
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 13

11.11.2025

Teoria di Fermi del decadimento β

Studi sperimentali

Distribuzione dell'energia

Correlazioni angolari

Misura della vita media

anno accademico 2025-2026

Lo spazio delle fasi

- L'elemento di matrice che abbiamo trovato dipende, oltre che dalle energie, anche dall'angolo fra il neutrino e l'elettrone

$$|\overline{\mathfrak{M}_F}|^2 = 16m_N^2 E_e E_\nu G^2 \left[C_S^2 (1 - \beta_e \cdot \beta_\nu) + C_V^2 (1 + \beta_e \cdot \beta_\nu) + 2C_S C_V \frac{m_e}{E_e} \right]$$

- Vedremo che la distribuzione di $\theta_{e\nu}$ contiene importanti informazioni
- È pertanto necessario sviluppare lo spazio delle fasi senza integrare sugli angoli
- Riprendiamo pertanto il calcolo a partire dall'integrazione del momento del protone in poi (vedi diapositiva [312](#))

$$d\Phi = \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^9} \frac{\mathbf{k}^2 dk d\Omega_e}{2E_e} \frac{\mathbf{k}'^2 dk' d\Omega_\nu}{2E_\nu} \frac{1}{2E_p} \delta\left(m_n - E_e - E_\nu - \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mathbf{k}'^2 + 2kk' \cos \theta_{e\nu} + m_p^2}\right)$$

- Adesso vogliamo integrare sull'energia del neutrino e poniamo $x = E_\nu = |\mathbf{k}'|$

$$f(x) = m_n - E_e - x - \sqrt{\mathbf{k}^2 + x^2 + 2kx \cos \theta_{e\nu} + m_p^2} = E_p \quad \approx m_p$$

- Trascurando l'energia cinetica del protone

$$f(x) \approx m_n - m_p - E_e - x = x_0 - x \quad x_0 \approx m_n - m_p - E_e \quad |f'(x_0)| = 1$$

$$\delta(f(x)) = \delta(x_0 - x)$$

Lo spazio delle fasi

- Con questa approssimazione abbiamo (ricordiamo $|\mathbf{k}'| = E_\nu$ e $p_e \equiv |\mathbf{k}|$)

$$d\Phi = \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^9} \frac{p_e^2 dp_e d\Omega_e}{2E_e} \frac{E_\nu^2 dE_\nu d\Omega_\nu}{2E_\nu} \frac{1}{2E_p} \delta(E_\nu - \bar{E}_\nu) \quad \begin{aligned} \bar{E}_\nu &= m_n - m_p - E_e \\ m_n - m_p &= \Delta m \end{aligned}$$

- Possiamo a questo punto integrare su E_ν

$$d\Phi = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{p_e^2 dp_e d\Omega_e}{8E_e E_p} \bar{E}_\nu d\Omega_\nu$$

- Inoltre utilizziamo la consueta relazione

$$p_e^2 = E_e^2 - m_e^2 \rightarrow p_e dp_e = E_e dE_e$$

- Ancora una volta trascuriamo l'energia cinetica del protone $E_p \approx m_p \approx m_N$

$$d\Phi = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{E_\nu p_e}{8m_N} dE_e d\Omega_e d\Omega_\nu$$

- Per semplicità abbiamo sostituito $\bar{E}_\nu = E_\nu = m_n - m_p - E_e$
- A questo punto abbiamo tutti gli ingredienti per il calcolo della larghezza di decadimento

La larghezza di decadimento

- In definitiva abbiamo per la larghezza delle transizioni di Fermi

$$d\Gamma_F = \frac{1}{2m_n} \left| \overline{\mathfrak{M}}_F \right|^2 d\Phi$$

$$d\Gamma_F = \frac{1}{2m_N} 16m_N^2 E_e E_\nu G^2 \left[C_S^2 (1 - \beta_e \cdot \beta_\nu) + C_V^2 (1 + \beta_e \cdot \beta_\nu) + 2C_S C_V \frac{m_e}{E_e} \right] \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{E_\nu p_e}{8m_N} dE_e d\Omega_e d\Omega_\nu$$

$$d\Gamma_F = G^2 \frac{(C_S^2 + C_V^2)}{(2\pi)^5} p_e E_e E_\nu^2 \left[1 + a_F \beta_e \cdot \beta_\nu + \kappa_F \frac{m_e}{E_e} \right] dE_e d\Omega_e d\Omega_\nu$$

- Dove $E_\nu = \Delta m - E_e$ $a_F = \frac{C_V^2 - C_S^2}{C_S^2 + C_V^2}$ $\kappa_F = \frac{2C_S C_V}{C_S^2 + C_V^2}$

- Analogamente per la larghezza delle transizioni Gamov-Teller

$$d\Gamma_{GT} = G^2 \frac{3(C_A^2 + C_T^2)}{(2\pi)^5} p_e E_e E_\nu^2 \left[1 + a_{GT} \beta_e \cdot \beta_\nu - \kappa_{GT} \frac{m_e}{E_e} \right] dE_e d\Omega_e d\Omega_\nu$$

- Dove

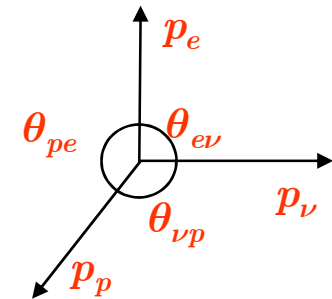
$$a_{GT} = -\frac{1}{3} \frac{C_A^2 - 4C_T^2}{C_A^2 + 4C_T^2} \quad \kappa_{GT} = 4 \frac{2C_A C_T}{C_A^2 + C_T^2}$$

La distribuzione dell'energia

- Cominciamo con lo studio della distribuzione dell'energia dell'elettrone
 - Ricordiamo che l'elemento di matrice dipende da termini che contengono

$$\beta_e \cdot \beta_\nu = \beta_e \beta_\nu \cos \theta_{e\nu} = \beta_e \cos \theta_{e\nu}$$

- Lo spazio delle fasi dipende dalle direzioni $d\Omega_e$ e $d\Omega_\nu$ dei momenti dell'elettrone e del neutrino
 - Misuriamo gli angoli rispetto alla direzione dell'elettrone
 - Possiamo integrare su $d\Omega_e \rightarrow 4\pi$



- L'integrale sull'angolo solido del neutrino di questi termini dà contributo nullo

$$\int_{-1}^{+1} \cos \theta_\nu d \cos \theta_\nu = 0$$

- Per i termini dell'elemento di matrice che non dipendono dagli angoli gli integrali sui due angoli solidi equivalgono a moltiplicare per $16\pi^2$
- In definitiva, per una transizione di Fermi

$$\frac{d\Gamma_F}{dE_e} = 4G^2 \frac{(C_S^2 + C_V^2)}{(2\pi)^3} p_e E_e (\Delta m - E_e)^2 \left[1 + \kappa_F \frac{m_e}{E_e} \right]$$

