

APPELLO - FISICA I per SCIENZE GEOLOGICHE
A.A. 2019/2020, 12 novembre 2020

ESERCIZIO 1 – PREREQUISITI

In un piano cartesiano ortogonale XY siano dati i vettori $\vec{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ e il vettore $\vec{w} = -2\vec{v}$. Dopo aver disegnato nel piano i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, determinare:

- a) il vettore $\vec{s} = \vec{v} + \vec{w}$ in modulo, direzione e verso e rappresentarlo nel piano cartesiano;
- b) l'angolo θ compreso tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$ utilizzando la definizione di prodotto scalare.

ESERCIZIO 2 – MECCANICA

Un corpo di massa $m = 0.2 \text{ kg}$ percorre un tratto rettilineo con velocità costante $v = 10 \text{ m/s}$, prima di incontrare un piano inclinato di $\theta = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale lungo $L = 10 \text{ m}$. Sulla sommità di esso è posta una molla di costante elastica $k = 500 \text{ N/m}$ che arresta completamente il moto del corpo. Determinare:

- a) l'accelerazione $\vec{a}$ lungo il tratto rettilineo e la distanza d percorsa lungo il piano inclinato dopo $t = 0.8 \text{ s}$;
- b) la massima compressione Δx della molla;
- c) FACOLTATIVO: calcolare quale velocità v' avrebbe dovuto avere il corpo per causare una compressione della molla pari a $\Delta x' = 20 \text{ cm}$.

ESERCIZIO 3 – FLUIDI

In un tubo di sezione costante scorre un fluido stazionario e irrotazionale da un'altezza $h = 50 \text{ m}$ fino al suolo. La pressione P_1 del fluido sulla sommità è pari alla pressione atmosferica mentre quella al suolo vale $P_2 = 10 \text{ atm}$. Sapendo che il fluido esce dal tubo con velocità $v_2 = 2 \text{ m/s}$, calcolare:

- a) la velocità v_1 del fluido sulla sommità;
- b) la densità ρ del fluido specificando se è superiore o inferiore a quella dell'acqua.

ESERCIZIO 4 – TERMODINAMICA

Tre moli di un gas perfetto **monoatomico** compiono un ciclo termodinamico composto dalle seguenti trasformazioni:

A $\rightarrow$ B: **isoterma** dallo stato A a pressione $P_A = 1 \text{ atm}$ e volume $V_A = 1 \text{ dm}^3$, allo stato B a pressione $P_B = 1/2 P_A$;

B $\rightarrow$ C: **isocora** dallo stato B allo stato C a pressione $P_C = 2 P_A$;

C $\rightarrow$ A: trasformazione in cui la pressione varia **linearmente** con il volume.

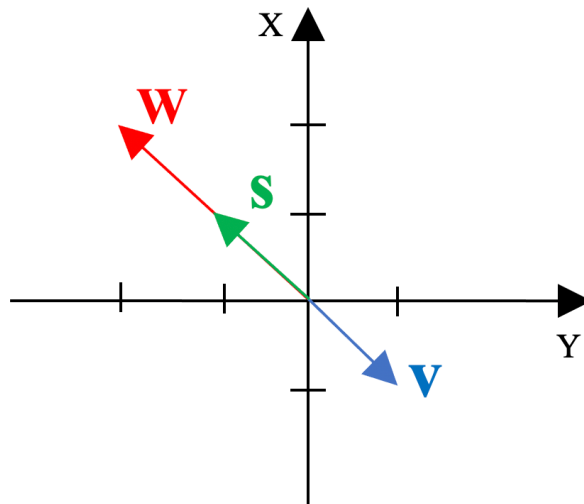
Dopo aver **rappresentato** le trasformazioni in un piano PV, determinare:

- a) le **coordinate** termodinamiche degli stati A, B e C;
- b) il calore scambiato Q e il lavoro compiuto L per ciascuna trasformazione e la variazione di energia interna ΔE_{int} per l'intero ciclo.

