
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 15

18.11.2025

Esperimento di Frauenfelder
Hamiltoniana del decadimento β
Proiezioni chirali

anno accademico 2025-2026

Misura della Polarizzazione

- Per misurare la polarizzazione di un elettrone occorre chiedersi se ci sono effetti misurabili dipendenti dalla polarizzazione nella interazione di un elettrone o con un campo coulombiano o con un elettrone atomico
- Fra i metodi principali
 - **Mott scattering**
 - Scattering con il campo Coulombiano del nucleo di un atomo pesante
 - Sensibile solo polarizzazione trasversale alla direzione di moto
 - **Møller scattering**
 - Interazione dell'elettrone che si vuole analizzare con un elettrone atomico
 - L'elettrone atomico deve essere polarizzato
 - **Bhabha scattering**
 - Come il precedente ma per analizzare la polarizzazione di positroni
- Analizzeremo solo un esperimento che usa il primo metodo
 - Purtroppo lo scattering Coulombiano dipende dalla polarizzazione solo al secondo ordine dell'approssimazione di Born
 - L'effetto è piccolo: si usano nuclei pesanti (alto Z)
 - Inoltre, come già osservato, è sensibile solo ad una polarizzazione trasversale

Rotazione del Vettore di Polarizzazione

- Come trasformare la polarizzazione longitudinale in trasversale ?
 - Ovviamente con un campo elettromagnetico
- Per descrivere l'effetto di un campo elettromagnetico classico sullo spin di una particella si può utilizzare l'equazione semiclassica (Bargman, Michel, Telegdi)[†]

$$\hbar \frac{ds^\mu}{d\tau} = 2m F^{\mu\nu} s_\nu - 2u^\mu m' F^{\nu\lambda} u_\nu s_\lambda$$

$$m = \frac{e\hbar}{2mc}$$

momento magnetico

m'

momento magnetico anomalo

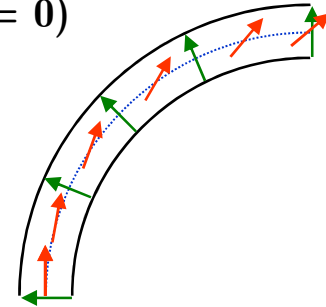
- L'equazione descrive il moto del vettore di polarizzazione s^μ sotto l'effetto di un campo elettromagnetico
 - Il campo non deve essere troppo intenso
 - Vale per qualunque campo "macroscopico"
 - Solo per campi a livello microscopico potrebbe essere non valida
- È più intuitivo utilizzare una equazione che descriva il moto del vettore ξ nel sistema di riposo istantaneo della particella
 - In questo sistema l'equazione diventa (assumiamo $m' = 0$)

$$\hbar \frac{d\xi}{dt} = \frac{2m}{\gamma} \xi \times \mathbf{B} + \frac{2m}{\gamma + 1} \xi \times (\mathbf{E} \times \beta)$$

[†]Landau, Lifshitz - Quantum Electrodynamics §41p,151 - Pergamon Press 1982

Rotazione del Vettore di Polarizzazione

- Il sistema utilizzato per ruotare la polarizzazione per elettroni di bassa energia fu inventato nel 1951 da Tolhoek e de Groot
 - Una guida circolare realizza un campo elettrico radiale ($B = 0$)
 - Gli elettroni di energia opportuna seguono una traiettoria circolare
 - Il campo elettrico fornisce una forza centripeta
- Se l'energia dell'elettrone non è elevata ($\gamma \approx 1$)
 - Il moto è praticamente non relativistico
 - Vedremo che la polarizzazione non risente del campo elettrico
 - La direzione dello spin rimane invariata
- Se l'energia dell'elettrone è elevata ($\gamma \gg 1$)
 - Lo spin sente l'effetto del campo elettrico e precessa
- Calcoliamo adesso la rotazione del vettore polarizzazione senza assunzioni sulla velocità dell'elettrone



Rotazione del Vettore di Polarizzazione

- Iniziamo calcolando il raggio dell'orbita in funzione del campo elettrico E e della velocità

- La legge di Newton

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E}$$

- La variazione di quantità di moto dell'elettrone quando ha percorso una lunghezza $Rd\theta$ è $d\mathbf{p} = p d\theta$

- Pertanto

$$d\theta = \frac{|d\mathbf{p}|}{|\mathbf{p}|} = \frac{|\mathbf{F}|dt}{|\mathbf{p}|} = \frac{eEdt}{|\mathbf{p}|} = \frac{eEdt}{mc\gamma\beta}$$

- La velocità angolare è

$$\omega_p = \frac{d\theta}{dt} = \frac{eE}{mc\gamma\beta}$$

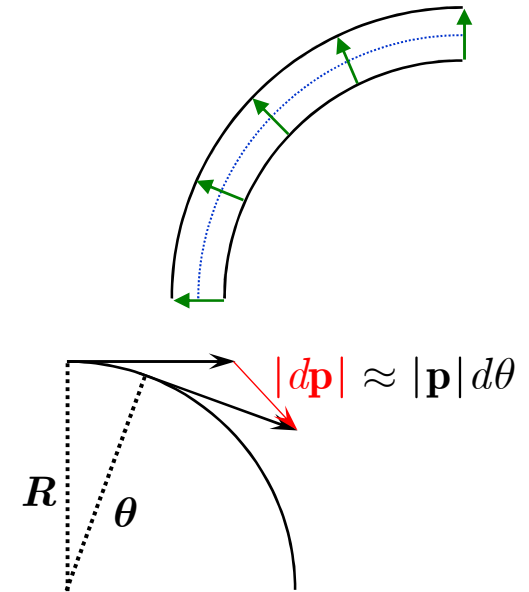
- Il periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_p} = 2\pi \frac{mc\gamma\beta}{eE}$$

- A questo punto calcoliamo il raggio dell'orbita

$$2\pi R = \beta c T = \frac{2\pi\beta mc^2\gamma\beta}{eE}$$

$$R = \frac{mc^2}{eE} \gamma\beta^2$$



Rotazione del Vettore di Polarizzazione

- Studiamo adesso la precessione dello spin

- Ricordiamo l'equazione Bargman, Michel, Telegdi (BMT) con $m' = 0$

$$\hbar \frac{d\xi}{dt} = \frac{2m}{\gamma} \xi \times \mathbf{B} + \frac{2m}{\gamma + 1} \xi \times (\mathbf{E} \times \beta)$$

$$m = \frac{e\hbar}{2mc}$$

- Per $\mathbf{B} = 0$ diventa

$$\hbar \frac{d\xi}{dt} = \frac{2m}{\gamma + 1} \xi \times (\mathbf{E} \times \beta)$$