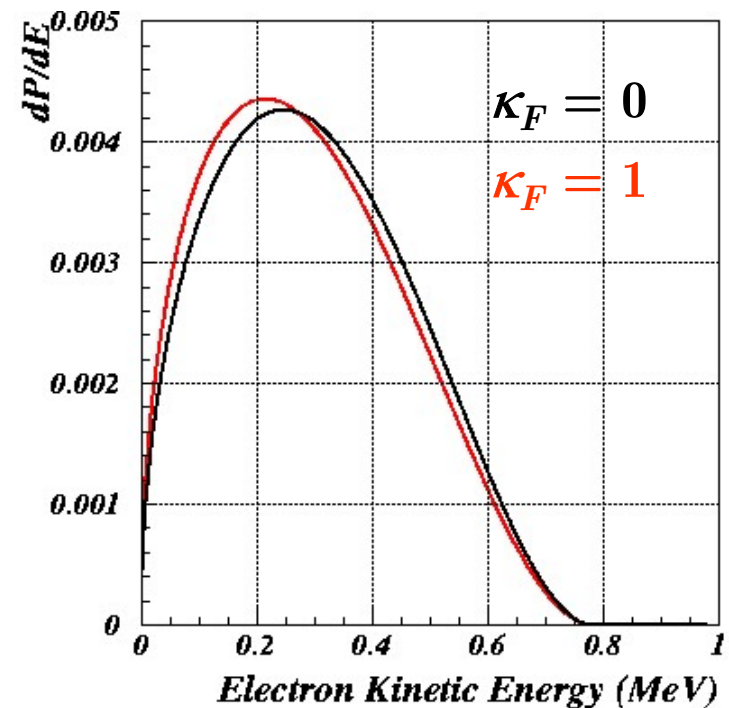
- Ricordiamo che abbiamo usato l'approssimazione $E_\nu \approx \Delta m - E_e$

La distribuzione dell'energia

- Le prime informazioni sulla struttura della interazione debole nel decadimento β sono state ottenute studiando lo spettro della energia

$$\frac{d\Gamma_F}{dE_e} = 4G^2 \frac{(C_S^2 + C_V^2)}{(2\pi)^3} p_e E_e (\Delta m - E_e)^2 \left[1 + \kappa_F \frac{m_e}{E_e} \right]$$

- Il termine con coefficiente κ_F è un termine di interferenza è noto come Termine di interferenza di Fierz
 - NB: il valore minimo di E_e è m_e
- Dallo studio della forma dello spettro si può verificare l'esistenza o meno del termine di interferenza
 - I risultati sperimentali mostrano che questo termine è assente ($\kappa = 0$)
 - Sia per le Transizioni di Fermi
 - Sia per le Transizioni di Gamov-Teller



La distribuzione dell'energia

- L'assenza del termine di interferenza di Fierz ha delle conseguenze importanti
 - Ricordiamo la forma dei coefficienti dei termini di interferenza

$$\kappa_F = \frac{2C_S C_V}{C_S^2 + C_V^2} \qquad \kappa_{GT} = 4 \frac{2C_A C_T}{C_A^2 + C_T^2}$$

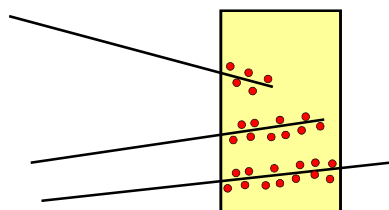
- La condizione $\kappa_{F,GT} = 0$ implica che solo uno dei due accoppiamenti può essere presente

$$C_S C_V = 0 \qquad C_A C_T = 0$$

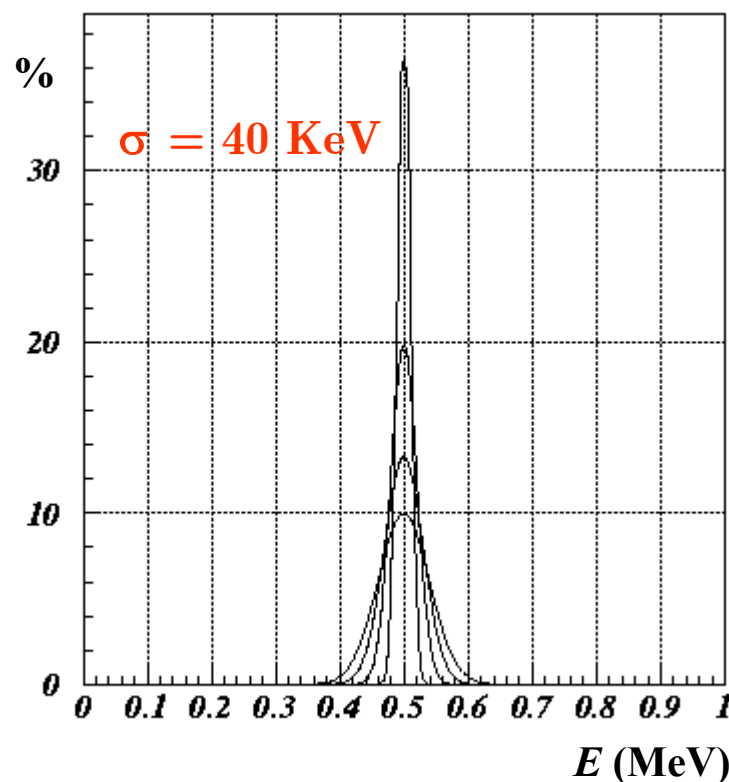
- Pertanto dei 4 possibili tipi di interazione solo 2 dovevano essere presenti con le seguenti possibilità:
 - Scalare - Assiale
 - Scalare - Tensoriale
 - Vettoriale - Assiale
 - Vettoriale - Tensoriale

La distribuzione dell'energia

- Da un punto di vista sperimentale è interessante studiare i requisiti di risoluzione e di precisione statistica per stabilire l'assenza o meno dei termini di interferenza
- Ovviamente, per misurare lo spettro di energia, abbiamo bisogno di un rivelatore che misuri l'energia di ogni singolo elettrone che lo attraversa