[N.B. $R=8.31 \text{ J/molK}$]

SCRIVERE IN MODO CHIARO. GIUSTIFICARE I PROCEDIMENTI. SOSTITUIRE I VALORI NUMERICI SOLO ALLA FINE. NON SCORDARE LE UNITA' DI MISURA. Testi, soluzioni ed esiti alla pagina: www.mi.infn.it/~sleoni

SOLUZIONE 1 – PREREQUISITI



a) Il vettore $\vec{w}$ ha coordinate

$$\vec{w} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

Il vettore somma $\vec{s}$ è dato da

$$\vec{s} = \vec{v} + \vec{w} = (1 - 2)\mathbf{i} + (-1 + 2)\mathbf{j} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

il cui modulo vale

$$|\vec{s}| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

b) Il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$ è dato da

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 = -4$$

Dalla definizione di prodotto scalare

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \theta$$

si ottiene

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|}\right)$$

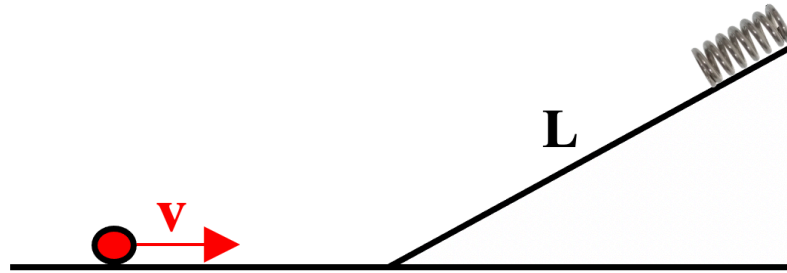
dove

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \\ |\vec{w}| &= \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Pertanto

$$\theta = \arccos\left(\frac{-4}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{-4}{4}\right) = \arccos(-1) = 180^\circ$$

SOLUZIONE 2 – MECCANICA



- a) Sul tratto rettilineo il moto è uniforme, pertanto $\vec{a} = \mathbf{0}$.

Lungo il piano inclinato il corpo è soggetto invece ad un'accelerazione (in modulo)

$$a = g \sin \theta = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.5 = 4.9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Dalla legge oraria

$$d = vt - \frac{1}{2} g \sin \theta t^2$$

si ricava

$$d = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0.8 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.5 \cdot 0.64 \text{ s}^2 = 6.4 \text{ m}$$

- b) Dalla conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgh + \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

dove

$$h = L \sin \theta$$

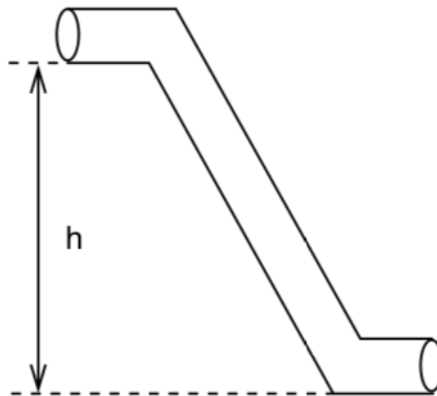
si ottiene

$$\Delta x = \sqrt{\frac{m}{k} (v^2 - 2gL \sin \theta)} = \sqrt{\frac{0.2 \text{ kg}}{500 \frac{\text{N}}{\text{m}}} \left(100 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 2 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m} \cdot 0.5 \right)} = 0.03 \text{ m}$$

- c) FACOLTATIVO: utilizzando nuovamente l'equazione che esprime la conservazione dell'energia meccanica si ricava

$$v' = \sqrt{2gh + \frac{k}{m} \Delta x'^2} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m} \cdot 0.5 + \frac{500 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{0.2 \text{ kg}} \cdot 0.04 \text{ m}^2} = 14.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