- Il vettore $\mathbf{E} \times \beta$ è perpendicolare al piano individuato da $\mathbf{E}$ e β
- Il vettore $\xi \times (\mathbf{E} \times \beta)$ è sul piano ed è perpendicolare a ξ

- Riscriviamo l'equazione di BMT

- Definiamo Ω_ξ
$$\Omega_\xi = \frac{2m}{\hbar(\gamma + 1)} \mathbf{E} \times \beta \quad \frac{d\xi}{dt} = \xi \times \Omega_\xi$$

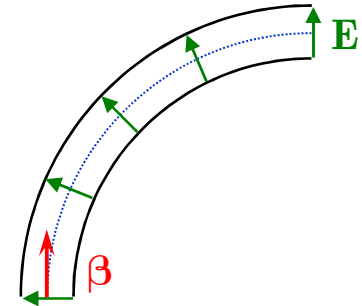
- Descrive una precessione

- Lo spin quindi precessa

- La variazione dello spin $d\xi$ è sul piano

$$d\theta = \frac{|d\xi|}{|\xi|} = \frac{|\xi \times \Omega_\xi|}{|\xi|} dt \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_\xi = |\Omega_\xi| = \frac{2m}{\hbar(\gamma + 1)} |\mathbf{E}| |\beta| = \frac{2e\hbar}{\hbar 2mc(\gamma + 1)} |\mathbf{E}| \beta$$

$$\omega_\xi = \frac{2eE}{2mc(\gamma + 1)} \beta$$



Rotazione del Vettore di Polarizzazione

- Supponiamo adesso che l'elettrone abbia percorso un tratto $\Delta\ell$ dell'arco

$$\Delta\ell = R\Delta\alpha = \frac{mc^2}{eE} \gamma\beta^2 \Delta\alpha$$

- Vogliamo calcolare l'angolo fra

- La quantità di moto $\mathbf{p}$
- Il vettore di polarizzazione ξ

- Per percorrere la distanza $\Delta\ell$ l'elettrone impiega un tempo

$$\Delta T = \frac{\Delta\ell}{\beta c} = \frac{mc}{eE} \gamma\beta \Delta\alpha$$

- Ricordiamo la velocità della precessione dello spin

$$\omega_\xi = \frac{2eE}{2mc(\gamma + 1)} \beta$$

- Pertanto il vettore di polarizzazione ξ e il vettore $\mathbf{p}$ ruotano rispettivamente

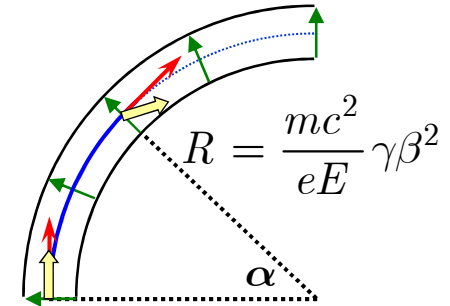
$$\Delta\theta_p = \Delta\alpha \quad \Delta\theta_\xi = \omega_\xi \Delta T = \frac{eE}{mc(\gamma + 1)} \beta \frac{mc}{eE} \gamma\beta \Delta\alpha = \frac{\gamma\beta^2}{(\gamma + 1)} \Delta\alpha$$

- Eliminiamo β

$$\frac{1}{\gamma + 1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma^2 - 1} = \frac{\gamma - 1}{\frac{1}{1 - \beta^2} - 1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma^2 \beta^2} \rightarrow \frac{\gamma\beta^2}{\gamma + 1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$$

- Sostituendo

$$\Delta\theta_\xi = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \Delta\alpha$$



Rotazione del Vettore di Polarizzazione

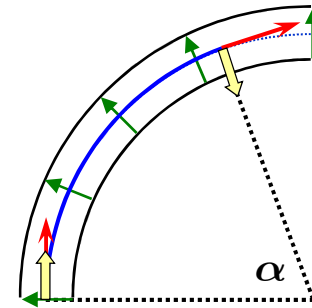
- Pertanto dopo aver percorso uno spazio $\Delta\ell = R\Delta\alpha$ l'angolo fra i due vettori è

$$\Delta\theta_{p\xi} \equiv \Delta\theta_p - \Delta\theta_\xi = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\right) \Delta\alpha$$

$$\Delta\theta_{p\xi} = \frac{\Delta\alpha}{\gamma}$$

- Pertanto, affinché la quantità di moto e lo spin siano perpendicolari deve essere

$$\Delta\theta_{p\xi} = \frac{\pi}{2} = \frac{\Delta\alpha}{\gamma}$$

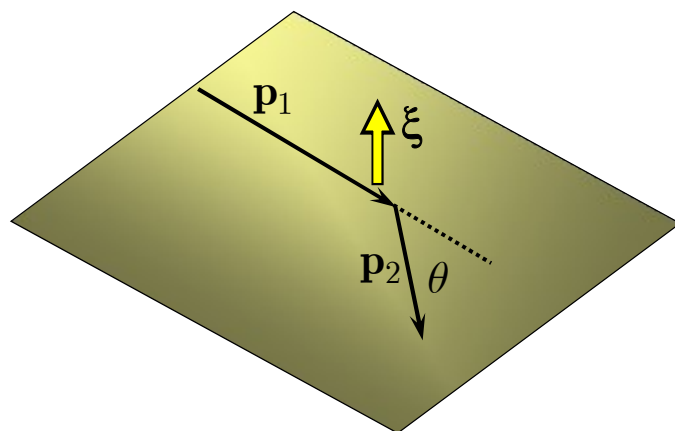
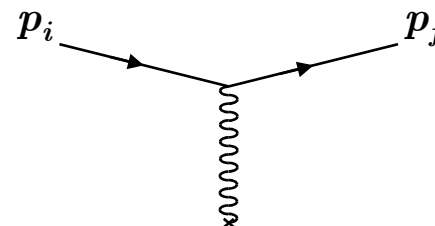