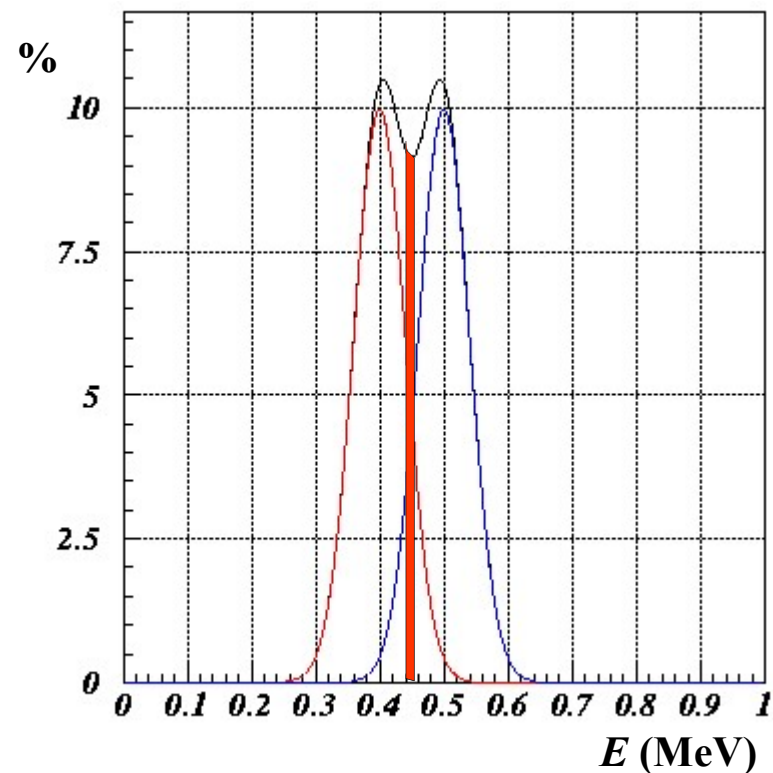
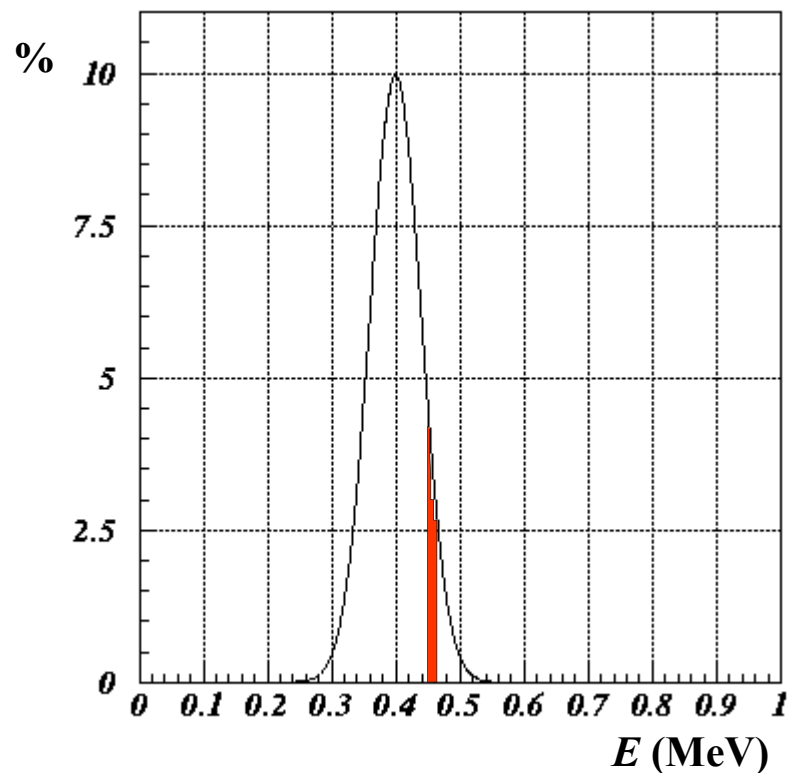


- Una prima caratteristica importante è la necessità di assorbire tutta l'energia
- Ma la caratteristica più importante è sicuramente la risoluzione
 - Supponiamo di avere un elettrone di 500 KeV e di variare la risoluzione del rivelatore



La distribuzione dell'energia

- Supponiamo di avere un elettrone di 400 KeV e una risoluzione di 40 KeV
- L'area della zona rossa dà la probabilità, data l'energia di 400 KeV, di misurare una energia nell'intervallo dato
- Se misuriamo contemporaneamente elettroni di 400 KeV e di 500 KeV
- Ancora l'area rossa ...
 - L'area rossa è la somma dell'area delle due "fette" delle gaussiane



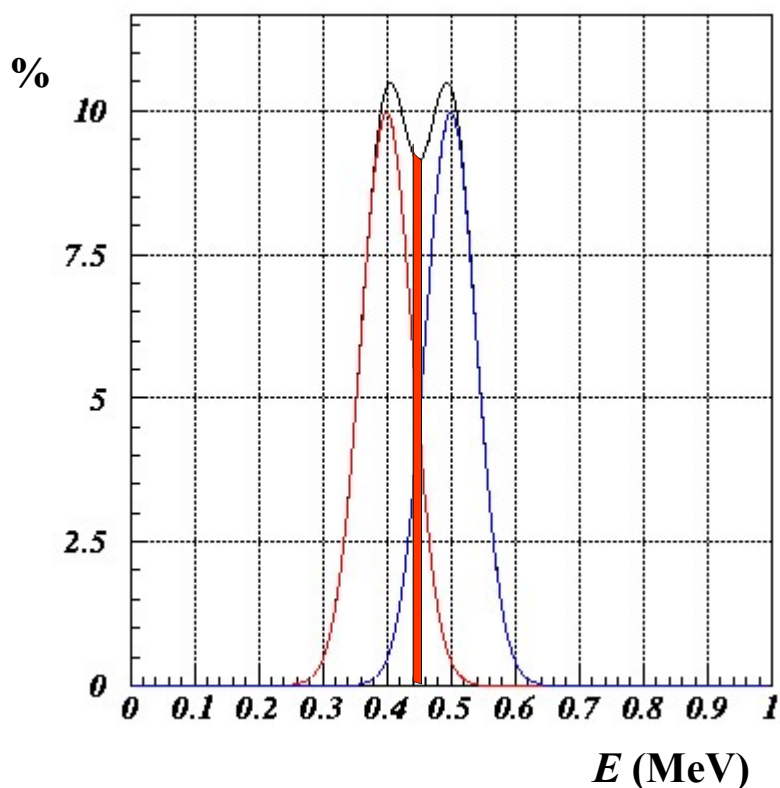
La distribuzione dell'energia

- L'area rossa, posizionata a E , è data da

$$P(E) \approx G(E - E_1)\Delta E + G(E - E_2)\Delta E$$

- Se le due gaussiane non avessero aree uguali f_1 e f_2

$$P(E) \approx f_1 G(E - E_1)\Delta E + f_2 G(E - E_2)\Delta E$$



- Se le gaussiane fossero tante e ciascuna con peso f_i

$$P(E) \approx \sum_i f_i G(E - E_i)\Delta E$$

- Possiamo interpretare f_i come il contributo al bin i_{esimo} di una distribuzione arbitraria di energia $f(E)$
 - Il rivelatore misura l'energia distribuita con $f(E)$ che cade in bin diversi per la risoluzione descritta dalla gaussiana
 - Il contributo al bin viene pertanto disperso nei vari bin adiacenti seguendo la legge gaussiana
 - Passando al limite $\Delta E \rightarrow dE$
- $$P(E) = \int f(x) G(E - x) dx$$
- La distribuzione risultante è la convoluzione della distribuzione originale con una gaussiana la cui deviazione standard è determinata dalla risoluzione del rivelatore

La distribuzione dell'energia

- Esercizi

1. Scrivere un programma per disegnare il grafico dello spettro dell'energia per diversi valori del parametro κ
2. Scrivere un programma per disegnare il grafico dello spettro dell'energia per $\kappa = 0$ e $\kappa = 1$ includendo l'effetto della risoluzione di un rivelatore variando la risoluzione da 10 KeV a 100 KeV
3. Scrivere un programma che generi numeri a caso secondo la distribuzione del punto 1 (oppure utilizzare il generatore MC del decadimento β)
4. Introdurre nel programma precedente l'effetto della risoluzione sommando un ulteriore numero a caso distribuito secondo una gaussiana di media nulla e deviazione standard pari all'errore
5. Scrivere un programma che faccia un fit della distribuzione ottenuta nel punto 4 con la funzione teorica ottenuta al punto 2. Si considerino parametri del fit il numero degli eventi generati e il valore del parametro κ
6. Determinare un grafico dell'errore sul parametro κ in funzione della risoluzione per 4 diversi valori del numero degli eventi
7. Ripetere gli studi precedenti per diversi valori del parametro κ
8. Finalmente, stabilire i criteri per una misura di κ che permetta di stabilire se κ è nullo

