

APPELLO - FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE
A.A. 2023/2024, 23 aprile 2024

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

Si considerino i vettori $\vec{a} = (3\vec{i} + 2\vec{j})m$, $\vec{b} = (-3\vec{i} + 3\vec{j})m$, $\vec{c} = (2\vec{i} - 1\vec{j})m$ ed il vettore $\vec{F} = (4\vec{i} + 3\vec{j})N$

- a) Determinare il vettore $\vec{s} = (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$ ed il modulo di $\vec{F}$ e di $\vec{s}$;
- b) calcolare il prodotto scalare tra $\vec{F}$ e $\vec{s}$ e l'angolo tra $\vec{F}$ ed $\vec{s}$, sfruttando le proprietà del prodotto scalare.

ESERCIZIO 2 – MECCANICA

Un corpo di massa $m_1 = 100 \text{ g}$ parte da fermo dalla sommità di un piano inclinato liscio alto $h_1 = 2 \text{ m}$, inclinato di un angolo $\alpha = 30^\circ$ con il piano orizzontale. Alla base del piano, il corpo procede lungo un piano orizzontale liscio e dopo una distanza $L = 50 \text{ cm}$ urta in modo completamente anelastico un secondo corpo, di massa $m_2 = 30 \text{ g}$. Calcolare:

- a) la **velocità** del corpo di massa m_1 alla base del piano inclinato, all'istante **prima** dell'urto e la velocità dei due corpi immediatamente **dopo** l'urto;
- b) la **velocità** del corpo di massa m_1 all'istante **prima** dell'urto, assumendo ora che il piano orizzontale sia scabro ed eserciti una forza di attrito sul corpo m_1 pari a $F_{\text{att}} = 1.3 \text{ N}$. Calcolare di nuovo la velocità dei due corpi immediatamente **dopo** l'urto.

ESERCIZIO 3 – FLUIDI

Una sfera di volume $V = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ galleggia in una bacinella riempita d'acqua con $2/3$ del suo volume immerso.

- a) Determinare la densità ρ_{sf} della sfera e la forza esterna che si dovrebbe applicare per immergere completamente in acqua la sfera.
- b) Si consideri ora una sfera identica alla prima ma con una cavità sferica al proprio interno. Si calcoli il raggio r della cavità sapendo che la variazione di forza peso tra la sfera senza cavità e quella con cavità è $\Delta F_p = 2 \text{ N}$.

ESERCIZIO 4 – TERMODINAMICA

Un gas perfetto biatomico con $n = 2$ moli compie il seguente ciclo termodinamico:

- i) $A \rightarrow B$ trasformazione isoterma con $p_A = 6 \text{ atm}$, $V_A = 0.5 \text{ l}$, $V_B = 2V_A$
- ii) $B \rightarrow C$ trasformazione isocora con $p_C = \frac{1}{2}p_B$
- iii) $C \rightarrow D$ trasformazione isobara con $V_D = V_A$
- iv) $D \rightarrow A$ trasformazione isocora

- a) Si **disegni il grafico** del ciclo termodinamico nel piano (p, V) e si determinino le **coordinate termodinamiche** nei punti A, B, C e D.
- b) Si calcoli il **lavoro** svolto dal gas e **variazione di energia interna** per ogni trasformazione termodinamica e per l'intero ciclo.
- c) FACOLTATIVO: si determini il **rendimento** della macchina termica ideale che opera seguendo questo ciclo termodinamico.

[N.B. $R = 8.31 \text{ J/moleK}$]

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA.
Testi, soluzioni ed esiti su ARIEL e alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

SOLUZIONE PREREQUISITI

a) Il vettore s si può calcolare per componenti:

$$\begin{aligned}\vec{s} &= (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \\ &= (+3-3-2)\vec{i} + (2+3+1)\vec{j} \\ &= -2\vec{i} + 6\vec{j}\end{aligned}$$