SOLUZIONE 3 – FLUIDI



- a) Dall'equazione di continuità si ha

$$v_1 A_1 = v_2 A_2.$$

Poiché la sezione della condotta è costante $A_1 = A_2$, risulta

$$v_1 = v_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- b) Utilizzando l'equazione di Bernoulli

$$\frac{1}{2} \rho v_2 + P_2 = \frac{1}{2} \rho v_1 + P_1 + \rho g h$$

e considerando che $v_1 = v_2$, risulta

$$\rho = \frac{P_2 - P_1}{g h} = \frac{(10 - 1) \text{ atm}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 50 \text{ m}} = \frac{9 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 50 \text{ m}} = 1837 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Il fluido ha densità maggiore dell'acqua, essendo quest'ultima $\sim 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

SOLUZIONE 4 – TERMODINAMICA

- a) Le coordinate termodinamiche si ottengono dall'equazione dei gas perfetti $PV = nRT$:

STATO A:

$$P_A = 1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_A = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = \frac{101325 \text{ Pa} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{3 \cdot 8.31 \text{ J/Kmol}} = 4 \text{ K}$$

STATO B:

$$P_B = \frac{1}{2} P_A = 0.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_B = T_A = 4 \text{ K}$$

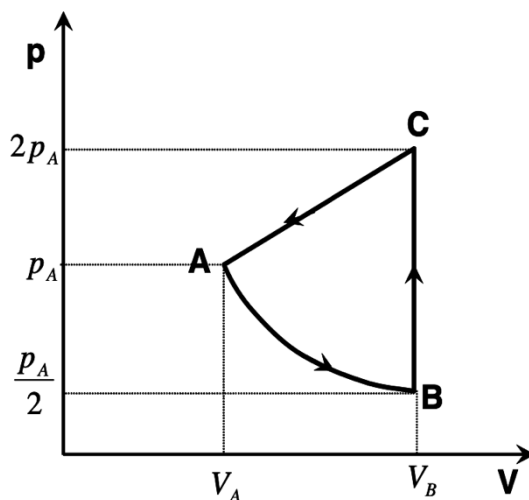
$$V_B = \frac{nRT_B}{P_B} = \frac{3 \cdot 8.31 \text{ J/Kmol} \cdot 4 \text{ K}}{0.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

STATO C:

$$P_C = 2 P_A = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_C = V_B = 1 \text{ dm}^3 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = \frac{2 P_A 2 V_A}{nR} = 4 T_A = 16 \text{ K}$$



- b) Utilizzando le definizioni di calore scambiato e lavoro compiuto e il primo principio della termodinamica $\Delta E_{\text{int}} = Q - L$ si ottiene:

A → B: isoterma

$$L_{AB} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = 3 \cdot 8.31 \text{ J/Kmol} \cdot 4 \text{ K} \cdot \ln 2 = 69 \text{ J}$$

$$\Delta E_{AB} = 0 \text{ J}$$

$$Q_{AB} = L_{AB} = 69 \text{ J}$$

B → C: isocora

$$L_{BC} = 0 \text{ J}$$

$$\Delta E_{BC} = n c_V \Delta T_{BC} = 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8.31 \frac{\text{J}}{\text{Kmol}} \cdot (16 - 4) \text{ K} = 448.7 \text{ J}$$

$$Q_{BC} = \Delta E_{BC} = 448.7 \text{ J}$$

C → A: trasformazione lineare

$$L_{CA} = \frac{1}{2} (P_A + P_C) (V_A - V_B) = -\frac{3}{2} P_A V_A = -\frac{3}{2} \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = -150 \text{ J}$$

$$\Delta E_{CA} = n c_V \Delta T_{CA} = -\Delta E_{BC} = -448.7 \text{ J}$$

$$Q_{CA} = \Delta E_{CA} + L_{CA} = -448.7 \text{ J} - 150 \text{ J} = -598.7 \text{ J}$$

Per l'intero ciclo $\Delta E_{\text{int}} = 0$ poiché $\Delta E_{\text{int}} \propto \Delta T$ e $\Delta T = 0$ essendo coincidenti il punto iniziale e quello finale.