
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 16

24.11.2025

Universalità

Decadimento del leptone $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$

Decadimento $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$

Decadimento $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau$

anno accademico 2025-2026

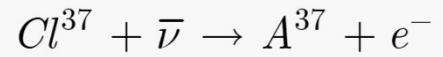
Il neutrino

- Abbiamo visto che la forma $V-A$ della interazione implica
 - Che i fermioni siano sempre left-handed
 - Che gli antifermioni siano sempre right-handed
- Dal momento che la massa del neutrino è nulla, una volta prodotto con una data polarizzazione questa sarà mantenuta per sempre
 - La velocità del neutrino è c l'elicità è la stessa in ogni sistema di riferimento
- Inoltre il neutrino interagisce solo per interazione debole e quindi solo se è left-handed
 - È legittimo quindi chiedersi se il neutrino right-handed esista o meno
 - Stesso discorso per l'antineutrino left-handed
- L'equazione di Dirac descrive i fermioni con una funzione a 4 componenti
 - 2 componenti per i due stati di polarizzazione della particella
 - 2 componenti per i due stati di polarizzazione dell'antiparticella
 - Dal momento che il neutrino e l'antineutrino necessitano di un solo stato di polarizzazione, lo spinore di Dirac per il neutrino è ridondante
 - Date le due proiezioni chirali u_L e u_R è possibile che u_R sia l'antineutrino ?
 - In questo caso particella e antiparticella coinciderebbero

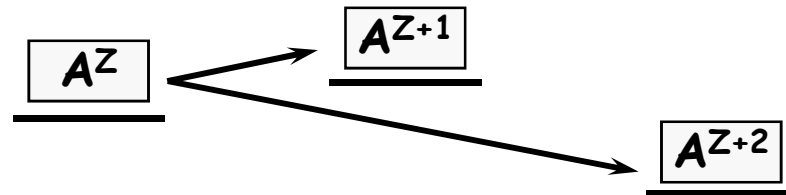


Il neutrino

- Se il neutrino e l'antineutrino fossero la stessa particella allora dovrebbe esistere la reazione



- Questa transizione è stata cercata utilizzando gli antineutrini prodotti da un reattore
 - La ricerca condotta da Davis ha portato a risultati negativi
- Altre possibilità di verifica sono offerte dal cosiddetto decadimento doppio β
- Se esistono 3 stati nucleari isobarici nelle relazioni di massa indicate



- Allora non è permesso energeticamente il decadimento

$$A^Z \not\rightarrow A^{Z+1} + e^{-} + \bar{\nu}$$

- Avviene invece la transizione del secondo ordine (molto rara) in cui due neutroni decadono

$$A^Z \rightarrow A^{Z+2} + e^{-} + \bar{\nu} + e^{-} + \bar{\nu}$$

Il neutrino

- Se però non esistesse distinzione fra il neutrino e l'antineutrino
 - Allora sarebbe possibile la reazione

$$A^Z \rightarrow A^{Z+1} + e^- + \nu \quad A^{Z+1} + \nu \rightarrow A^{Z+2} + e^-$$

- Lo stato intermedio è virtuale.
- La reazione completa sarebbe

$$A^Z \rightarrow A^{Z+2} + e^- + e^-$$

- Il decadimento con due neutrini è stato osservato
- Il decadimento senza neutrini non è mai stato osservato
 - Il neutrino e l'antineutrino sono pertanto distinti
- Se il decadimento doppio β venisse osservato occorrerebbe descrivere il neutrino con uno spinore di Majorana
 - Un formalismo che non distingue fra particelle e antiparticelle
 - Si ottiene con opportune combinazioni di operatori di creazione e distruzione di particelle e antiparticelle

Universalità

- Nel 1935 Yukawa predisse l'esistenza di una particella con massa dell'ordine di 100 MeV che doveva essere il quanto dell'interazione forte
 - Una particella di massa simile fu scoperta nel 1938 da Neddermeyer e Anderson nello studio dei raggi cosmici
- Nel 1945 Conversi, Pancini e Piccioni giunsero alla conclusione che la particella non poteva essere il quanto della interazione forte
 - Nel 1947 Muirhead, Lattes e Occhialini scoprirono la catena di decadimento

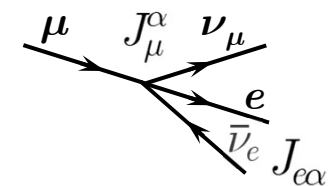
$$\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$$

- Nel 1949 Steinberger scoprì che il muone decade in 3 particelle leggere
 - Oggi sappiamo che

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

- Da questo momento in poi nasce l'idea che l'interazione di Fermi possa spiegare molti decadimenti
 - In particolare, il decadimento del muone può essere spiegato con il diagramma
 - Vale a dire in modo analogo al decadimento β tramite l'interazione delle correnti dell'elettrone e del muone

Universalità



Universalità

- Occorre pertanto introdurre una corrente per il muone analoga a quella dell'elettrone

$$\hat{J}^\alpha(e) = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e} \qquad \hat{J}^\alpha(\mu) = \bar{\psi}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_\mu}$$

- La corrente leptonica totale diventa

$$\hat{L}^\alpha = \hat{J}^\alpha(e) + \hat{J}^\alpha(\mu)$$

- Analogamente a quanto già visto la corrente $J^\alpha(\mu)$
 - Crea un muone μ^- o distrugge un antimuone μ^+ con il campo $\bar{\psi}_\mu$
 - Distrugge un neutrino ν_μ o crea un antineutrino $\bar{\nu}_\mu$ con il campo ψ_{ν_μ}
- Per descrivere la reazione $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ dobbiamo
 - Distruggere un muone e creare un neutrino
 - Abbiamo bisogno della corrente $(J^\alpha(\mu))^\dagger$

- Possiamo pertanto scrivere l'Hamiltoniana di interazione come

$$\mathcal{H}' = \frac{G_\mu}{\sqrt{2}} L_\alpha^\dagger L^\alpha$$

- Gli operatori necessari per l'elemento di matrice vengono automaticamente selezionati dagli stati iniziale e finale (a meno di costanti di normalizzazione e spinori)