Correlazione Angolare $e - \nu$

- Richiamiamo le espressioni delle larghezze di Fermi e Gamov-Teller
- Includiamo il risultato sperimentale $C_S C_V = C_A C_T = 0$ ($\kappa_F = \kappa_{GT} = 0$)

$$d\Gamma_F = G^2 \frac{(C_S^2 + C_V^2)}{(2\pi)^5} p_e E_e E_\nu^2 [1 + a_F \beta_e \cdot \beta_\nu] dE_e d\Omega_e d\Omega_\nu$$

$$d\Gamma_{GT} = G^2 \frac{3(C_A^2 + C_T^2)}{(2\pi)^5} p_e E_e E_\nu^2 [1 + a_{GT} \beta_e \cdot \beta_\nu] dE_e d\Omega_e d\Omega_\nu$$

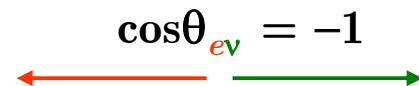
- Cominciamo con l'elemento di matrice delle transizioni di Fermi
- Poiché $|\beta_\nu| = 1$, esprimendo il prodotto scalare in funzione dell'angolo fra l'elettrone e il neutrino, integrando su $d\Omega_e$, otteniamo (A costante)

$$\frac{d\Gamma_F}{dE_e d\Omega_\nu} = A [1 + a_F \beta_e \cos(\theta_{e\nu})] \quad a_F = \frac{C_V^2 - C_S^2}{C_S^2 + C_V^2}$$

- Pertanto se $a_F > 0$ ($C_S = 0$)
 - La distribuzione ha un massimo se elettrone e neutrino tendono a essere collineari $\rightarrow \cos\theta_{e\nu} = 1$
- Se invece $a_F < 0$ ($C_V = 0$)
 - La distribuzione ha un massimo se elettrone e neutrino tendono ad andare in direzione opposta $\rightarrow \cos\theta_{e\nu} = -1$


 $\cos\theta_{e\nu} = 1$

Vettoriale


 $\cos\theta_{e\nu} = -1$

Scalare



Correlazione Angolare $e - \nu$

- Analogamente la larghezza di Gamov Teller

$$|\overline{\mathfrak{M}}_{GT}|^2 = 16m_N^2 E_e E_\nu 3G^2 (C_A^2 + 4C_T^2) [1 + a_{GT} \beta_e \cdot \beta_\nu]$$

- Conduce alla distribuzione angolare

$$\frac{d\Gamma_{GT}}{dE_e d\Omega_\nu} = B[1 + a_{GT} \beta_e \cos(\theta_{e\nu})] \quad a_{GT} = -\frac{1}{3} \frac{C_A^2 - 4C_T^2}{C_A^2 + 4C_T^2}$$

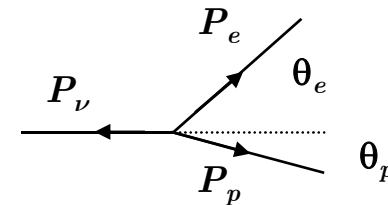
- Il massimo della distribuzione si ha per ...
- Ovviamente il neutrino non può essere rivelato
- Si possono però misurare l'energia e/o la direzione del nucleo che rincula e utilizzare la conservazione della quantità di moto
- Ci sono 5 variabili ($P_e, P_\nu, P_p, \theta_e, \theta_p$) e 3 equazioni
- In un esperimento ideale:
 - Si determinano due grandezze misurabili
 - Si ricava $\theta_{e\nu}$
 - Si costruisce la distribuzione di $\cos\theta_{e\nu}$ e si misura a_{GT} (o a_F)