- Dato un elettrone di energia $mc^2\gamma$ la guida deve avere una lunghezza $R\Delta\alpha$
- L'angolo $\Delta\alpha$ è dato da

$$\Delta\alpha = \gamma \frac{\pi}{2}$$

Sezione d'urto Mott

- La sezione d'urto Mott è relativa all'interazione di un elettrone con il campo Coulombiano
 - Il bersaglio ha massa infinita
 - Si tiene conto dello spin dell'elettrone con la teoria di Dirac
- Abbiamo fatto questo calcolo al primo ordine della teoria perturbativa
 - A questo ordine non appaiono effetti legati alla polarizzazione
 - Una dipendenza dalla polarizzazione compare al secondo ordine[†]
- Diamo solo il risultato del calcolo

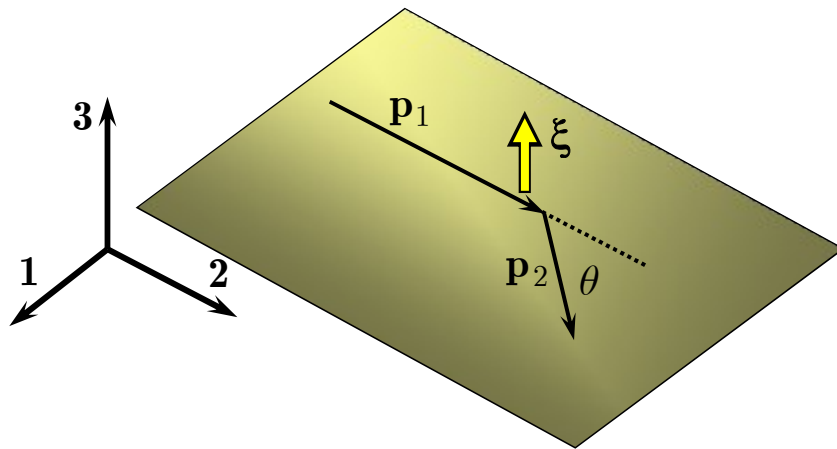


$$\sigma(\theta, \xi) \sim I(\theta) + \frac{D(\theta)}{|\sin \theta|} \hat{\mathbf{p}}_1 \times \hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \xi$$

- Per le funzioni $I(\theta)$ e $D(\theta)$ vedi Landau[†]
- [†]vedi Landau - Lifshitz - Quantum Electrodynamics 12.1 pag 534

Esperimento di Fraunfelder

- La figura mostra schematicamente l'apparato dell'esperimento di Fraunfelder per la misura della polarizzazione degli elettroni di un decadimento β



$$\sigma(\theta, \xi) \sim I(\theta) + \frac{D(\theta)}{|\sin \theta|} \hat{\mathbf{p}}_1 \times \hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \xi$$

- Notiamo che se l'angolo di deflessione θ va a sinistra il prodotto vettoriale $\hat{\mathbf{p}}_1 \times \hat{\mathbf{p}}_2$ cambia segno (cambia il segno della componente 1 di $\mathbf{p}_2$)

$$(\hat{\mathbf{p}}_1 \times \hat{\mathbf{p}}_2)_3 = \varepsilon_{3jk} \hat{p}_1^j \hat{p}_2^k = \varepsilon_{321} \hat{p}_1^2 \hat{p}_2^1$$

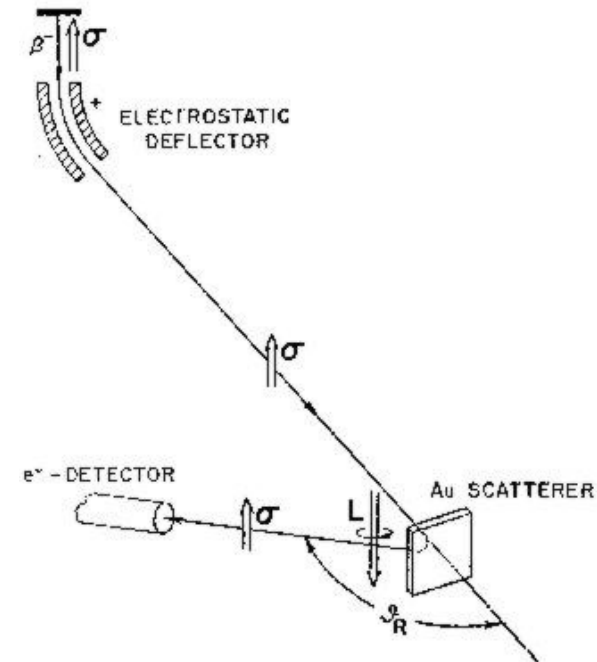
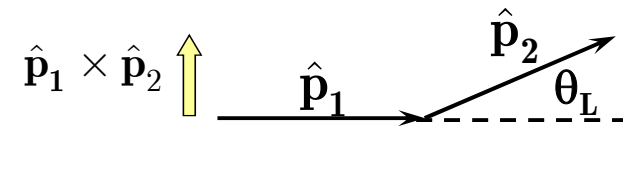
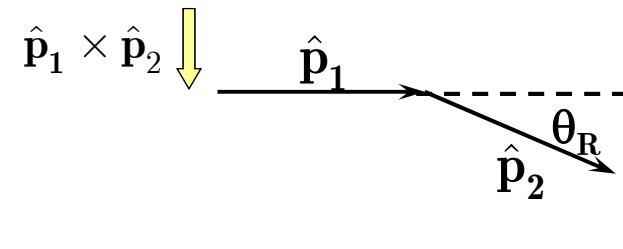


Fig. 7

Esperimento di Fraunfelder

- Supponiamo adesso che gli elettroni siano completamente polarizzati
 - In un caso paralleli alla quantità di moto (RH)
 - Nell'altro caso antiparalleli (LH)
- Dopo la rotazione gli elettroni sono ancora completamente polarizzati
 - Nel primo caso verso l'alto
 - Nel secondo verso il basso
- Ricordiamo la formula della sezione d'urto
 - Assumiamo il piano $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ perpendicolare a ξ
- Le misure da fare sono
 - La sezione d'urto per un angolo θ_R
 - Spin up $\sigma(\theta_R, \uparrow) \sim I(\theta_R) - D(\theta_R)$
 - Spin down $\sigma(\theta_R, \downarrow) \sim I(\theta_R) + D(\theta_R)$
 - La sezione d'urto per un angolo θ_L opposto a θ_R
 - Spin up $\sigma(\theta_L, \uparrow) \sim I(\theta_L) + D(\theta_L)$
 - Spin down $\sigma(\theta_L, \downarrow) \sim I(\theta_L) - D(\theta_L)$

$$\sigma(\theta, \xi) \sim I(\theta) + \frac{D(\theta)}{|\sin \theta|} \hat{\mathbf{p}}_1 \times \hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \xi$$