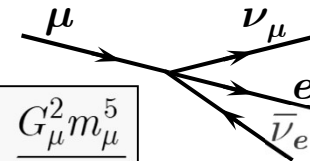
$$|i\rangle = |\mu^-\rangle = a_\mu^\dagger |0\rangle \qquad |f\rangle = |e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e\rangle = a_e^\dagger a_{\nu_\mu}^\dagger b_{\nu_e}^\dagger |0\rangle$$

Il decadimento del leptone μ

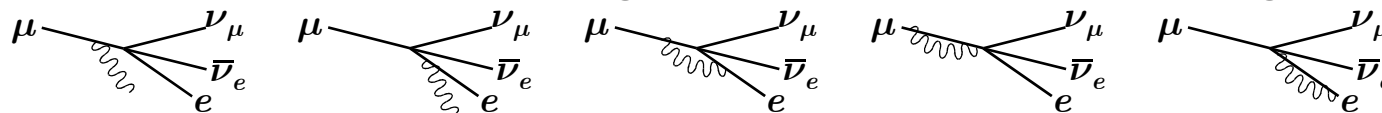
- Il decadimento del muone è descritto dal diagramma

- La vita media può essere calcolata con le stesse tecniche utilizzate per il calcolo della vita media del neutrone (si può assumere $m_e = 0$)

$$\Gamma = \frac{1}{\tau_\mu} = \frac{G_\mu^2 m_\mu^5}{192\pi^3}$$



- La misura della vita media del leptone μ è molto precisa e permette pertanto una determinazione molto accurata della costante di accoppiamento
 - Per distinguersela da quella ricavata dal decadimento β la chiamiamo G_μ
- Per poter trarre beneficio della precisione della misura sperimentale occorre tenere conto delle correzioni radiative elettromagnetiche
- Le correzioni radiative elettromagnetiche sono descritte dai diagrammi



- Tenendo conto di correzioni $O(\alpha^2)$ e con $m_e \neq 0$ si ottiene[†]

$$\frac{1}{\tau_\mu} = \frac{G_\mu^2 m_\mu^5}{192\pi^3} f\left(\frac{m_e^2}{m_\mu^2}\right) \left[1 + \frac{\alpha(m_\mu^2)}{2\pi} \left(\frac{25}{4} - \pi^2 \right) \right]$$

$$G_\mu = 1.16637 \pm 0.00001 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

$$G_\beta = 1.13578 \pm 0.00027 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

- La quasi identità fra G_μ e G_β è una forte indicazione che la stessa interazione descrive i decadimenti del neutrone n e del muone μ

- [†] Erler, Langacker PDG 2006 J. Phys. G 33 pag. 120

Universalità

- Altri processi che possono essere spiegati con estensioni dell'Hamiltoniana del decadimento β che abbiamo studiato

- Decadimenti e urti completamente leptonici

$$\begin{aligned}\mu^- &\rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e & \tau^- &\rightarrow e^- + \nu_\tau + \bar{\nu}_e & \nu_e + e^- &\rightarrow \nu_e + e^- \\ \tau^- &\rightarrow \mu^- + \nu_\tau + \bar{\nu}_\mu\end{aligned}$$

- Decadimenti e urti semi-leptonici senza variazione di Stranezza

$$\begin{aligned}n &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e & \pi^- &\rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e & \pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ \Sigma^\pm &\rightarrow \Lambda + l^\pm + \nu_l & \nu_\mu + N &\rightarrow \mu^- + X & \tau^- &\rightarrow \pi^- + \nu_\tau\end{aligned}$$

- Decadimenti semi-leptonici con variazione di Stranezza

$$K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad K^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e \quad \Lambda^0 \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

- Decadimenti totalmente adronici con variazione di Stranezza

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^- \quad \Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0 \quad K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

- Tutti questi decadimenti sono stati studiati con successo e hanno confermato la validità della interazione fra le due correnti

La corrente adronica

- Nello studio del decadimento beta abbiamo utilizzato l'operatore corrente adronica

$$\hat{J}^\mu(h) = \bar{\hat{\psi}}_n \gamma^\mu (1 - \kappa \gamma^5) \hat{\psi}_p$$

- Ne abbiamo calcolato l'elemento di matrice fra due stati (il neutrone iniziale e il protone finale)
- Abbiamo inoltre notato che il fattore κ diverso da 1 è dovuto al fatto che gli adroni non sono puntiformi
 - Pertanto occorre tenere conto dell'interazione forte
- Nello studio delle correnti degli adroni risulta conveniente utilizzare una corrente $\hat{\mathcal{J}}^\mu$ generica (non definita esplicitamente)
 - È un operatore vettoriale (nel senso di Lorentz)
 - Dagli esperimenti abbiamo visto che deve avere una parte vettoriale e una assiale

$$\hat{\mathcal{J}}^\mu = \hat{V}^\mu + \hat{A}^\mu$$

- Gli esperimenti ci dicono quali regole di selezione deve riprodurre

La corrente adronica

- Per il calcolo delle quantità osservabili occorre calcolare l'elemento di matrice dell'operatore fra stati di particelle
 - Ad esempio, nel caso del decadimento β del neutrone si ha

$$\left\langle p, k_p, s_p \mid \hat{\mathcal{J}}^\mu \mid n, k_n, s_n \right\rangle = F^\mu(k_p, s_p, k_n, s_n)$$

- Le funzioni F^μ sono un insieme di c-numbers (non sono operatori)
- A seconda del tipo di accoppiamento ipotizzato le funzioni F^μ hanno uno (o più, o zero) indici di Lorentz
 - In dipendenza dalla natura degli stati (iniziale e finale) le funzioni F^μ hanno come argomenti 4-momenti e variabili di spin
- Complessivamente hanno ben precise proprietà di trasformazione per trasformazioni di Lorentz
- Utilizzando le proprietà di invarianza (di Lorentz) e le regole di selezione si può scrivere la forma più generale dell'elemento di matrice e confrontarlo con i dati sperimentali per determinare le parti incognite (ad esempio l'origine del fattore $\kappa \approx 1.26$)
- Spieghiamo meglio con un esempio: il decadimento $\pi^- \rightarrow l^- \nu_l$

Il decadimento $\pi^- \rightarrow l^- \nu_l$

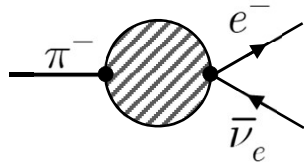
- Il mesone π predetto da Yukawa e scoperto da Neddermeyer e Anderson è l'adrone più leggero
- Non può decadere tramite interazione forte
- Decade tramite interazione debole