$a_{GT} > 0 \rightarrow$ Tensoriale

$\cos\theta_{e\nu} = 1$

$a_{GT} < 0 \rightarrow$ Assiale

$\cos\theta_{e\nu} = -1$

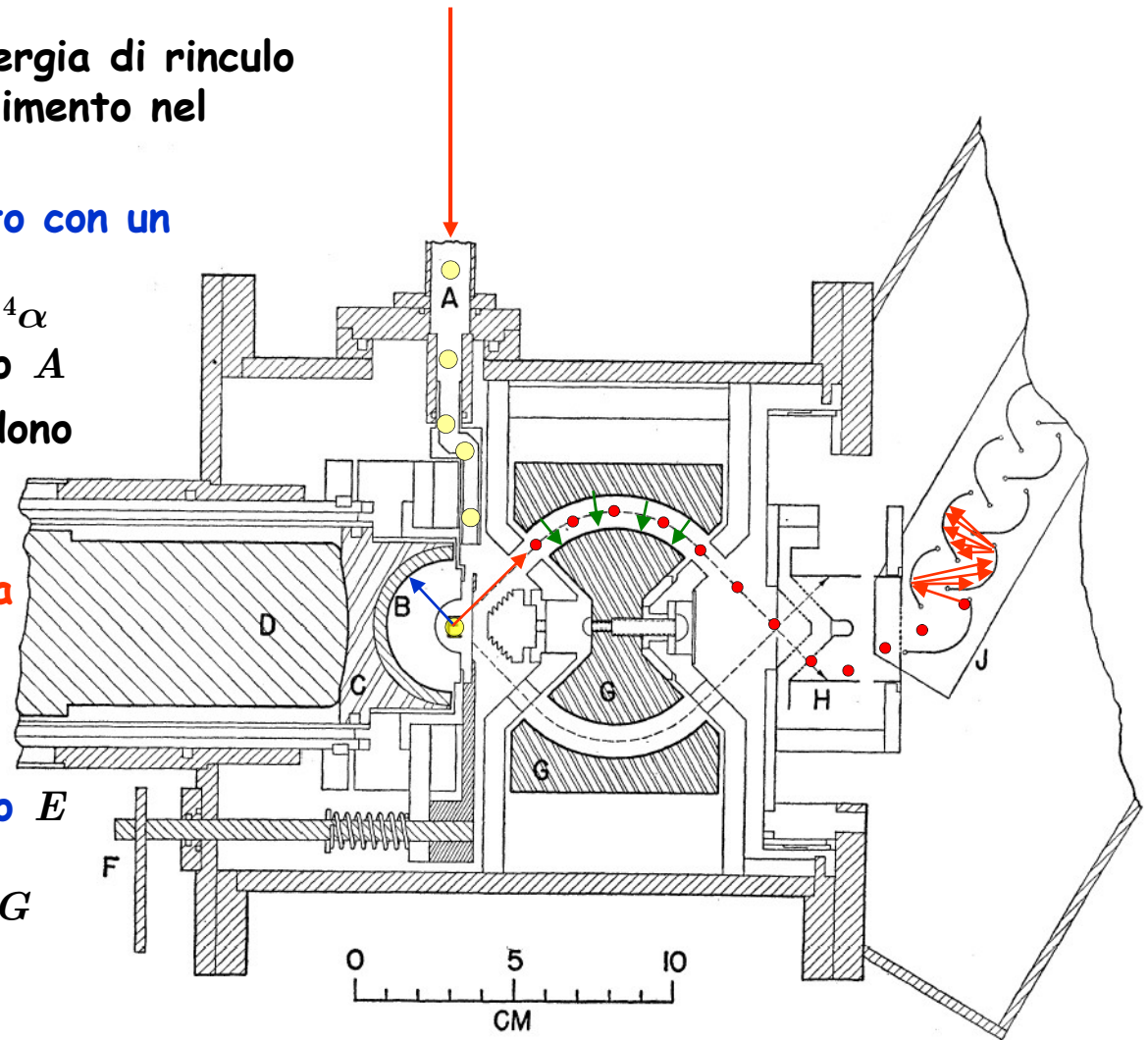


$$\begin{cases} P_\nu = P_e \cos \theta_e + P_p \cos \theta_p \\ P_e \sin \theta_e = P_p \sin \theta_p \\ m_n - m_p = P_\nu + T_p + E_e \end{cases}$$



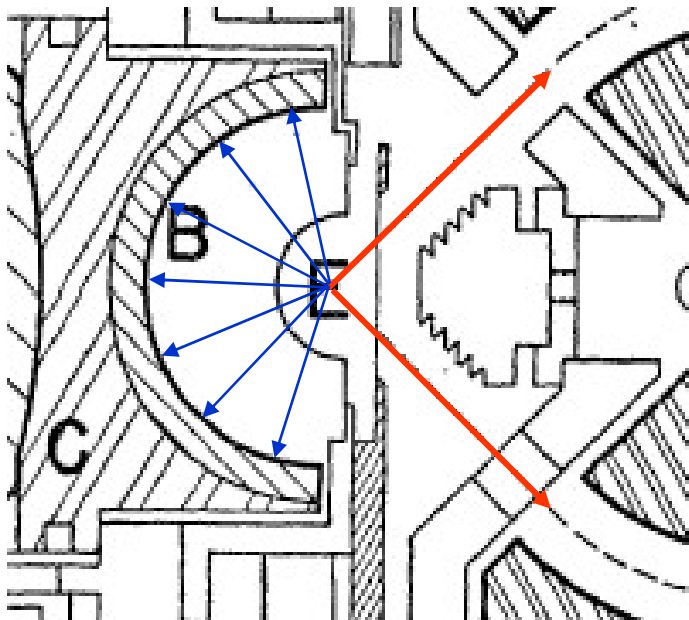
Correlazione Angolare $e - \nu$

- Esperimento di Allen et al
 - Per potere misurare l'energia di rinculo si deve studiare il decadimento nel vuoto
- Il gas radioattivo, prodotto con un ciclotrone
 - Es.: $n + {}^9\text{Be} \rightarrow {}^6\text{He} + {}^4\alpha$
 - viene immesso dal condotto A
- I nuclei radioattivi diffondono nell'apparato.
 - I decadimenti utili sono quelli che avvengono nella zona E
- Gli elettroni sono rivelati in B
- Tramite un campo elettrico E i nuclei (ioni) vengono selezionati in energia con G
 - Vengono rivelati in H-J



Correlazione Angolare $e - \nu$

- Si misura la distribuzione dell'energia cinetica del nucleo
- Ci sono solo due direzioni del rinculo che entrano nello spettrometro
 - **Consideriamone** una per fissare le idee
- Gli eventi selezionati sono quelli in cui l'angolo fra nucleo ed elettrone varia da θ_{min} a θ_{max}



$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & P_e & \\
 & \nearrow \theta_e & \\
 P_p & \leftarrow & \\
 & \searrow \theta_\nu & \\
 & P_\nu &
 \end{array}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} P_p = P_e \cos \theta_e + P_\nu \cos \theta_\nu \\ P_e \sin \theta_e = P_\nu \sin \theta_\nu \\ m_n - m_p = P_\nu + T_p + E_e \end{array} \right.$$

$$E_e = f_1(T_p, \theta_{ep}) \quad \cos \theta_{e\nu} = f_2(T_p, \theta_{ep})$$

$$\frac{d\Gamma}{dT_p d \cos \theta_{ep}} = \frac{d\Gamma}{dE_e d \cos \theta_{e\nu}} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial E_e}{\partial T_p} & \frac{\partial E_e}{\partial \cos \theta_{ep}} \\ \frac{\partial \cos \theta_{e\nu}}{\partial T_p} & \frac{\partial \cos \theta_{e\nu}}{\partial \cos \theta_{ep}} \end{array} \right|$$

$$\frac{d\Gamma}{dT_p d \cos \theta_{ep}} = g(T_p, \cos \theta_{ep})$$

$$\frac{d\Gamma}{dT_p} = \int_{\theta_{ep \min}}^{\theta_{ep \max}} \frac{d\Gamma}{dT_p d \cos \theta_{ep}} d \cos \theta_{ep}$$

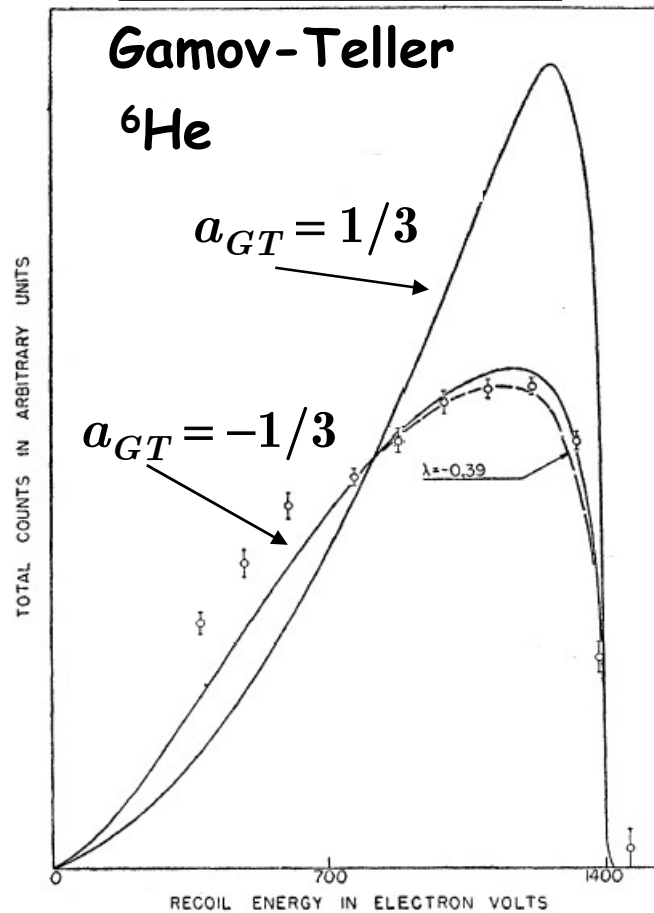
$$\frac{d\Gamma}{dT_p} = \int_{\theta_{ep \min}}^{\theta_{ep \max}} g(T_p, \cos \theta_{ep}) d \cos \theta_{ep}$$