Esperimento di Fraunfelder

- Nell'esperimento gli elettroni non sono completamente polarizzati
 - La misura della polarizzazione $\wp$ è l'obiettivo dell'esperimento
 - La polarizzazione degli elettroni è data da

- N_+ polarizzati up (probabilità $\frac{N_+}{N}$)
- N_- polarizzati down (probabilità $\frac{N_-}{N}$)

$$\wp = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-} \quad N = N_+ + N_-$$

- La sezione d'urto osservata per un angolo θ_R è

$$\sigma(\theta_R) = \frac{N_+}{N} \sigma(\theta_R, \uparrow) + \frac{N_-}{N} \sigma(\theta_R, \downarrow) \quad \sigma(\theta_R) \sim I(\theta_R) - \wp D(\theta_R)$$

- Analogamente, per un angolo θ_L si osserva

$$\sigma(\theta_L) = \frac{N_+}{N} \sigma(\theta_L, \uparrow) + \frac{N_-}{N} \sigma(\theta_L, \downarrow) \quad \sigma(\theta_L) \sim I(\theta_L) + \wp D(\theta_L)$$

- Definiamo l'asimmetria δ
$$\delta = \frac{\sigma(\theta_L) - \sigma(\theta_R)}{\sigma(\theta_L) + \sigma(\theta_R)}$$

- Ci mettiamo nella condizione

$$\theta_R = -\theta_L \equiv \theta$$

- Si può verificare che

$$I(\theta) = I(-\theta) \\ D(\theta) = D(-\theta)$$

$$\delta = \frac{D(\theta)}{I(\theta)} \wp \equiv S(\theta) \wp$$

Esperimento di Fraunfelder

- $S(\theta)$ è noto: la misura di δ permette di misurare $\wp$

$$\delta = \frac{D(\theta)}{I(\theta)} \wp \equiv S(\theta) \wp$$

- Osservazioni

- $S(\theta)$ dipende anche dall'energia dell'elettrone
- È necessario che gli angoli θ_R e θ_L siano perfettamente simmetrici
- L'esperimento è sensibile solo alla polarizzazione trasversale
 - Un errore nella rotazione dello spin porta ad un errore sistematico su $\wp$
- L'effetto aumenta al crescere di Z
 - Si usano metalli pesanti come l'oro
- Per ottimizzare l'esperimento si può cercare l'angolo al quale l'effetto è più grande
- Occorre però tenere presente che al crescere dell'angolo la sezione d'urto diminuisce
 - Occorre trovare un compromesso tra la dimensione dell'effetto misurato e l'errore statistico con cui esso viene determinato
- La tabella mostra i risultati del primo esperimento
 - Con esperimenti successivi

$$\wp = -\beta_e$$

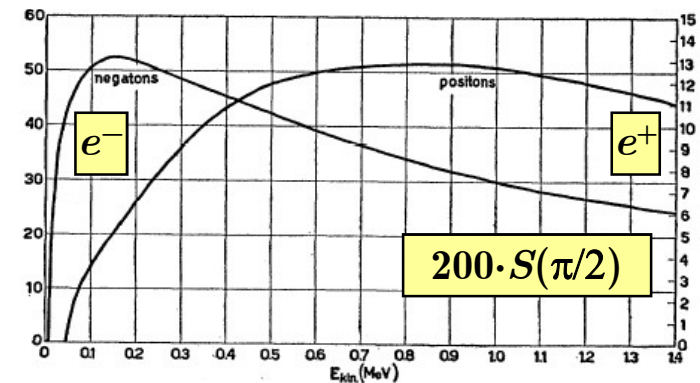


TABLE I. The polarization of electrons from Co^{60} .

Electron energy keV	$\beta = v/c$	Gold scattering foil mg/cm ²	Left-right asymmetry L/R	Longitudinal polarization P
50	0.41	0.15	1.03 ± 0.03	-0.04
68	0.47	0.15	1.13 ± 0.02	-0.16
77	0.49	0.05	1.35 ± 0.06	-0.40
77	0.49	0.15	1.30 ± 0.09	-0.35

Determinazione di C_A e C_V

- Abbiamo già visto che la misura della vita media di nuclei permette di determinare la costante di accoppiamento G_β

$$\lambda_F = \frac{1}{\tau} = \frac{G_\beta^2}{2\pi^3} \xi f$$

- Tuttavia, il parametro ξ contiene una dipendenza dal rapporto C_A/C_V

$$\xi = |\langle 1 \rangle|^2 + \frac{C_A^2}{C_V^2} |\langle \sigma \rangle|^2 \quad \rightarrow |C_A/C_V|$$

- I decadimenti di Fermi contengono solo il termine $\langle 1 \rangle$ e permettono pertanto la determinazione di $G_\beta^\dagger$ senza ulteriori informazioni

$$G_\beta = 1.13578 \pm 0.00027 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

- Ulteriori misure di su transizioni di Gamov-Teller o miste permettono la determinazione di $|C_A/C_V|$

$$\left| \frac{C_A}{C_V} \right| = 1.2695 \pm 0.0029$$

- $\dagger$ Blucher, Marciano PDG 2006 J. Phys. G 33 pag. 677
Ceccucci, Ligeti, Sakai PDG 2006 J. Phys. G 33 pag. 138

Determinazione di C_A e C_V

- Il segno relativo delle due costanti si può determinare solo con la misura di una grandezza osservabile che dipenda dal prodotto $C_A \cdot C_V$ e quindi dall'interferenza fra termini di Fermi e Gamov-Teller
- Occorre pertanto studiare transizioni di nuclei polarizzati
- Per nuclei non polarizzati l'elemento di matrice contiene il termine $1 + a\beta_e \cdot \beta_\nu$
- Osservabili che dipendono dal vettore di polarizzazione del nucleo σ contengono termini del tipo

$$1 + a\beta_e \cdot \beta_\nu + b\hat{\sigma} \cdot \beta_e + c\hat{\sigma} \cdot \beta_\nu$$

- Per neutroni polarizzati si trova

$$b = -2 \frac{C_A^2 + C_V C_A}{C_V^2 + 3C_A^2} \quad c = 2 \frac{C_A^2 - C_V C_A}{C_V^2 + 3C_A^2}$$