I moduli di s e F valgono:

$$\begin{aligned}|\vec{s}| &= \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = 6.3 \\ |\vec{F}| &= \sqrt{(4)^2 + 3^2} = 5\end{aligned}$$

b) Il prodotto scalare si può calcolare per componenti:

$$\begin{aligned}L &= \vec{F} \cdot \vec{s} \\ &= F_x s_x + F_y s_y = 10\end{aligned}$$

L'angolo tra F e s si ottiene dalla definizione di prodotto scalare:

$$\begin{aligned}L &= \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| |\vec{s}| \cos \theta \\ \cos \theta &= L / |\vec{F}| |\vec{s}| = 0.32 \\ \theta &= \arccos(0.32) = 1.25 \text{ rad} = 71.6^\circ\end{aligned}$$

SOLUZIONE MECCANICA

- a) La velocità del corpo 1 alla base del piano inclinato si ricava dal principio di conservazione dell'energia, tenendo conto del fatto che in cima al piano il corpo è fermo. Indicando con h_0 ($=0$) la quota relativa al piano orizzontale e con h_1 la cima del piano inclinato, abbiamo:

$$m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + m g h_0$$

$$v_1^2 = 2g(h_1 - h_0) \Rightarrow v_1 = \sqrt{2 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{m}} = 6.26 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dalla base del piano inclinato, il corpo m_1 procede lungo il tratto orizzontale L , liscio, pertanto la sua energia cinetica non cambierà e la sua velocità all'istante prima dell'urto rimarrà uguale a v_1 . Essendo l'urto completamente anelastico, la quantità di moto del sistema si conserverà e da questa si potrà ricavare la velocità dei due corpi (uniti in un solo corpo) dopo l'urto:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) \cdot v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{0.1 \text{kg}}{0.13 \text{kg}} 6.26 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4.82 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- b) Nel caso in cui il piano orizzontale eserciti attrito sul corpo m_1 , in movimento, la velocità v_{1b} prima dell'urto col corpo m_2 può essere calcolata considerando il teorema lavoro-energia cinetica, dove l'unica forza che compie lavoro è la forza di attrito F_{att} , che diminuisce l'energia cinetica del corpo m_1 :

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - F_{\text{att}} \cdot l = \frac{1}{2} m_1 v_{1b}^2$$

$$v_{1b} = \sqrt{v_1^2 - \frac{2 \cdot F \cdot l}{m_1}} = \sqrt{\left(6.26 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \frac{2 \cdot 1.3 \text{N} \cdot 0.5 \text{m}}{0.1 \text{kg}}} = 5.12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La velocità dei due corpi dopo l'urto si ottiene nuovamente dalla conservazione della quantità di moto:

$$m_1 v_{1b} = (m_1 + m_2) \cdot v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1b} = \frac{0.1 \text{kg}}{0.13 \text{kg}} 5.12 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3.94 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

SOLUZIONE FLUIDI

a) La sfera galleggia, cioè è in equilibrio. Possiamo quindi scrivere:

$$F_p = S$$

dove F_p ed S sono rispettivamente la forza peso e la spinta di Archimede, le due forze agenti sulla sfera. Esplicitando queste ultime:

$$\rho_{sf} V g = \rho_{H2O} \frac{2}{3} V g$$

E quindi:

$$\rho_{sf} = \frac{2}{3} \rho_{H2O} = \frac{2}{3} 1000 \frac{kg}{m^3} = 666.6 \frac{kg}{m^3}$$

Per poter immergere completamente la sfera in acqua è necessario applicare una forza esterna. Poniamoci nella condizione in cui la sfera, sotto l'azione della forza peso, della forza esterna e della spinta di Archimede, è all'equilibrio completamente immersa in acqua:

$$F_{ext} + F_p = S$$

$$F_{ext} + \rho_{sf} V g = \rho_{H2O} V g$$

$$F_{ext} = V g (\rho_{H2O} - \rho_{sf}) = \frac{1}{3} V g \rho_{H2O} = 6.5 N$$

b) Per poter calcolare il volume della cavità sferica, e quindi il raggio, consideriamo la differenza di forza peso tra la sfera con cavità e quella senza cavità.