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

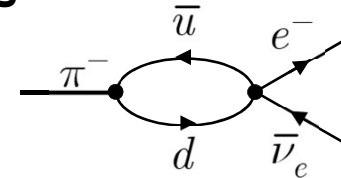
$$\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\pi^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$$

- Il decadimento è rappresentato schematicamente dal diagramma



Nell'ambito del modello a quark
il pione è uno stato legato



- Nel diagramma con i quark
 - Non è nota la struttura dello stato legato
 - I quark interagiscono tramite gluoni (QCD): non trattabile perturbativamente
- Si ipotizza una interazione corrente-corrente fra la corrente leptonica e la generica corrente adronica $\mathcal{J}^\mu$

$$\mathcal{H}' = \frac{G}{\sqrt{2}} (\mathcal{J}^\mu)^\dagger L_\mu$$

- Lo stato iniziale e lo stato finale sono $|i\rangle = |\pi^-\rangle$ $|f\rangle = |l^- \bar{\nu}_l\rangle$

Il decadimento $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$

- L'elemento di matrice è $\langle f | \mathcal{H}' | i \rangle = \langle l^- \bar{\nu}_l | \mathcal{H}' | \pi^- \rangle$
 - Per gli adroni si passa da uno stato con un pione allo stato vuoto
 - Nel caso del decadimento β si passa dal neutrone al protone
 - Per i leptoni, come nel caso del decadimento β si passa da uno stato vuoto allo stato con due leptoni
- Si può procedere come nel caso del decadimento β per giungere alla seguente espressione per l'ampiezza

$$\mathfrak{M} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \langle 0 | \mathcal{J}^\mu(0) | \pi^- \rangle \langle l^- \bar{\nu}_l | L_\mu(0) | 0 \rangle$$

- La parte leptonica è identica a quanto visto per il decadimento β

$$\langle l^- \bar{\nu}_l | L^\mu(0) | 0 \rangle = \bar{u}_l(k_l) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v_\nu(k_\nu)$$
- Consideriamo la parte adronica
 - Deve essere proporzionale a p^μ , il 4-momento del pione $\langle 0 | \mathcal{J}^\mu(0) | \pi^- \rangle = f p^\mu$
 - La costante di proporzionalità f deve essere una funzione invariante
 - Può dipendere solo da quantità invarianti: $p^2 = m^2$
- Pertanto $f(p^2) = f_\pi$ è una costante

$$\langle 0 | \mathcal{J}^\mu(0) | \pi^- \rangle = f_\pi p^\mu$$

Il decadimento $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$

$$\langle 0 | \mathcal{J}^\mu(0) | \pi^- \rangle = f_\pi p^\mu$$

- Per la conservazione del 4-momento totale abbiamo $p^\mu = k_l^\mu + k_\nu^\mu$
- La quantità f_π è una costante che dipende dalla natura del mesone che decade e ha le dimensioni di una energia
- L'elemento di matrice diventa pertanto

$$\mathfrak{M} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} f_\pi \bar{u}_l(k_l) p^\mu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v_\nu(k_\nu) \quad p^\mu \gamma_\mu = \not{p} = \not{k}_l + \not{k}_\nu$$

- Si può ulteriormente semplificare ricordando che

$$\begin{aligned} (\not{k} - m)u &= 0 \\ \bar{u}(\not{k} - m) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\not{k} + m)v &= 0 \\ \bar{v}(\not{k} + m) &= 0 \end{aligned}$$

- Pertanto

$$\mathfrak{M} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} f_\pi \underbrace{\bar{u}_l(k_l)}_{m_l \bar{u}_l} (\not{k}_l + \not{k}_\nu) \underbrace{(1 - \gamma^5)}_{\not{k}_\nu v_\nu = 0} v_\nu(k_\nu) = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} f_\pi \underbrace{m_l}_{\uparrow} \bar{u}_l(k_l) (1 - \gamma^5) v_\nu(k_\nu)$$

Il decadimento $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$

$$\mathfrak{M} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} f_\pi m_l \bar{u}_l(k_l)(1 - \gamma^5) v_\nu(k_\nu)$$

- Il modulo quadrato sommato sulle polarizzazioni dello stato finale si ottiene con le usuali tracce

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{G_\beta^2}{2} f_\pi^2 m_l^2 \text{Tr}[(\not{k}_l + m_l)(1 - \gamma^5) \not{k}_\nu (1 + \gamma^5)]$$

- La traccia si calcola facilmente

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\not{k}_l + m_l)(1 - \gamma^5) \not{k}_\nu (1 + \gamma^5)] &= \text{Tr}[(\not{k}_l + m_l)(1 - \gamma^5)^2 \not{k}_\nu] \\ &= 2\text{Tr}[(\not{k}_l + m_l)(1 - \gamma^5) \not{k}_\nu] = 2\text{Tr}[\not{k}_l \not{k}_\nu] = 8k_l \cdot k_\nu \end{aligned}$$

- Si ha inoltre

$$m_\pi^2 = p^2 = (k_l + k_\nu)^2 = k_l^2 + 2k_l \cdot k_\nu + \cancel{k_\nu^2} \quad k_l \cdot k_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2}$$

- In conclusione

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = 2G_\beta^2 f_\pi^2 m_l^2 (m_\pi^2 - m_l^2)$$

$$k_\nu^2 = m_\nu^2 = 0$$

Il decadimento $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = 2G_\beta^2 f_\pi^2 m_l^2 (m_\pi^2 - m_l^2)$$

- Notiamo che l'elemento di matrice è costante, come ci si poteva attendere
- La larghezza di decadimento è

$$\Gamma = \int \frac{|\overline{\mathfrak{M}}|^2}{2m_\pi} d\Phi_2 = \frac{|\overline{\mathfrak{M}}|^2}{2m_\pi} \int d\Phi_2$$

- Ricordiamo lo spazio delle fasi per uno stato finale di due particelle nel c.m. del π (vedi diapositiva [277](#))

$$d\Phi_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \delta(W_i - W_f) \frac{|\mathbf{p}_f|}{W_f} dW_f d\Omega \quad |\mathbf{p}_f| = \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi} \quad W_f = m_\pi$$