- Misure di correlazione angolare fra la direzione dell'elettrone (o del neutrino) e lo spin nucleare mostrano che il segno relativo è positivo

$$\frac{C_A}{C_V} = +1.2695 \pm 0.0029$$

L'Hamiltoniana del Decadimento β

- Gli esperimenti descritti hanno permesso la determinazione della forma dell'Hamiltoniana del decadimento β

- Sono stati esclusi i termini Scalare e Tensoriale

$$C_S = C_T = 0$$

- Sono state determinate le costanti degli accoppiamenti Vettoriale e Assiale

$$G_\beta = GC_V \qquad \frac{C_A}{C_V} = \kappa \qquad \alpha_V = \alpha_A = 1$$

- L'Hamiltoniana pertanto contiene solo i termini V e A

$$\mathcal{H}'_I = G[C_V(\bar{\psi}_p\gamma^\mu\psi_n)(\bar{\psi}_e(1+\gamma^5)\gamma_\mu\psi_\nu) + C_A(\bar{\psi}_p\gamma^5\gamma^\mu\psi_n)(\bar{\psi}_e(1+\gamma^5)\gamma^5\gamma_\mu\psi_\nu)]$$

- Il termine assiale può essere semplificato utilizzando $(\gamma^5)^2 = I$

$$\mathcal{H}'_I = G[C_V(\bar{\psi}_p\gamma^\mu\psi_n)(\bar{\psi}_e(1+\gamma^5)\gamma_\mu\psi_\nu) + C_A(\bar{\psi}_p\gamma^5\gamma^\mu\psi_n)(\bar{\psi}_e(1+\gamma^5)\gamma_\mu\psi_\nu)]$$

- Infine raccogliamo la parte leptonica

$$\mathcal{H}'_I = G[C_V(\bar{\psi}_p\gamma^\mu\psi_n) + C_A(\bar{\psi}_p\gamma^5\gamma^\mu\psi_n)](\bar{\psi}_e(1+\gamma^5)\gamma_\mu\psi_\nu)$$

L'Hamiltoniana del Decadimento β

$$\mathcal{H}'_I = G [C_V (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) + C_A (\bar{\psi}_p \gamma^5 \gamma^\mu \psi_n)] (\bar{\psi}_e (1 + \gamma^5) \gamma_\mu \psi_\nu)$$

- Possiamo ulteriormente semplificare

$$\mathcal{H}'_I = G (\bar{\psi}_p (C_V + C_A \gamma^5) \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e (1 + \gamma^5) \gamma_\mu \psi_\nu)$$

- E ancora

$$\mathcal{H}'_I = G C_V (\bar{\psi}_p (1 + \kappa \gamma^5) \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e (1 + \gamma^5) \gamma_\mu \psi_\nu)$$

- Come abbiamo già detto $\kappa = 1.27$ e $G C_V \equiv G_\beta$
 - Il valore di κ diverso da 1 dipende dal fatto che il nucleone non è una particella puntiforme
 - Il protone ha una struttura
 - Ritorneremo su questo punto in seguito
- Per il momento trascuriamo questo aspetto e assumiamo $\kappa = 1$
 - Ciò risulta esatto per particelle puntiformi, ad esempio per i quark

$$\mathcal{H}'_I = G_\beta \bar{\psi}_p (1 + \gamma^5) \gamma^\mu \psi_n \cdot \bar{\psi}_e (1 + \gamma^5) \gamma_\mu \psi_\nu$$

- In una notazione più moderna è diventato abituale spostare la matrice γ^μ a sinistra

$$\mathcal{H}'_I = G_\beta \bar{\psi}_p \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_n \cdot \bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_\nu$$

L'Hamiltoniana del Decadimento β

- Definiamo due generiche correnti (sia adronica che leptonica)
 - Una corrente Vettoriale $J_V^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$
 - Una corrente Assiale $J_A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$
- Le due correnti (adronica e leptonica) compaiono nell'Hamiltoniana nella combinazione

$$J^\mu = J_V^\mu - J_A^\mu.$$

- È questa la famosa forma $V-A$ delle correnti deboli (cariche)
- Infine, per uniformarci alle notazioni maggiormente utilizzate ridefiniamo la costante di accoppiamento dell'interazione
 - La costante G è stata definita da Fermi prima della scoperta della violazione della parità
 - La generalizzazione dell'interazione di Fermi e l'introduzione della violazione della parità hanno condotto ad una Hamiltoniana che contiene la differenza di due correnti ($V-A$)
 - Per mantenere la stessa definizione di Fermi è necessario dividere G per $\sqrt{2}$

$$\mathcal{H}_I' = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_p \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_n \cdot \bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_\nu$$

Proiezioni Chirali

- Esaminiamo in maggiore dettaglio la corrente leptonica

$$l^\mu(x) = \bar{\psi}_e(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_\nu(x)$$

- L'elemento di matrice di $l^\mu(0)$ fra il vuoto e lo stato $|e^- \bar{\nu}_e\rangle$ è

$$\langle e^- \bar{\nu}_e | l^\mu(0) | 0 \rangle = \bar{u}_{p_e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v_{p_\nu}$$

- Abbiamo già calcolato l'elemento di matrice di un operatore simile nel caso del decadimento β (slide [298](#))
- Vediamo le conseguenze della presenza della matrice $1 - \gamma^5$
 - In particolare cosa implica per l'elettrone
 - Abbiamo visto che nel decadimento β gli elettroni sono polarizzati
- Trasportiamo la matrice $1 - \gamma^5$ a sinistra

$$\begin{aligned} \bar{u}_{p_e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v_{p_\nu} &= \bar{u}_{p_e} (1 + \gamma^5) \gamma^\mu v_{p_\nu} = u_{p_e}^\dagger \gamma^0 (1 + \gamma^5) \gamma^\mu v_{p_\nu} \\ &= u_{p_e}^\dagger (1 - \gamma^5) \gamma^0 \gamma^\mu v_{p_\nu} = [(1 - \gamma^5) u_{p_e}]^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu v_{p_\nu} = \overline{[(1 - \gamma^5) u_{p_e}]} \gamma^\mu v_{p_\nu} \end{aligned}$$

- Dimostriamo adesso che l'applicazione di $1 - \gamma^5$ allo spinore $u(p)$ produce un elettrone con polarizzazione β
 - β è la velocità dell'elettrone