- La distribuzione di energia del nucleo non si può ottenere analiticamente.
 - **Occorre un** calcolo numerico **o una** simulazione Montecarlo

Correlazione Angolare $e - \nu$

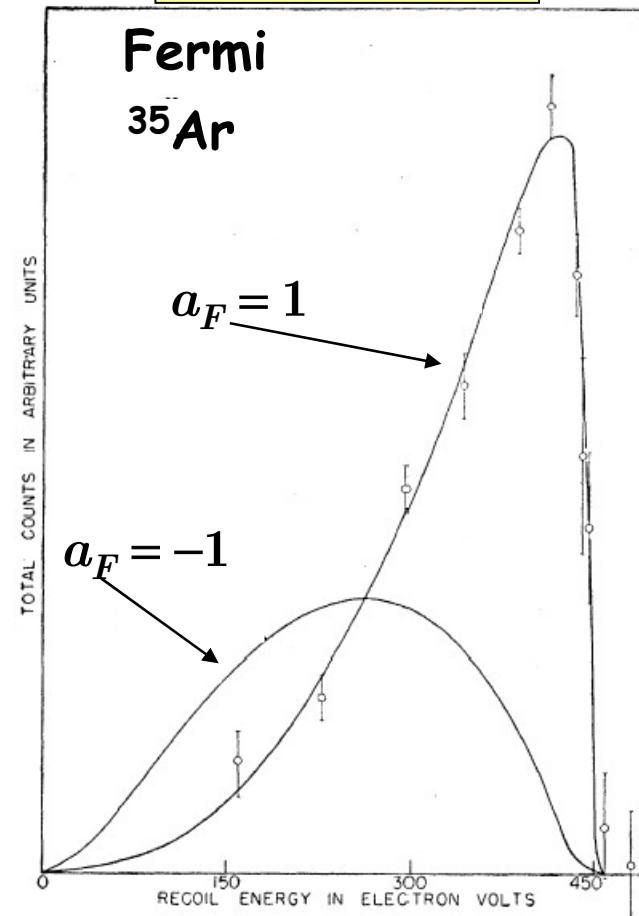
- Risultato per ${}^6\text{He}$

$$a_{GT} = -0.39 \pm 0.05$$



- Risultato per ${}^{35}\text{Ar}$

$$a_F = 0.97 \pm 0.14$$



Riepilogo

- Conseguenze dello studio dello spettro dell'energia dell'elettrone
 - Nelle transizioni di Fermi e Gamov-Teller sono assenti i termini di interferenza
 - Dato che $C_S C_V = 0$ nelle transizioni di Fermi è attiva solo
 - O la componente Scalare
 - O la componente Vettoriale
 - Dato che $C_T C_A = 0$ nelle transizioni di Gamov-Teller è attiva solo
 - O la componente Tensoriale
 - O la componente Assiale
 - Dalle informazioni precedenti e dallo studio dell'energia di rinculo del nucleo si ottengono informazioni sulla correlazione angolare $\beta_e - \beta_\nu$

- Interazioni di Fermi
$$a_F = \frac{C_V^2 - C_S^2}{C_S^2 + C_V^2} = 1$$

$C_S = 0 \quad C_V \neq 0$

- Interazioni di Gamov-Teller
$$a_{GT} = -\frac{1}{3} \frac{C_A^2 - 4C_T^2}{C_A^2 + 4C_T^2} = -\frac{1}{3}$$

$C_T = 0 \quad C_A \neq 0$

- Pertanto l'Hamiltoniana del decadimento β contiene solo i seguenti termini

Vettoriale γ^μ

Vettoriale Assiale $\gamma^5 \gamma^\mu$

La vita media

- Infine possiamo calcolare la vita media

- Assumendo assenti i termini di interferenza ($\kappa = 0$) abbiamo (Fermi)

$$d\Gamma_F = 4G^2 \frac{(C_S^2 + C_V^2)}{(2\pi)^3} p_e E_e E_\nu^2 dE_e$$

- Abbiamo inoltre visto che è presente solo il termine vettoriale ($C_S = 0$)

$$d\Gamma_F = 4G^2 \frac{C_V^2}{(2\pi)^3} p_e E_e E_\nu^2 dE_e$$

- Analogamente nelle transizioni di Gamov-Teller è presente solo il termine assiale ($C_T = 0$) e pertanto risulta

$$d\Gamma_{GT} = 4G^2 \frac{3C_A^2}{(2\pi)^3} p_e E_e E_\nu^2 dE_e$$

- In un decadimento in cui sono presenti entrambi i termini abbiamo

$$d\Gamma = \frac{4}{(2\pi)^3} G^2 (C_V^2 + 3C_A^2) p_e E_e E_\nu^2 dE_e$$

- Conviene riscrivere l'ultima equazione come

$$d\Gamma = \frac{4}{(2\pi)^3} G^2 C_V^2 \left(1 + 3 \frac{C_A^2}{C_V^2} \right) p_e E_e E_\nu^2 dE_e$$

La vita media

- La larghezza totale è data pertanto dall'integrale

$$\Gamma = \frac{4}{(2\pi)^3} G^2 C_V^2 \left(1 + 3 \frac{C_A^2}{C_V^2} \right) \int_{m_e}^{m_e + \Delta m} |\mathbf{k}| E_e E_\nu^2 dE_e \quad \left[\int_{m_e}^{m_e + \Delta m} \right] = M^5$$

- Notiamo le dimensioni dell'integrale
- In realtà per misure di precisione occorre tenere conto di effetti che per semplicità finora abbiamo trascurato
 - Elemento di matrice nucleare
 - Effetti del campo coulombiano
- Nell'elemento di matrice nucleare abbiamo assunto (semplificando)

$$|\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle|^2 = |\langle \sigma_x \rangle|^2 + |\langle \sigma_y \rangle|^2 + |\langle \sigma_z \rangle|^2 = 3$$

$$|\langle 1 \rangle|^2 = 1$$

- Per tenere conto degli elementi di matrice nucleari si definisce (e si calcola)

$$\xi = |\langle 1 \rangle|^2 + \frac{C_A^2}{C_V^2} |\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle|^2 \quad G_\beta = G C_V$$

$$\Gamma = \frac{4}{(2\pi)^3} G_\beta^2 \xi \int_{m_e}^{m_e + \Delta m} |\mathbf{k}| E_e E_\nu^2 dE_e$$

- Ovviamente con la sola misura di Γ non è possibile separare G e C_V
- Ritorneremo in seguito sul rapporto C_A/C_V

La vita media

- Per tenere conto dell'effetto del campo coulombiano che modifica le funzioni d'onda dell'elettrone (abbiamo usato le funzioni d'onda di particelle libere) si introduce la funzione di Fermi $F(Z, E_e)$

- La funzione $F(Z, E_e)$ moltiplica l'integrando
- Si definisce

$$f = \int_{m_e}^{m_e + \Delta m} F(Z, E_e) p_e E_e (\Delta m - E_e)^2 dE_e$$

- Abbiamo in definitiva

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{G_\beta^2}{2\pi^3} \xi f$$

- Sperimentalmente si studia

$$f\tau = \frac{2\pi^3}{G_\beta^2 \xi} \rightarrow ft_{1/2} = \frac{2\pi^3 \ln 2}{G_\beta^2 \xi}$$