- L'integrale è banale

$$\int d\Phi_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \int \delta(W_i - W_f) \frac{|\mathbf{p}_f|}{W_f} dW_f d\Omega = \frac{1}{(4\pi)^2} \int \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi} \frac{1}{m_\pi} d\Omega$$

$$\int d\Phi_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi^2}$$

- Più grande per $l = e$
- Più piccolo per $l = \mu$

Il decadimento $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$

- In definitiva otteniamo per la larghezza di decadimento

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{|\mathfrak{M}|^2}{2m_\pi} \int d\Phi_2 \quad \Gamma = \frac{1}{2m_\pi} 2G_\beta^2 f_\pi^2 m_l^2 (m_\pi^2 - m_l^2) \frac{1}{4\pi} \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi^2}$$

$$\Gamma = \frac{G_\beta^2}{8\pi} f_\pi^2 m_l^2 m_\pi \left(1 - \frac{m_l^2}{m_\pi^2}\right)^2$$

- Il pione decade circa nel 100% dei casi in muone ed ha una vita media

$$\tau = 2.6033 \pm 0.0005 \times 10^{-8} \text{ s}$$

- Da questo valore si può ricavare il parametro fenomenologico[†] f_π

$$f_\pi = 130.7 \pm 0.1 \text{ MeV}$$

[†]M. Suzuki, PDG 2006, J. Phys. G 33 pag. 535

Il decadimento $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$

$$\Gamma = \frac{G_\beta^2}{8\pi} f_\pi^2 \cancel{m_l^2} m_\pi \left(1 - \frac{m_l^2}{m_\pi^2} \right)^2$$

- Il decadimento in elettrone è molto raro
 - La misura della frazione di decadimento dà

$$\frac{\Gamma(\pi \rightarrow e\nu)}{\Gamma(\pi \rightarrow \mu\nu)} = 1.230 \pm 0.004 \times 10^{-4}$$

- Va confrontata con il risultato del nostro calcolo

$$R = \frac{\Gamma(\pi \rightarrow e\nu)}{\Gamma(\pi \rightarrow \mu\nu)} = \frac{m_e^2 (m_\pi^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} \quad R = 1.283 \times 10^{-4}$$

- Vediamo che il nostro calcolo riproduce "bene" il valore sperimentale
- L'ingrediente chiave è la massa del leptone la cui origine è dovuta all'accoppiamento di tipo vettoriale (γ^μ oppure $\gamma^5 \gamma^\mu$)

Polarizzazione del leptone

- Come nel caso del decadimento β del neutrone è facile calcolare la polarizzazione del leptone carico nel decadimento del pione

$$|\overline{\mathfrak{M}}_{RL}|^2 = \frac{G_\beta^2}{2} f_\pi^2 m_l^2 \text{Tr} \left[(\not{k}_l + m_l) \frac{1 \pm \gamma^5 \not{s}_R}{2} (1 - \gamma^5) \not{k}_\nu (1 + \gamma^5) \right]$$

- Otteniamo pertanto

$$|\overline{\mathfrak{M}}_R|^2 - |\overline{\mathfrak{M}}_L|^2 = \frac{G_\beta^2}{2} f_\pi^2 m_l^2 \text{Tr} [(\not{k}_l + m_l) \gamma^5 \not{s}_R (1 - \gamma^5) \not{k}_\nu (1 + \gamma^5)]$$

- Si verifica facilmente che

$$\text{Tr} [(\not{k}_l + m_l) \gamma^5 \not{s}_R (1 - \gamma^5) \not{k}_\nu (1 + \gamma^5)] = 8m_l s_R \cdot k_\nu$$

- Il vettore di polarizzazione longitudinale del leptone è

- Dalla cinematica si ottiene facilmente

$$|\mathbf{k}_l| = \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi} \quad E_l = \frac{m_\pi^2 + m_l^2}{2m_\pi} \quad k_\nu = (|\mathbf{k}_l|, -\mathbf{k}_l) \quad k_\nu \cdot s_R = \frac{|\mathbf{k}_l|^2}{m_l} \left(1 + \frac{E_l}{|\mathbf{k}_l|} \right)$$

$$s_R = \left(\frac{|\mathbf{k}_l|}{m_l}, \frac{E_l}{m_l} \frac{\mathbf{k}_l}{|\mathbf{k}_l|} \right)$$

- Ricordiamo $|\overline{\mathfrak{M}}_R|^2 + |\overline{\mathfrak{M}}_L|^2 = |\overline{\mathfrak{M}}|^2 = 2G_\beta^2 f_\pi^2 m_l^2 (m_\pi^2 - m_l^2)$

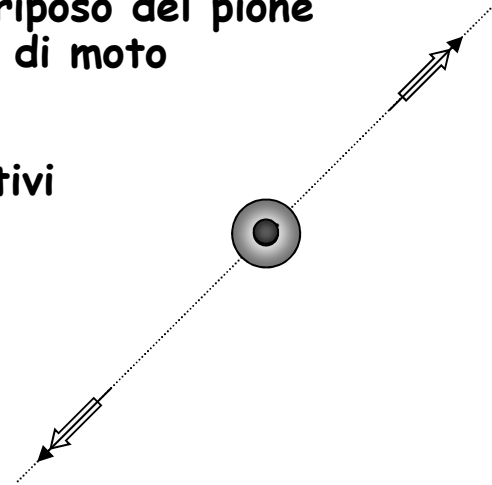
- In definitiva

$$\frac{|\overline{\mathfrak{M}}_R|^2 - |\overline{\mathfrak{M}}_L|^2}{|\overline{\mathfrak{M}}_R|^2 + |\overline{\mathfrak{M}}_L|^2} = \frac{2\mathbf{k}_l^2}{m_\pi^2 - m_l^2} \left(1 + \frac{E_l}{|\mathbf{k}_l|} \right) = 2 \frac{(m_\pi^2 - m_l^2)^2}{4m_\pi^2 (m_\pi^2 - m_l^2)} \frac{2m_\pi^2}{m_\pi^2 - m_l^2} = 1$$