Proiezioni Chirali

- Ricordiamo la definizione dell'operatore elicità

$$\hat{h}(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$$

- Nel seguito utilizzeremo la rappresentazione di Dirac
- In questa rappresentazione l'operatore $\boldsymbol{\Sigma}$ è

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

- Consideriamo gli spinori u_+ e u_-

$$u_+ = N \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi_+}{E + m} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \frac{p \chi_+}{E + m} \end{pmatrix} \quad u_- = N \begin{pmatrix} \chi_- \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi_-}{E + m} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \chi_- \\ \frac{-p \chi_-}{E + m} \end{pmatrix} \quad N = \sqrt{E + m}$$

- $\chi_{\pm}$ sono spinori bidimensionali autovettori di $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$
- Si verifica facilmente che gli spinori $u_{\pm}$ sono autostati dell'elicità

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \chi_{\pm} = \pm \chi_{\pm}$$

- Infatti

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} u_+ = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \frac{p \chi_+}{E + m} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \chi_+ \\ \frac{p \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \chi_+}{E + m} \end{pmatrix} = +N \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \frac{p \chi_+}{E + m} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} u_+ = +u_+$$

e analogamente

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} u_- = -u_-$$

- In definitiva, per $\lambda = \pm 1$

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} u_{\lambda} = \lambda u_{\lambda}$$



Proiezioni Chirali

- Il risultato precedente significa che $u_{\pm}$ rappresentano spinori **completamente polarizzati** ($\wp = 100\%$)
 - u_+ è uno spinore con polarizzazione 100% in direzione parallela a $\mathbf{p}$
 - u_- è uno spinore con polarizzazione 100% in direzione antiparallela a $\mathbf{p}$
- Consideriamo adesso un arbitrario spinore nella rappresentazione di Dirac (non necessariamente normalizzato)

$$u(p) = N \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi}{E + m} \end{pmatrix}$$

$$u_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)u$$

$$u_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u$$

- Definiamo le proiezioni chirali u_R e u_L
 - Ricordiamo la forma di γ^5 nella rappresentazione di Dirac

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad 1 - \gamma^5 = \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \quad 1 + \gamma^5 = \begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix}$$

- Otteniamo

$$u_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u(p) = \frac{N}{2} \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi}{E + m} \end{pmatrix} = \frac{N}{2} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m}\right) \chi \\ -\left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m}\right) \chi \end{pmatrix}$$

- Notiamo che le componenti superiori dello spinore e quelle inferiori non sono più indipendenti



Proiezioni Chirali

- Osserviamo inoltre che lo spinore u_L non è un autostato dell'operatore elicità h
 - Tuttavia, si può verificare esplicitamente che il valore medio dell'elicità è

$$\langle h \rangle_L = \frac{\langle u_L | \hat{h} | u_L \rangle}{\langle u_L | u_L \rangle} = -\frac{p}{E} = -\beta$$

- Consideriamo adesso u_R

$$u_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)u(p) = \begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi}{E + m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m}\right) \chi \\ \left(1 + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m}\right) \chi \end{pmatrix}$$

- Analogamente al caso precedente si può verificare che

$$\langle h \rangle_R = \frac{\langle u_R | \hat{h} | u_R \rangle}{\langle u_R | u_R \rangle} = +\frac{p}{E} = +\beta$$

- Pertanto gli spinori u_L e u_R
 - Non sono autostati dell'operatore elicità
 - Tuttavia rappresentano stati con polarizzazione parziale $\wp = \pm\beta$
 - Notiamo infine che per $\beta \rightarrow 1$ la polarizzazione diventa completa e le due proiezioni chirali diventano autostati dell'elicità

Proiezioni Chirali

- Abbiamo pertanto ritrovato il risultato sulla polarizzazione β che avevamo ottenuto precedentemente con il calcolo esplicito dell'elemento di matrice
- Possiamo vedere una ulteriore motivazione per la polarizzazione degli elettroni come il risultato della struttura V-A della corrente leptonica
 - L'operatore $1-\gamma^5$ proietta uno spinore arbitrario in uno stato di polarizzazione parziale longitudinale left-handed
- Ribadiamo inoltre che la polarizzazione diventa completa quando $\beta \rightarrow 1$
- Le notazioni u_R e u_L per indicare le proiezioni chirali possono generare confusione
 - Bisogna tenere distinti i concetti di chiralità e elicità
- L'Hamiltoniano delle interazioni deboli contiene le proiezioni chirali
 - Ritorneremo presto su questo punto



Particelle di massa nulla

- Vale la pena approfondire il caso di particelle con massa nulla
 - In questo caso proiezioni di spin e proiezioni chirali coincidono
- Ricordiamo l'equazione di Dirac per gli spinori in forma Hamiltoniana

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)u = Eu$$

- Per una particella di massa nulla (es. il neutrino) l'equazione diventa ($|\mathbf{p}| = p$)

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} u = Eu \qquad \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{p} u = u$$

- Abbiamo scelto la soluzione con energia positiva e usato il fatto che se $m = 0$ allora $E = |\mathbf{p}| = p$

- Utilizziamo adesso la rappresentazione di Dirac

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\alpha} \gamma^5 = \gamma^5 \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

- Moltiplicando per γ^5 l'ultima forma dell'equazione di Dirac otteniamo

$$\gamma^5 \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{p} u = \gamma^5 u \qquad \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{p} u = \gamma^5 u$$



Particelle di massa nulla

- Analogamente, ricordando che $(\gamma^5)^2 = I$ otteniamo

$$\frac{\alpha \cdot \mathbf{p}}{p} \gamma^5 \gamma^5 u = u \quad \boxed{\frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{p} \gamma^5 u = u}$$

- Sommiamo l'ultima equazione all'ultima della diapositiva precedente $\frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{p} u = \gamma^5 u$

$$\frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{p} (1 + \gamma^5) u = (1 + \gamma^5) u$$

- Da cui

$$\boxed{\frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{p} u_R = u_R}$$

- Se invece sottraiamo

$$\frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{p} u - \frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{p} \gamma^5 u = \gamma^5 u - u \quad \frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{p} (1 - \gamma^5) u = (\gamma^5 - 1) u$$

- Da cui

$$\boxed{\frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{p} u_L = -u_L}$$