- Misurando la vita media di un decadimento di un nucleo e calcolato il valore di ξ per quel nucleo si ottiene G_β
- Il valore di G_β misurato e mediato su tanti decadimenti è

$$G_\beta = 1.13578 \pm 0.00027 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

Il gruppo di Lorentz

- La richiesta che le leggi fisiche siano le stesse in tutti i sistemi inerziali implica che le grandezze fisiche abbiano ben precise leggi di trasformazione rispetto alle trasformazioni di Lorentz
 - In particolare i 4-vettori
 - Ad esempio il 4-vettore energia-impulso p^μ
 - I 4-vettori hanno un modulo invariante per trasformazioni $m^2 = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$
- Matematicamente le trasformazioni di Lorentz possono essere definite come le trasformazioni che lasciano invariata la forma quadratica $g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$
- Abbiamo visto che la condizione necessaria e sufficiente perché ciò accada è che la matrice Λ che rappresenta la trasformazione abbia la proprietà

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = g_{\alpha\beta}$$

$$\Lambda^T G \Lambda = G$$

- Può essere scritta in modo equivalente come $\Lambda_\mu^\alpha \Lambda^\mu_\beta = \delta_\beta^\alpha$
- Questo significa anche la matrice inversa Λ^{-1} è data da $(\Lambda^{-1})^\nu_\mu = \Lambda^\nu_\mu$
- Si tratta di una trasposizione e di cambi di segno (elementi Λ^0_i e Λ^i_0)
- Le matrici Λ che soddisfano le condizioni enunciate formano un gruppo

Il Gruppo di Lorentz

Il gruppo di Lorentz

- Ricordiamo le proprietà di un gruppo

- Chiusura: se Λ_1 e Λ_2 appartengono al gruppo anche $\Lambda_1 \Lambda_2$ appartiene ad esso

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^T G (\Lambda_1 \Lambda_2) = \Lambda_2^T \Lambda_1^T G \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^T G \Lambda_2 = G$$

- Associatività: $\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 = (\Lambda_1 \Lambda_2) \Lambda_3 = \Lambda_1 (\Lambda_2 \Lambda_3)$

- Il prodotto di matrici è associativo

- Identità: la matrice identità appartiene al gruppo

- La matrice I appartiene evidentemente al gruppo: $I^T G I = G$

- Inversa: ogni elemento Λ ha un'inverso Λ^{-1} appartenente al gruppo e $\Lambda^{-1} \Lambda = I$

- Abbiamo visto che $\Lambda^T G \Lambda = G$ mostra come scrivere l'inversa $(\Lambda^{-1})^\nu_\mu = \Lambda^\nu_\mu$

- Più formalmente

- Dimostriamo che Λ ha determinante non nullo

$$\det[\Lambda^T G \Lambda] = \det[G] \quad \det[\Lambda^T] \det[G] \det[\Lambda] = \det[G] \quad \boxed{(\det[\Lambda])^2 = 1}$$

- Quindi Λ ha un'inversa Λ^{-1}

- Dimostriamo che Λ^{-1} appartiene al gruppo

$$\Lambda^T G \Lambda = G \quad (\Lambda^{-1})^T \Lambda^T G \Lambda \Lambda^{-1} = (\Lambda^{-1})^T G \Lambda^{-1} \quad (\Lambda \Lambda^{-1})^T G I = (\Lambda^{-1})^T G \Lambda^{-1}$$

$$\boxed{(\Lambda^{-1})^T G \Lambda^{-1} = G}$$

Il gruppo di Lorentz

- Il gruppo definito in modo astratto nella diapositiva precedente contiene molto di più che le semplici trasformazioni di Lorentz (boost)
 - Ovviamente contiene le rotazioni
 - Contiene gli operatori di inversione temporale $\mathbb{T}$ e inversione spaziale $\mathbb{P}$

$$\mathbb{T}^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{P}^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Gli operatori $\mathbb{T}$ e $\mathbb{P}$ sono di natura diversa rispetto alle trasformazioni di Lorentz fin qui studiate
 - Non si possono costruire a partire dall'identità come somma di operazioni infinitesime
 - Non possono essere "connesse" con continuità all'identità
 - Sono trasformazioni discrete
- Una qualsiasi trasformazione del gruppo di Lorentz può essere costruita combinando
 - Boost, Rotazioni, Inversioni $\mathbb{T}$, Inversioni $\mathbb{P}$

Classificazione del gruppo di Lorentz

- Esaminiamo in maggiore dettaglio la struttura del gruppo di Lorentz
- Una prima classificazione viene fatta sulla base del segno del determinante

• Abbiamo visto che $(\det[\Lambda])^2 = 1 \implies \det[\Lambda] = \pm 1$

• Si definiscono i due seguenti tipi di trasformazioni

- Se $\det[\Lambda] = +1 \rightarrow$ Trasformazioni di Lorentz proprie
- Se $\det[\Lambda] = -1 \rightarrow$ Trasformazioni di Lorentz improprie

• Notiamo che il prodotto di due trasformazioni proprie è ancora una trasformazione propria

• Questa proprietà non vale per le trasformazioni improprie

• La seconda classificazione viene fatta sulla base del segno dell'elemento Λ^0_0

• Specializziamo la relazione $\Lambda^T G \Lambda = G$ all'indice 00 di G

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = g_{\alpha\beta} \implies g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 = g_{00} = 1 \quad 1 = \Lambda^0_0 \Lambda^0_0 - \sum_i \Lambda^i_0 \Lambda^i_0$$

$$\Lambda^0_0 \Lambda^0_0 = 1 + \sum_i (\Lambda^i_0)^2 \quad (\Lambda^0_0)^2 \geq 1$$

$$\Lambda^0_0 \geq +1$$

$$\Lambda^0_0 \leq -1$$

• Si definiscono i due seguenti tipi di trasformazioni

- Se $\Lambda^0_0 \geq +1 \rightarrow$ Trasformazioni di Lorentz ortocrone
- Se $\Lambda^0_0 \leq -1 \rightarrow$ Trasformazioni di Lorentz non-ortocrone

Classificazione del gruppo di Lorentz

- Le trasformazioni del gruppo di Lorentz sono pertanto classificate

- Per il segno del determinante
- Per il segno del termine Λ^0_0

- Nella tabella

- $\Lambda^{(po)} \rightarrow$ trasformazione propria e ortocrona

- Le trasformazioni delle altre classi si ottengono combinando $\Lambda^{(po)}$, $\mathbb{T}$ e $\mathbb{P}$
È facile verificare che

- I è propria e ortocrona
- $\mathbb{P}$ è impropria e ortocrona
- $\mathbb{T}$ è impropria e non ortocrona

- Le trasformazioni $\Lambda^{(po)}$ sono un sottogruppo
- Le trasformazioni proprie sono un sottogruppo
- Le trasformazioni ortocrone sono un sottogruppo
- L'insieme delle trasformazioni proprie ortocrone e delle trasformazioni improprie e non-ortocrone sono un sottogruppo