Polarizzazione del leptone

- Il risultato precedente mostra che nel sistema di riposo del pione il leptone è polarizzato al 100% nella sua direzione di moto
 - La polarizzazione non è $-\beta$
- Questo risultato era prevedibile per i seguenti motivi
 - Il pione ha spin 0
 - L'antineutrino è right-handed
 - Per la conservazione del momento angolare anche il leptone carico è right-handed
- Questo spiega qualitativamente perché il decadimento in elettrone è molto più raro nonostante dovrebbe essere favorito per lo spazio delle fasi



$$\int d\Phi_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi^2} \quad \int d\Phi_2 = 0.04 \quad e^- \quad \int d\Phi_2 = 0.017 \quad \mu^-$$

- La conservazione del momento angolare obbliga il leptone a essere emesso con la polarizzazione "sbagliata" (rispetto a quella imposta dalla corrente V-A)
 - Per l'elettrone (che è molto più leggero e che ha un $\beta \approx 1$)
ciò è molto più difficile (probabilità $1-\beta$)
- Se il leptone avesse massa nulla il decadimento avrebbe larghezza nulla

Il decadimento del leptone τ : $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau$

- Mostriamo come il formalismo fin qui sviluppato può essere utilizzato anche per il calcolo della frazione di decadimento del leptone τ nel mesone π

- Osserviamo prima di tutto che per il calcolo della vita media o della larghezza totale occorrerebbe calcolare tutte le larghezze parziali

$$\tau^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l + \nu_\tau \quad \tau^- \rightarrow h^- + \nu_\tau \quad h = \pi, K, \rho, a_1 \quad \tau^- \rightarrow (n\pi)^- + \nu_\tau \dots\dots$$

- $\Gamma = \Gamma_{e\nu\nu} + \Gamma_{\mu\nu\nu} + \Gamma_{\pi\nu} + \dots + \Gamma_{K\nu}$ **Troppo lavoro ...**
- Calcoliamo solo la larghezza del decadimento in $\pi^- \nu_\tau$ e confrontiamola con la larghezza totale
- La larghezza totale può essere derivata dalla vita media
 - Dal risultato sperimentale $\tau = 290.6 \times 10^{-15}$ s ricaviamo

$$\Gamma(\tau \rightarrow all) = \frac{\hbar}{\tau} = \frac{6.582 \times 10^{-22} \text{ MeV s}}{290.6 \times 10^{-15} \text{ s}}$$

$$\Gamma(\tau \rightarrow all) = 2.265 \times 10^{-3} \text{ eV}$$

- Calcoliamo adesso la larghezza del decadimento $\pi^- \nu_\tau$
 - Il calcolo è identico a quello fatto per il decadimento del pione
 - Si utilizza l'Hamiltoniana

$$\mathcal{H}' = \frac{G}{\sqrt{2}} (\mathcal{J}^\mu)^\dagger J_\mu$$

Il decadimento del leptone τ : $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau$

- La corrente leptonica J^μ adesso contiene anche un termine per il leptone τ
 - Lo stato iniziale e lo stato finale sono rispettivamente

$$|\tau^-\rangle \quad |\pi^- \nu_\tau\rangle$$

- Notiamo in particolare che per quel che riguarda gli adroni si passa dallo stato vuoto allo stato con un pione
 - La situazione opposta a quella del decadimento del pione
- Scriviamo pertanto l'ampiezza di decadimento

$$\mathfrak{M} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \langle \pi^- | \mathfrak{J}^\mu(0) | 0 \rangle \langle \nu_\tau | J_\mu(0) | \tau^- \rangle$$

- L'elemento di matrice della parte adronica è il complesso coniugato di quello che avevamo nel decadimento del pione
 - Dato che era reale sono uguali

$$\langle \pi^- | \mathfrak{J}^\mu(0) | 0 \rangle = f_\pi q^\mu$$

- Il 4-vettore q^μ è il momento del pione $q^\mu = k_\tau^\mu - k_\nu^\mu$

Il decadimento del leptone τ : $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau$

- L'elemento di matrice della parte leptonica è

$$\langle \nu_\tau | J^\mu(0) | \tau^- \rangle = \bar{u}_\nu(k_\nu) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u_\tau(k_\tau)$$

- Per finire l'ampiezza è

$$\mathfrak{M} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} f_\pi \bar{u}_\nu(k_\nu) q^\mu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u_\tau(k_\tau)$$

- Sostituendo $q^\mu = k_\tau^\mu - k_\nu^\mu$

$$\mathfrak{M} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} f_\pi \bar{u}_\nu(k_\nu) (\not{k}_\tau - \not{k}_\nu) (1 - \gamma^5) u_\tau(k_\tau) = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} f_\pi m_\tau \bar{u}_\nu(k_\nu) (1 + \gamma^5) u_\tau(k_\tau)$$

- Con la solita tecnica troviamo

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}}|^2 &= \frac{G_\beta^2}{2} f_\pi^2 m_\tau^2 \text{Tr}[(\not{k}_\nu)(1 + \gamma^5)(\not{k}_\tau + m_\tau)(1 - \gamma^5)] \\ &= G_\beta^2 f_\pi^2 m_\tau^2 \text{Tr}[(\not{k}_\nu)(\not{k}_\tau + m_\tau)(1 - \gamma^5)] = G_\beta^2 f_\pi^2 m_\tau^2 \text{Tr}[\not{k}_\nu \not{k}_\tau] = 4G_\beta^2 f_\pi^2 m_\tau^2 k_\nu \cdot k_\tau \end{aligned}$$

- Dalla cinematica otteniamo

$$k_\tau \cdot k_\nu = \frac{m_\tau^2 - m_\pi^2}{2} \quad \int d\Phi_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{m_\tau^2 - m_\pi^2}{2m_\tau^2}$$

Il decadimento del leptone τ : $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau$

- Mettendo insieme i vari pezzi otteniamo

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{\frac{1}{2} |\overline{\mathfrak{M}}|^2}{2m_\tau} \int d\Phi_2 \qquad \Gamma = \frac{1}{4m_\tau} 4G_\beta^2 f_\pi^2 m_\tau^2 \frac{m_\tau^2 - m_\pi^2}{2} \frac{1}{4\pi} \frac{m_\tau^2 - m_\pi^2}{2m_\tau^2}$$

media sulle polarizzazioni iniziali

$$\Gamma(\tau \rightarrow \pi \nu) = \frac{1}{16\pi} G_\beta^2 f_\pi^2 m_\tau^3 \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_\tau^2}\right)^2$$

