archimede S

$$F_P = S$$

dove

$$F_P = m_s \cdot g = \rho_{\text{Al}} \cdot (V_S - V_C) \cdot g$$

essendo m_s la massa della sfera e V_C il volume della cavità. La spinta di Archimede risulta invece essere

$$S = \rho_a \cdot V_{\text{imm}} \cdot g$$

Eguagliando le due forze si ottiene

$$\rho_{\text{Al}} \cdot (V_S - V_C) \cdot g = \rho_a \cdot V_{\text{imm}} \cdot g$$

da cui

$$V_{\text{imm}} = \frac{\rho_{\text{Al}}}{\rho_a} \cdot (V_S - V_C) = \frac{2.7 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0.1^3 \cdot (1 - 0.7) \text{ m}^3 = 3.39 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

- b) Quando nella cavità viene introdotta dell'acqua, la forza peso diventa

$$F_P = m_s \cdot g + m_a \cdot g = \rho_{\text{Al}} \cdot (V_S - V_C) \cdot g + m_a \cdot g$$

La sfera risulta completamente immersa se il volume immerso V_{imm} coincide con il volume totale della sfera V_S . Nuovamente, all'equilibrio si ha $F_P = S$ ovvero

$$\rho_{\text{Al}} \cdot (V_S - V_C) \cdot g + m_a \cdot g = \rho_a \cdot V_S \cdot g$$

da cui

$$m_a = \rho_a \cdot V_S - \rho_{\text{Al}} \cdot (V_S - V_C) = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0.1^3 \text{ m}^3 - 2.7 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0.1^3 \cdot (1 - 0.7) \text{ m}^3$$

cioè

$$m_a = 0.796 \text{ kg} = 796 \text{ g}$$

Il volume occupato dall'acqua si ricava dalla definizione di densità

$$V_a = \frac{m_a}{\rho_a} = \frac{0.796 \text{ kg}}{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 7.96 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

- c) FACOLTATIVO: se nella sfera viene versato del mercurio con $m_{\text{Hg}} = m_a$ trovata del punto b), la forza peso totale non cambia

$$F_P = \rho_{\text{Al}} \cdot (V_S - V_C) \cdot g + m_{\text{Hg}} \cdot g = F_P = \rho_{\text{Al}} \cdot (V_S - V_C) \cdot g + m_a \cdot g$$

e le condizioni di equilibrio tra F_P e la spinta di Archimede S rimangono le stesse. Di conseguenza, la sfera risulta completamente immersa in acqua ed il volume immerso V'_{imm} è pari a tutto il volume della sfera

$$V'_{\text{imm}} = V_S = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0.1^3 \text{ m}^3 = 4.19 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

SOLUZIONE 4 – TERMODINAMICA

- a) Le coordinate termodinamiche si ricavano dall'equazione dei gas perfetti $PV = nRT$:

$$P_A = 4 \text{ atm} \cong 4 \cdot 1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 4.04 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_A = 1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_A = \frac{P_A \cdot V_A}{n \cdot R} = \frac{4.04 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{2 \text{ mol} \cdot 8.31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}} = 24.3 \text{ K}$$

$$P_B = P_A = 4.04 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_B = 10V_A = 10^{-2} \text{ m}^3$$

$$T_B = \frac{P_B \cdot V_B}{n \cdot R} = \frac{P_A \cdot 10V_A}{n \cdot R} = 10 \cdot T_A = 243 \text{ K}$$

$$P_C = \frac{1}{4} P_A = 1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

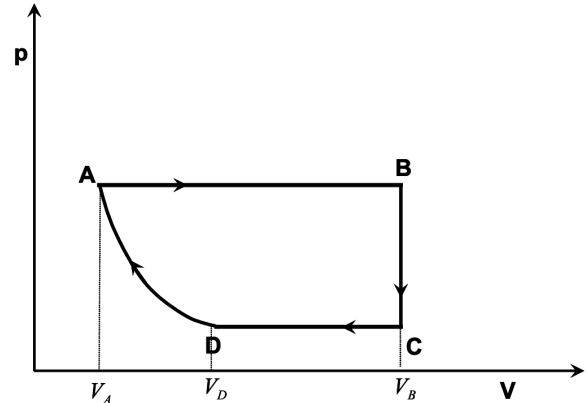
$$V_C = V_B = 10^{-2} \text{ m}^3$$

$$T_C = \frac{P_C \cdot V_C}{n \cdot R} = \frac{\frac{1}{4} P_A \cdot 10V_A}{n \cdot R} = \frac{5}{2} T_A = 60.8 \text{ K}$$

$$P_D = P_C = 1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_D = \frac{T_D \cdot n \cdot R}{P_C} = \frac{T_A \cdot n \cdot R}{P_C} = \frac{24 \text{ K} \cdot 2 \text{ mol} \cdot 8.31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}}{10^5 \text{ Pa}} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_D = T_A = 24.3 \text{ K}$$



- b) Calcoliamo ora il lavoro compiuto dal gas ed il calore scambiato nelle singole trasformazioni:

$$L_{A \rightarrow B} = P_A \cdot (V_B - V_A) = 9 \cdot P_A \cdot V_A = 9 \cdot 4.04 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 3636 \text{ J}$$

$$Q_{A \rightarrow B} = n \cdot c_P \cdot \Delta T = n \cdot \frac{5}{2} R \cdot (T_B - T_A) = 9 \cdot n \cdot \frac{5}{2} R \cdot T_A = 9 \cdot 2 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 24.3 \text{ K} = 9087 \text{ J}$$

$$L_{B \rightarrow C} = 0 \text{ J}$$

$$Q_{B \rightarrow C} = n \cdot c_V \cdot \Delta T = n \cdot \frac{3}{2} R \cdot (T_C - T_B) = -\frac{1}{2} Q_{A \rightarrow B} = -4543.5 \text{ J}$$

$$L_{C \rightarrow D} = P_D \cdot (V_D - V_C) = \frac{1}{4} P_A \cdot (4V_A - 10V_A) = -\frac{1}{6} L_{A \rightarrow B} = -606 \text{ J}$$

$$Q_{C \rightarrow D} = n \cdot c_P \cdot \Delta T = n \cdot \frac{5}{2} R \cdot (T_D - T_C) = -\frac{1}{6} Q_{A \rightarrow B} = -1514.5 \text{ J}$$

$$L_{D \rightarrow A} = n \cdot R \cdot T_A \cdot \ln\left(\frac{V_A}{V_D}\right) = -2 \text{ mol} \cdot 8.31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 24.3 \text{ K} \cdot \ln(4) = -560 \text{ J}$$

$$Q_{D \rightarrow A} = L_{D \rightarrow A} = -560 \text{ J}$$

Per l'intero ciclo:

$$L_{\text{ciclo}} = L_{A \rightarrow B} + L_{B \rightarrow C} + L_{C \rightarrow D} + L_{D \rightarrow A} = 3636 \text{ J} + 0 - 606 \text{ J} - 560 \text{ J} = 2470 \text{ J}$$

Poiché $\Delta E_{\text{ciclo}} = 0$, dal Primo Principio della Termodinamica risulta $Q_{\text{ciclo}} = L_{\text{ciclo}}$.

Quindi

$$Q_{\text{ciclo}} = 2470 \text{ J (assorbito)}$$