$$\Delta F_p = \rho_{sf} V g - \rho_{sf} (V - V_{cavità}) g$$

$$\Delta F_p = \rho_{sf} V g - \rho_{sf} V g + \rho_{sf} V_{cavità} g$$

$$\Delta F_p = \rho_{sf} V_{cavità} g$$

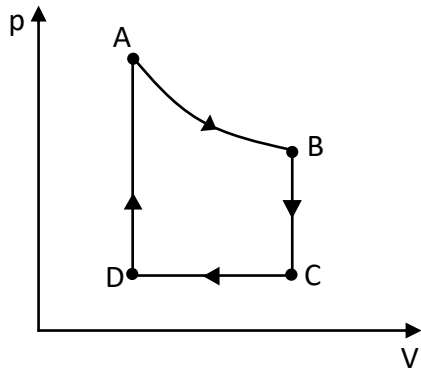
$$V_{cavità} = \frac{\Delta F_p}{\rho_{sf} g} = 3.06 \cdot 10^{-4}$$

Dall'informazione sul volume ricaviamo subito il raggio della cavità:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 V}{4 \pi}} = 0.04 \text{ m}$$

SOLUZIONE TERMODINAMICA

a)



Calcoliamo le coordinate termodinamiche, considerando la legge dei gas perfetti $pV = nRT$.

Stato A:

$$p_A = 6 \text{ atm} = 6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_A = 0.5 \text{ l} = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = 18 \text{ K}$$

Stato B:

$T_B = T_A = 18 \text{ K}$ poichè la trasformazione $A \rightarrow B$ è isoterma

$$V_B = 2V_A = 1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$p_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{nRT_A}{2V_A} = \frac{1}{2}p_A = 3 \text{ atm} = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Stato C:

$$p_C = \frac{1}{2}p_B = 1.5 \text{ atm} = 1.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$V_C = V_B = 1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3$ poichè la trasformazione $B \rightarrow C$ è isocora

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{\frac{1}{2}p_B V_B}{nR} = \frac{1}{2}T_B = 9 \text{ K}$$

Stato D:

$$p_D = p_C = 1.5 \text{ atm} = 1.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_D = V_A = 0.5 \text{ l} = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_D = \frac{p_D V_D}{nR} = \frac{1}{4}T_A = 4.5 \text{ K}$$

b) Calcoliamo il lavoro compiuto dal gas per ogni ramo della trasformazione termodinamica:

$$L_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p \, dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} \, dV = nRT_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{1}{V} \, dV = nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nRT_A \ln(2) = 206J$$

$$L_{BC} = 0J$$

$$L_{CD} = p_C(V_D - V_C) = -75J$$

$$L_{DA} = 0J$$

Il lavoro totale compiuto dal gas:

$$L_{tot} = 206J - 75J = 131J$$

Calcoliamo la variazione di energia interna per ogni ramo della trasformazione termodinamica (ricordiamoci che stiamo parlando di un gas biatomico quindi $c_V = (5/2)R$):

$$\Delta E_{AB} = nc_V(T_B - T_A) = 0J$$

$$\Delta E_{BC} = nc_V(T_C - T_B) = -374J$$

$$\Delta E_{CD} = nc_V(T_D - T_C) = -187J$$

$$\Delta E_{DA} = nc_V(T_A - T_D) = 561J$$

La variazione di energia interna dell'intero ciclo è :

$$\Delta E_{tot} = 0J$$

c) Il rendimento è definito come il rapporto tra il lavoro totale svolto ed il calore Q assorbito, pari alla somma dei soli calori positivi). Valutiamo quindi i calori scambiati nelle singole trasformazioni:

A→B isoterma: $Q_{AB} = L_{AB} = 206 \, J > 0$

B→C isocora: $Q_{BC} = \Delta E_{BC} < 0$

C→D isobara: $Q_{CD} = \Delta E_{CD} + L_{CD} < 0$

D→A isocora: $Q_{DA} = \Delta E_{DA} = 561 \, J > 0$

Il rendimento è quindi pari a

$$\varepsilon = L/(Q_{AB} + Q_{DA}) = 131/(206+561) = 0.17 = 17\%$$