- Notiamo il fattore $\frac{1}{2}$ introdotto prima dell'elemento di matrice
 - Questa volta il leptone è nello stato iniziale
 - Bisogna mediare statisticamente fra le due polarizzazioni possibili
- Introduciamo i valori delle costanti e delle masse

$$G_\beta = 1.13578 \pm 0.00027 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

$$m_\pi = 139.57018 \pm 0.00035 \text{ MeV}$$

$$f_\pi = 130.7 \pm 0.1 \text{ MeV}$$

$$m_\tau = 1776.99 \pm 0.29 \text{ MeV}$$

- Otteniamo

$$\Gamma(\tau \rightarrow \pi \nu) = 2.43 \times 10^{-4} \text{ eV}$$

Il decadimento del leptone τ : $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau$

- Ricordando la larghezza totale ottenuta dalla vita media

$$\Gamma(\tau \rightarrow all) = 2.265 \times 10^{-3} \text{ eV}$$

- Otteniamo la frazione di decadimento

$$\frac{\Gamma(\tau \rightarrow \pi\nu)}{\Gamma(\tau \rightarrow all)} = \frac{2.43 \times 10^{-4}}{2.265 \times 10^{-3}} = 10.7\%$$

- Da confrontare con il valore sperimentale

$$\frac{\Gamma(\tau \rightarrow \pi\nu)}{\Gamma(\tau \rightarrow all)} = 11.06 \pm 0.11\%$$

- Ancora una volta, un ottimo accordo per un calcolo al primo ordine

Polarizzazione del leptone τ

- Calcoliamo adesso la larghezza di decadimento nel caso in cui il leptone τ sia polarizzato. L'ampiezza mediata

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{G_\beta^2}{2} f_\pi^2 m_\tau^2 \text{Tr}[(\not{k}_\nu)(1 + \gamma^5)(\not{k}_\tau + m_\tau)(1 - \gamma^5)]$$

- Viene sostituita con l'espressione

$$|\overline{\mathfrak{M}}_{RL}|^2 = \frac{G_\beta^2}{2} f_\pi^2 m_\tau^2 \text{Tr}\left[\not{k}_\nu (1 + \gamma^5)(\not{k}_\tau + m_\tau) \frac{1 \pm \gamma^5 \not{s}_R}{2} (1 - \gamma^5)\right]$$

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}}_R|^2 &= \frac{1}{2} G_\beta^2 f_\pi^2 m_\tau^2 \text{Tr}[\not{k}_\nu (\not{k}_\tau + m_\tau)(1 + \gamma^5 \not{s}_R)(1 - \gamma^5)] = \frac{1}{2} G_\beta^2 f_\pi^2 m_\tau^2 \text{Tr}[\not{k}_\nu \not{k}_\tau + m_\tau \not{k}_\nu \not{s}_R] \\ &= 2G_\beta^2 f_\pi^2 m_\tau^2 (k_\tau \cdot k_\nu + m_\tau s_R \cdot k_\nu) \end{aligned}$$

- Adesso mettiamoci nel sistema di riposo del leptone

$$s_R = (0, \boldsymbol{\xi})$$

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}}_R|^2 &= 2G_\beta^2 f_\pi^2 m_\tau^2 (m_\tau E_\nu - m_\tau \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{k}_\nu) = 2G_\beta^2 f_\pi^2 m_\tau^2 (m_\tau E_\nu - m_\tau E_\nu \boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\mathbf{k}}_\nu) \\ &= 2G_\beta^2 f_\pi^2 m_\tau^3 E_\nu (1 + \boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\mathbf{k}}_\pi) \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_\pi = -\mathbf{k}_\nu$$

$$|\overline{\mathfrak{M}}_{RL}|^2 = 2G_\beta^2 f_\pi^2 m_\tau^3 E_\nu (1 \pm \boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\mathbf{k}}_\pi)$$

$$|\mathbf{k}_\nu| = \frac{m_\tau^2 - m_\pi^2}{2m_\tau}$$

Polarizzazione del leptone τ

- Si ottiene infine la distribuzione angolare dei pioni nel sistema di riposo del leptone τ

$$\frac{dN_{RL}}{d\Omega} = \frac{\Gamma_{RL}}{\Gamma_R + \Gamma_L}$$

- Nel rapporto i termini costanti dello spazio delle fasi si elidono e pertanto possiamo semplicemente fare il rapporto fra i quadrati delle ampiezze

$$\frac{dN_{RL}}{d \cos \theta^*} = \frac{|\overline{\mathfrak{M}_{RL}}|^2}{|\overline{\mathfrak{M}_R}|^2 + |\overline{\mathfrak{M}_L}|^2}$$

$$\frac{dN_{RL}}{d \cos \theta^*} = \frac{1}{2} (1 \pm \xi \cdot \hat{\mathbf{k}}_\pi)$$

$$\boxed{\frac{dN_{RL}}{d \cos \theta^*} = \frac{1}{2} (1 \pm |\xi| \cos \theta^*)}$$

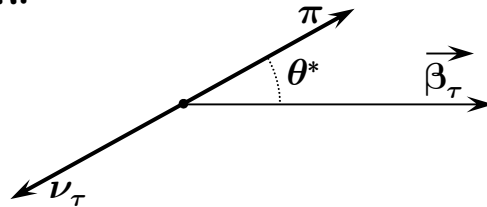
- Osserviamo infine che il segno di fronte al prodotto $\xi \cdot \mathbf{k}_\nu$ dipende dal segno della massa nell'espressione

$$|\overline{\mathfrak{M}_R}|^2 = \frac{1}{2} G_\beta^2 f_\pi^2 m_\tau^2 \text{Tr}[\not{k}_\nu (\not{k}_\tau \textcircled{+} m_\tau)(1 + \gamma^5 \not{s}_R)(1 - \gamma^5)] = 2G_\beta^2 f_\pi^2 m_\tau^2 (k_\tau \cdot k_\nu \textcircled{+} m_\tau s_R \cdot k_\nu)$$

- La massa compare con questo segno perché nell'ampiezza era presente lo spinore u del τ^- (particella)
- Se invece ci fosse stato un τ^+ (antiparticella) allora ci sarebbe stato uno spinore v e quindi una massa con il segno opposto