- Pertanto, come anticipato, nel caso di massa nulla le proiezioni chirali di una soluzione dell'equazione di Dirac coincidono con gli autostati di elicità

$$\boxed{u_R = u_+}$$

$$\boxed{u_L = u_-}$$

Rappresentazione Chirale delle matrici γ

- La rappresentazione di Dirac delle matrici γ è utile stata per discutere il limite non relativistico dell'equazione di Dirac
- Se si vogliono mettere in evidenza altri aspetti sono più convenienti altre rappresentazioni
 - Ad esempio il limite di alta energia o, equivalentemente, il limite di massa nulla
 - Aspetti legati alla handedness o Chiralità
- In questi casi è conveniente la rappresentazione Chirale o di Weyl[†]

$$\alpha = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix} \quad \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma = \gamma^0 \alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$
$$\alpha \gamma^5 = \gamma^5 \alpha = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

- Nella rappresentazione di Weyl si separano le proiezioni chirali R e L degli spinori
- Nella rappresentazione di Dirac si separano le componenti Large e Small legate al limite non relativistico
- [†]Attenzione: la rappresentazione qui riportata è conforme a quella utilizzata nel libro di testo (Aitchison-Hey)
Nel Peskin-Schoeder e nelle notes di Hitoshi Murayama viene utilizzata una convenzione differente

Rappresentazione Chirale

- Studiamo l'equazione di Dirac nella rappresentazione chirale

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi = E \psi$$

- Utilizziamo la rappresentazione chirale e la rappresentazione a blocchi dello spinore

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix}$$

- L'equazione diventa

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} - E \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = -m \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix}$$

- L'equazione matriciale corrisponde alle due equazioni accoppiate

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi - E \chi = -m \phi & \text{nella rappresentazione di} & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \phi - E \chi = -m \chi \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \phi + E \phi = +m \chi & \text{Dirac avevamo trovato} & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi - E \phi = +m \phi \end{array}$$

- Notiamo un aspetto interessante del limite di massa nulla $m = 0$
 - Nella rappresentazione di Weyl le equazioni per χ e ϕ si disaccoppiano
 - Nella rappresentazione di Dirac le due equazioni rimangono accoppiate anche nel caso limite di massa nulla

Particelle di massa nulla

- Nel caso di massa nulla le equazioni diventano ($E = |\mathbf{p}| = p$ $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p} / p$)

$$\sigma \cdot \mathbf{p} \chi - E \chi = 0$$

$$\sigma \cdot \mathbf{p} \phi + E \phi = 0$$



$$\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \chi = +\chi$$

$$\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \phi = -\phi$$

- Vediamo pertanto che i due spinori bidimensionali χ e ϕ sono autostati dell'elicità

- Inoltre nella rappresentazione chirale i due operatori di proiezione sono

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Applicando i due operatori allo spinore generico

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix}$$

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \psi = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix}$$

- Notiamo infine che i due spinori ψ_L e ψ_R sono anche autovettori dell'operatore γ^5 (operatore chiralità) con autovalori $+1$ e -1

$$\gamma^5 \psi_R = +\psi_R$$

$$\gamma^5 \psi_L = -\psi_L$$

- Abbiamo già notato che per $m = 0$ chiralità ed elicità coincidono

- Per una massa non nulla sono due proprietà differenti

- Elicità $\rightarrow$ polarizzazione completa Chiralità $\rightarrow$ polarizzazione parziale $\wp = \beta$

Proiezioni chirali

- La separazione delle due componenti è specifica delle rappresentazioni chirali
- Tuttavia molte delle altre proprietà viste sono indipendenti dalla massa e dalla rappresentazione

- Consideriamo ancora i due proiettori

$$\hat{P}_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \quad \hat{P}_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \quad \hat{P}_R \hat{P}_L = 0 \quad \hat{P}_R + \hat{P}_L = \hat{I}$$

- Si può sempre scomporre uno spinore in due componenti chirali $\psi = \psi_L + \psi_R$

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi = \hat{P}_R\psi \quad \psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi = \hat{P}_L\psi$$

- Le due componenti chirali di ψ sono autovettori di γ^5

$$\gamma^5\psi_R = \frac{1}{2}\gamma^5(1 + \gamma^5)\psi = \frac{1}{2}(\gamma^5 + 1)\psi = +\psi_R$$

$$\gamma^5\psi_L = \frac{1}{2}\gamma^5(1 - \gamma^5)\psi = \frac{1}{2}(\gamma^5 - 1)\psi = -\psi_L$$

- In generale le due componenti non sono soluzioni dell'equazione di Dirac

- Osserviamo che, dato che $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$, $P_R\gamma^\mu = \gamma^\mu P_L$ e $P_L\gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$

- Pertanto se $(\not{p} - m)\psi = 0 \Rightarrow (\not{p} - m)\psi_R = (\not{p} - m)\hat{P}_R\psi = (\hat{P}_L\not{p} - \hat{P}_Rm)\psi \neq 0$

- Analogamente per l'altra componente

- Tuttavia se $m = 0$ le due componenti sono soluzioni dell'equazione di Dirac

$$\not{p}\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \not{p}\psi_R = \not{p}\hat{P}_R\psi = \hat{P}_L\not{p}\psi = 0$$

Proiezioni chirali e antiparticelle

- **Discutiamo adesso le proiezioni chirali degli spinori v associati alle soluzioni con energia negativa**
 - **Abbiamo già notato che l'associazione dell'elicità fisica $+1$ agli autovalori dell'operatore $\Sigma \cdot \mathbf{p}$ è opposta a quella degli spinori u**
 - **Va comunque ricordato che la polarizzazione calcolata con l'elemento di matrice ha sempre il segno corretto, sia che si producano particelle (ad esempio e^-) o antiparticelle (ad esempio e^+)**
 - **I proiettori di spin covarianti sono stati costruiti in modo da tenere conto dell'inversione di segno**
 - **Analogamente a quanto succede per l'elicità risulta anche invertito il segno della polarizzazione associata alle proiezioni chirali L e R**
- **Questo aspetto è evidente nel caso di particelle di massa nulla**
 - **Consideriamo ancora l'equazione di Dirac nella rappresentazione chirale**

$$\sigma \cdot \mathbf{p} \chi - p_0 \chi = 0$$

$$\sigma \cdot \mathbf{p} \phi + p_0 \phi = 0$$

**nel caso di soluzione con
energia negativa $p_0 = -E$**

$$\sigma \cdot \mathbf{p} \chi + E \chi = 0$$

$$\sigma \cdot \mathbf{p} \phi - E \phi = 0$$

- **Pertanto, per le soluzioni di energia negativa, le relazioni diventano**

$$\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \chi = -\chi$$

$$\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \phi = +\phi$$

Per le antiparticelle l'elicità delle proiezioni (spinori χ e ϕ) è scambiata

Proiezioni chirali e antiparticelle

- La conseguenza fisica di quanto detto è che nel decadimento β
 - Le particelle sono emesse con polarizzazione $-\beta$: ad esempio l'elettrone
 - Le antiparticelle sono emesse con polarizzazione $+\beta$: ad esempio il neutrino
- Per finire osserviamo che nel decadimento β l'elicità dell'antineutrino è sempre right-handed (vedi diapositiva 424 e seguente)
 - Ricordiamo l'elemento di matrice

$$\langle e^- \bar{\nu}_e | l^\mu(0) | 0 \rangle = \bar{u}_{p_e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v_{p_\nu}$$