La misura della polarizzazione del τ

- A LEP coppie di leptoni τ sono prodotti nelle collisioni $e^+ e^-$ all'energia del centro di massa pari a M_Z
 - I due leptoni hanno momento opposto (uguale in modulo) e energia $E = M_Z/2$
 - I leptoni sono prodotti con una polarizzazione $\wp$ che dipende dagli accoppiamenti della Z^0 ai leptoni (lo vedremo)
 - Dalla misura della polarizzazione si possono misurare gli accoppiamenti
- Nel sistema di riposo del leptone τ , il π e il neutrino sono prodotti ad un angolo θ^* rispetto alla direzione di volo del τ
 - Nel piano contenente i due mesoni e la direzione di volo del τ
 -



- Il momento e l'energia del pione sono

$$|\mathbf{k}_\pi^*| = \frac{m_\tau^2 - m_\pi^2}{2m_\tau} \quad E_\pi^* = \frac{m_\tau^2 + m_\pi^2}{2m_\tau}$$

La misura della polarizzazione del τ

- La massa del τ è $m_\tau = 1776.99 \text{ MeV}$ e per i nostri scopi è possibile approssimare a zero la massa del pione

$$E_\pi^* = |\mathbf{k}_\pi^*| = \frac{m_\tau}{2}$$

- Nel laboratorio, l'energia di un pione emesso ad un angolo θ^* nel c.m. è

$$E_\pi = \gamma E_\pi^* + \gamma\beta |\mathbf{k}_\pi^*| \cos \theta^*$$

- γ e β sono i fattori relativistici del leptone τ

$$\gamma \approx \frac{M_Z}{2m_\tau} \quad \beta \approx 1$$

- L'energia del pione è pertanto

$$E_\pi = \gamma E_\pi^* (1 + \cos \theta^*) = \frac{M_Z}{2} \frac{1 + \cos \theta^*}{2}$$

- Al variare di $\cos \theta^*$ l'energia del pione nel sistema di laboratorio varia fra
 - Il valore massimo $M_Z/2$ che si raggiunge per $\cos \theta^* = 1$
 - il valore minimo 0 che si raggiunge per $\cos \theta^* = -1$
 - Se non si trascura la massa del leptone l'intervallo è ridotto

La misura della polarizzazione del τ

- Abbiamo visto che nel sistema di riposo del τ l'angolo di emissione del pione ha una distribuzione
- Nel sistema di laboratorio avremo pertanto

$$\frac{dN_{RL}}{d \cos \theta^*} = \frac{1}{2} (1 \pm \xi \cdot \hat{\mathbf{k}}_\pi)$$

$$\frac{dN}{d \cos \theta^*} = \frac{dN}{dE} \frac{dE}{d \cos \theta^*}$$

$$\frac{dN}{dE} = \frac{1}{\frac{dE}{d \cos \theta^*}} \frac{dN}{d \cos \theta^*}$$

- Dai calcoli cinematici precedenti

$$E_\pi = \frac{M_Z}{2} \frac{1 + \cos \theta^*}{2} \rightarrow \frac{dE_\pi}{d \cos \theta^*} = \frac{M_Z}{4} \quad \text{e inoltre} \quad \cos \theta^* = \frac{4E_\pi}{M_Z} - 1$$

- Mettendo insieme i vari pezzi

$$\frac{dN_{RL}}{dE} = \frac{4}{M_Z} \frac{1 \pm \cos \theta^*}{2}$$

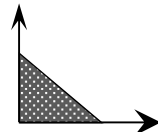
Introduciamo la variabile

$$x = \frac{2E_\pi}{M_Z}$$

$$\cos \theta^* = 2x - 1$$

- Si ottiene

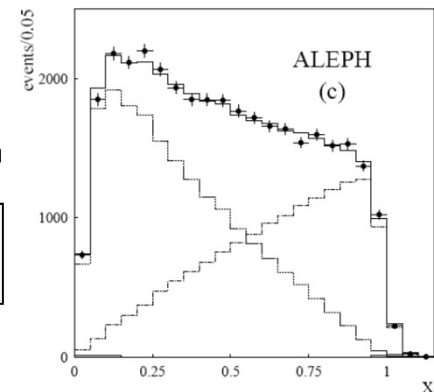
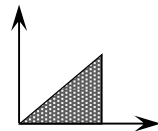
$$\frac{dN_L}{dx} = 1 - \cos \theta^* = 2(1 - x)$$



La misura fatta a LEP

$$\phi = -15.49 \pm 1.01\%$$

$$\frac{dN_R}{dx} = 1 + \cos \theta^* = 2x$$



Decadimenti deboli

- Abbiamo visto che l'interazione di Fermi (interazione corrente-corrente) può essere utilizzata con successo per descrivere i decadimenti deboli (vedi 446)
- Assumendo l'universalità l'Hamiltoniana può essere scritta come

$$\mathcal{H}'(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} \mathcal{J}^{\dagger\alpha}(x) \mathcal{J}_\alpha(x) \quad \boxed{G \equiv G_\mu}$$

- La corrente $\mathcal{J}^\alpha(x)$ è fatta da due pezzi: $\mathcal{J}^\alpha(x) = l^\alpha(x) + h^\alpha(x)$
 - La corrente leptonica $l^\alpha(x)$ contiene i campi delle tre famiglie di leptoni

$$l^{\dagger\alpha}(x) = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e} + \bar{\psi}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_\mu} + \bar{\psi}_\tau \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_\tau}$$

- I leptoni sono soggetti solo all'interazione elettrodebole e la loro descrizione mediante campi liberi di Dirac è adeguata
- Notiamo che la presenza nell'Hamiltoniana sia della corrente $\mathcal{J}$ che della corrente $\mathcal{J}^\dagger$ permette di descrivere processi "coniugati"
- Ad esempio

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e \quad \text{richiede i campi} \quad \psi_\mu \quad \bar{\psi}_{\nu_\mu} \quad \boxed{l^{\dagger\alpha}} \quad \bar{\psi}_e \quad \psi_{\nu_e} \quad \boxed{l^\alpha}$$

$$\mu^+ \rightarrow \bar{\nu}_\mu e^+ \nu_e \quad \text{richiede i campi} \quad \bar{\psi}_\mu \quad \psi_{\nu_\mu} \quad \boxed{l^\alpha} \quad \psi_e \quad \bar{\psi}_{\nu_e} \quad \boxed{l^{\dagger\alpha}}$$