- Lo spinore v si può scomporre

$$v = v_L + v_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)v + \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)v$$

- Calcoliamo l'effetto dell'operatore $1 - \gamma^5$ presente nell'elemento di matrice

$$(1 - \gamma^5)v = (1 - \gamma^5) \left[\frac{1}{2}(1 + \gamma^5) + \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \right] v$$

Sopravvive solo v_L

$$= \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)(1 - \gamma^5)v + \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\cancel{(1 + \gamma^5)}v = (1 - \gamma^5)v_L$$

- Pertanto nel decadimento β
 - L'elicità dell'antineutrino è sempre RH
 - L'elicità del neutrino è sempre LH

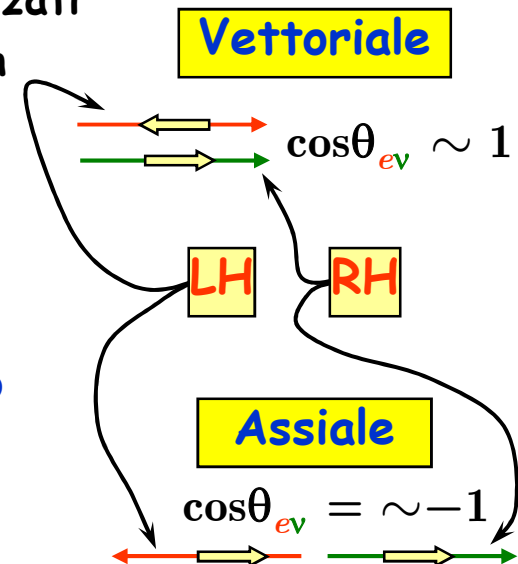
• Chiralità L
• Elicità $RH (+)$

Violazione della parità e momento angolare

- Abbiamo visto che la presenza dell'operatore $1-\gamma^5$ determina una polarizzazione nei leptoni prodotti nel decadimento β
 - Fermioni left-handed
 - Anti-fermioni right-handed
- Questa circostanza ci permette di dare un'interpretazione interessante dei risultati sulle correlazioni angolari nel decadimento β

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

- La correlazione angolare è una conseguenza della conservazione del momento angolare e del fatto che i due leptoni sono polarizzati
- Abbiamo infatti visto che le transizioni di Fermi non cambiano il momento angolare del nucleo
 - I leptoni pertanto sono in uno stato di singoletto e il momento angolare emesso è $S = 0$
- Per le transizioni di Gamov-Teller invece il momento angolare nucleare varia di una unità
 - I leptoni sono adesso in uno stato di tripletto e il momento angolare emesso è $S = 1$



Le Correnti chirali Left-Handed

- Ci sono altre osservazioni che si possono fare sulla corrente

$$J^\mu = \bar{\psi}_a \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_b$$

- Osserviamo che

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{4}(1 - 2\gamma^5 + (\gamma^5)^2) = \frac{1}{4}(2 - 2\gamma^5) = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)}$$

- Possiamo pertanto scrivere

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_a \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_b &= 2\bar{\psi}_a \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \psi_b = 2\bar{\psi}_a \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \psi_b \\ &= 2\bar{\psi}_a \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \psi_b = 2\psi_a^\dagger \gamma^0 \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \psi_b \\ &= 2\psi_a^\dagger \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \gamma^0 \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \psi_b = 2 \left[\frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \psi_a \right]^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \psi_b \end{aligned}$$

Le Correnti chirali Left-Handed

$$J^\mu = 2 \left[\frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi_a \right]^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi_b$$

- Introduciamo le proiezioni chirali Left degli operatori di campo

$$\psi_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi$$

- Inserendo nella corrente abbiamo

$$J^\mu = 2 [\psi_{aL}]^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi_{bL} = 2 \bar{\psi}_{aL} \gamma^\mu \psi_{bL}$$

$$J^\mu = 2 \bar{\psi}_{aL} \gamma^\mu \psi_{bL}$$

- Pertanto un altro modo di sintetizzare i risultati sperimentali sui decadimenti deboli è

- Solo le proiezioni chirali Left dei fermioni partecipano ai decadimenti deboli

chiralità non elicità

- Attenzione, solo per le correnti cariche mediate dai bosoni $W^\pm$

- Nel modello standard questa affermazione si traduce nel limitare il gruppo di simmetria $SU(2)$ dell'isospin debole alle componenti LH dei campi

$SU(2)_L$

Le Correnti chirali Left-Handed

- Per finire una interessante osservazione dovuta a Feynman e Gell-Man
 - Se solo le proiezioni chirali LH dei campi partecipano all'interazione debole allora i tipi possibili di interazione sono solamente V e A
- Infatti nella corrente i vari tipi operatore compaiono nella forma

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \Gamma_X \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \quad \text{NB: } \bar{\psi}_L = \bar{\psi} \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$$

- Questa espressione si annulla per $X = S, T$ (scalare e tensore)

- $X = S: \Gamma_X = I$

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{4}(1 - (\gamma^5)^2) = \frac{1}{4}(1 - 1) = 0$$

- $X = T: \Gamma_T = \gamma^\mu \gamma^\nu$

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \gamma^\mu \gamma^\nu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{4}(1 + \gamma^5)(1 - \gamma^5) \gamma^\mu \gamma^\nu = 0$$

- Viceversa, per $X = V$ e $X = A$ gli operatori non si annullano

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \neq 0$$

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \gamma^5 \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{2} \gamma^5 (1 + \gamma^5) \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{4}(1 + \gamma^5)^2 \gamma^\mu \neq 0$$