La corrente adronica

- La corrente adronica $h^\alpha(x)$ è più complicata
 - Non può essere scritta in termini di campi liberi
 - Deve descrivere fenomeni per un gran numero di decadimenti di adroni
 - Decadimenti di bosoni ad esempio decadimento dei mesoni π o K
 - Decadimenti di fermioni, ad esempio del neutrone n o della Λ
- Nel seguito dedurremo alcune proprietà e parametrizzazioni della corrente adronica utilizzando le sue simmetrie dedotte dai dati sperimentali
- Innanzitutto ricordiamo che l'interazione debole viola la parità
 - La corrente è la somma di due termini: $h^\alpha(x) = \mathcal{V}^\alpha(x) - \mathcal{A}^\alpha(x)$
 - Una componente vettoriale-polare $\mathcal{V}^\alpha(x)$
 - Una componente vettoriale-assiale $\mathcal{A}^\alpha(x)$
- Inoltre i decadimenti deboli adronici sono classificabili in due grandi famiglie
 - Decadimenti adronici senza violazione di stranezza per i quali $\Delta S = 0$
 - Ad esempio i decadimenti
$$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e \quad \pi^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}_e \quad \pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$$
 - Decadimenti adronici con violazione di stranezza per i quali $\Delta S \neq 0$
 - Ad esempio i decadimenti
$$\Lambda^0 \rightarrow p \pi^- \quad \Sigma^- \rightarrow n e^- \bar{\nu}_e \quad K^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}_e \quad K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \quad \Xi^- \rightarrow \Lambda^0 \pi^-$$

La corrente adronica

- La corrente adronica contiene pertanto
 - Un termine che conserva la stranezza $h_{\Delta S=0}^{\alpha} \equiv J^{\dagger\alpha}$
 - Un termine che viola la conservazione della stranezza $h_{\Delta S \neq 0}^{\alpha} \equiv S^{\dagger\alpha}$
- Studiamo le proprietà della corrente $J^{\dagger\alpha}$, la parte $\Delta S = 0$
- I processi deboli studiati fino ad ora hanno tutti la proprietà che la carica elettrica dello stato adronico (o leptonico) cambia di una unità: $\Delta Q = \pm 1$
 - Questa proprietà fissa una regola di commutazione fra la corrente J^{α} e l'operatore carica elettrica Q

$$[\hat{Q}, J^{\dagger\alpha}] = +J^{\dagger\alpha} \quad [\hat{Q}, J^{\alpha}] = -J^{\alpha}$$

- Infatti dati due stati $|i\rangle$ e $|f\rangle$ $\hat{Q}|i\rangle = q_i|i\rangle$ $\hat{Q}|f\rangle = q_f|f\rangle$
 - Verifichiamo che la regola di commutazione implica che $\Delta Q = \pm 1$

$$\langle f | J^{\dagger\alpha} | i \rangle = \langle f | [\hat{Q}, J^{\dagger\alpha}] | i \rangle = \langle f | \hat{Q} J^{\dagger\alpha} - J^{\dagger\alpha} \hat{Q} | i \rangle = (q_f - q_i) \langle f | J^{\dagger\alpha} | i \rangle$$

- Pertanto, se l'elemento di matrice è diverso da zero $\Delta Q = q_f - q_i = +1$
- Analogamente per la corrente J^{α} abbiamo $\Delta Q = q_f - q_i = -1$
- Pertanto le interazioni deboli (correnti cariche) hanno la regola di selezione

$|\Delta Q| = 1$

Proprietà isotopiche della corrente adronica

- Sappiamo che l'isospin è una simmetria delle interazioni forti
 - Ad esempio per nucleoni e pioni se si trascurano le differenze di massa
- Anche se l'interazione debole viola la conservazione dell'isospin tuttavia lo utilizziamo per descrivere gli stati adronici iniziali e finali
- Introduciamo pertanto il formalismo dell'isospin per i campi del protone e del neutrone (assumendo che abbiano la stessa massa m)
 - Se utilizziamo il formalismo dell'isospin il protone e il neutrone sono un'unica particella di Isospin $T = \frac{1}{2}$ con due stati caratterizzati da $T_3 = \pm \frac{1}{2}$
- Introduciamo il campo Ψ del nucleone: un isospinore
 - Il campo Ψ è una quantità a due componenti (uno spinore di Pauli) $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$
 - Ciascuna delle due componenti è a sua volta uno spinore di Dirac a 4 componenti
- La Lagrangiana del nucleone si riscrive tramite il campo Ψ

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Psi$$

- Espandendo la notazione compatta

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_p & \bar{\psi}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^\mu \partial_\mu + m & 0 \\ 0 & \gamma^\mu \partial_\mu + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

Proprietà isotopiche della corrente adronica

- La simmetria dell'isospin si introduce richiedendo l'invarianza (globale) della Lagrangiana rispetto al gruppo SU(2) nello spazio isospinoriale
- Una trasformazione di SU(2) è funzione di 3 parametri ($\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$)

- Si può scrivere

$$\hat{U} = \exp[i\hat{A}] \quad \hat{A} = \Lambda \cdot \frac{\hat{\tau}}{2} \quad \tau_i \text{ matrici di Pauli} \quad \hat{A}^\dagger = \hat{A}$$

- Inoltre si ha anche invarianze per trasformazioni globali di fase

- Nel formalismo isospinoriale

$$\Psi \rightarrow e^{i\hat{\alpha}}\Psi \quad \hat{\alpha} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- L'applicazione del teorema di Noether porta alla corrente conservata

$$\hat{J}^\mu = \hat{\bar{\Psi}}\gamma^\mu\hat{\Psi} = \begin{pmatrix} \hat{\bar{\psi}}_p & \hat{\bar{\psi}}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & \gamma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\psi}_p \\ \hat{\psi}_n \end{pmatrix}$$

- La carica conservata associata è

$$\hat{B} = \int \hat{\bar{\Psi}}^\dagger \hat{\Psi} d^3\mathbf{r} = \int \left(\hat{\bar{\psi}}_p^\dagger \hat{\psi}_p + \hat{\bar{\psi}}_n^\dagger \hat{\psi}_n \right) d^3\mathbf{r} \quad \boxed{\hat{B} = \hat{N}_p + \hat{N}_n - \hat{N}_{\bar{p}} - \hat{N}_{\bar{n}}}$$

- La conservazione di questa carica esprime la conservazione del numero barionico