- NB: I boost non sono un sottogruppo

- Due boost in direzioni diverse sono equivalenti ad un boost più una rotazione

	$\Lambda^0_0 \geq +1$ ortocrona	$\Lambda^0_0 \leq -1$ non-ortocrona
$\det[\Lambda] = +1$ propria	$\Lambda^{(po)}$	$\mathbb{T}\Lambda^{(po)}$
$\det[\Lambda] = -1$ impropria	$\mathbb{P}\Lambda^{(po)}$	$\mathbb{T}\Lambda^{(po)}$

Generatori ...

$$[\hat{K}_j, \hat{K}_k] = -\varepsilon_{jkl} \hat{L}_l$$

$$[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = \varepsilon_{jkl} \hat{L}_l$$

$$[\hat{L}_j, \hat{K}_k] = \varepsilon_{jkl} \hat{K}_l$$

Inversione degli spinori

- In precedenza abbiamo visto come costruire le trasformazioni di Lorentz per uno spinore
 - Erano trasformazioni associate a trasformazioni proprie e ortocrone
 - Costruite come somma di trasformazioni infinitesime a partire dall'identità
- Ricordiamo la condizione di invarianza della equazione di Dirac
 - La trasformazione $S(\Lambda)$ e le matrici γ avevano la seguente proprietà

$$S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

- Vogliamo adesso trovare la trasformazione $S_P \equiv S(\mathbb{P})$ $\Lambda^\mu{}_\nu = \mathbb{P}^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ che corrisponde all'inversione spaziale $\mathbb{P}$
 - Scriviamo per esteso le condizioni sulle matrici γ per l'invarianza

$$S_P^{-1} \gamma^0 S_P = \mathbb{P}^0{}_\nu \gamma^\nu \quad S_P^{-1} \gamma^0 S_P = \gamma^0$$

$$S_P^{-1} \gamma^i S_P = \mathbb{P}^i{}_\nu \gamma^\nu \quad S_P^{-1} \gamma^i S_P = -\gamma^i$$

- Un operatore con le proprietà di S_P si trova definendo

$$S_P = \eta \gamma^0$$

$$(\eta \gamma^0)^{-1} \gamma^0 (\eta \gamma^0) = \eta^{-1} \gamma^0 \gamma^0 \eta \gamma^0 = \gamma^0$$

$$(\eta \gamma^0)^{-1} \gamma^i (\eta \gamma^0) = \eta^{-1} \gamma^0 \gamma^i \eta \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = -\gamma^i$$

scegliamo

$$\eta = +1$$

- Infine richiediamo $\overline{S_P} S_P = I$ $\overline{\eta \gamma^0} \eta \gamma^0 = \eta^* \eta \gamma^0 \gamma^0 = |\eta|^2 I$ $|\eta|^2 = 1$

Trasformazione dei covarianti bilineari

- Nel calcolo dell'elemento di matrice dell'interazione di Fermi **generalizzata** abbiamo trovato le seguenti quantità (bilineari covarianti)

$$f = \bar{u}\Gamma_X u$$

- Per ogni matrice Γ la quantità f è un numero
- Le matrici Γ_X possono avere indici
 - Ad esempio γ^μ , nel qual caso anche f ha gli stessi indici $f^\mu = \bar{u}\gamma^\mu u$
- Le matrici Γ_i sono combinazioni di matrici γ che inducono ben precise proprietà di trasformazione di Lorentz per le quantità f

• $\Gamma_S = 1$	Scalare	$f = \bar{u}u$
• $\Gamma_V = \gamma^\mu$	Vettore	$f^\mu = \bar{u}\gamma^\mu u$
• $\Gamma_A = \gamma^5\gamma^\mu$	Vettore Assiale	$f^\mu = \bar{u}\gamma^5\gamma^\mu u$
• $\Gamma_T = \sigma^{\mu\nu} = i/2 [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$	Tensore	$f^{\mu\nu} = \bar{u}\gamma^\mu\gamma^\nu u$
• $\Gamma_P = \gamma^5$	Pseudoscalare	$f = \bar{u}\gamma^5 u$
- Verifichiamo adesso le proprietà di trasformazione delle grandezze f
 - Per trasformazioni di Lorentz proprie e ortocrone $S(\Lambda)$
 - Per inversione spaziale S_P

Trasformazione dei covarianti bilineari

- **Matrice scalare** $\Gamma_S = I$

- **Trasformazione di Lorentz**

$$f' = \bar{u}' \Gamma_S u' = \bar{S} u \Gamma_S S u = \bar{u} \bar{S} S u = \bar{u} u = f$$

$$\bar{S} S = S^{-1} S = I$$

- **Inversione spaziale**

$$f' = \bar{S}_P u \Gamma_S S_P u = \bar{u} \gamma^0 \gamma^0 u = \bar{u} u = f$$

- **Matrice vettoriale** $\Gamma_V = \gamma^\mu$

$$S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$$

- **Trasformazione di Lorentz**

$$f'^\mu = \bar{S} u \Gamma_V S u = \bar{u} \bar{S} \gamma^\mu S u = \bar{u} S^{-1} \gamma^\mu S u = \bar{u} \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu u = \Lambda^\mu_\nu \bar{u} \gamma^\nu u = \Lambda^\mu_\nu f^\nu$$

- **Inversione spaziale**

$$f'^\mu = \bar{S}_P u \Gamma_V S_P u = \bar{u} \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 u = \begin{cases} +\bar{u} \gamma^0 u & \mu = 0 \\ -\bar{u} \gamma^i u & \mu = 1, 3 \end{cases}$$

Vettore polare

Vettore assiale

- **Matrice vettoriale assiale** $\Gamma_A = \gamma^5 \gamma^\mu$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 = \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \rightarrow S \gamma^5 = \gamma^5 S$$

- **Trasformazione di Lorentz**

$$f'^\mu = \bar{S} u \Gamma_A S u = \bar{u} \bar{S} \gamma^5 \gamma^\mu S u = \bar{u} \gamma^5 S^{-1} \gamma^\mu S u = \Lambda^\mu_\nu \bar{u} \gamma^5 \gamma^\nu u = \Lambda^\mu_\nu f^\nu$$

- **Inversione spaziale**

$$f'^\mu = \bar{S}_P u \Gamma_A S_P u = \bar{u} \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^0 u = -\bar{u} \gamma^5 \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 u = \begin{cases} -\bar{u} \gamma^0 u & \mu = 0 \\ +\bar{u} \gamma^i u & \mu = 1, 3 \end{cases} = -f_\mu$$

attenzione

Trasformazione dei covarianti bilineari

- **Matrice tensoriale** $\Gamma_T = \gamma^\mu \gamma^\nu$, $\mu \neq \nu$

- **Trasformazione di Lorentz**

$$\begin{aligned} f'^{\mu\nu} &= \overline{Su} \Gamma_T Su = \overline{u} S^{-1} \gamma^\mu \gamma^\nu Su = \overline{u} S^{-1} \gamma^\mu S S^{-1} \gamma^\nu Su = \overline{u} \Lambda^\mu_\alpha \gamma^\alpha \Lambda^\nu_\beta \gamma^\beta u \\ &= \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \overline{u} \gamma^\alpha \gamma^\beta u = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta f^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

- **Inversione spaziale**

$$f'^{\mu\nu} = \overline{S_P u} \Gamma_T S_P u = \overline{u} \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^0 u = \begin{cases} +f^{\mu\nu} & \mu, \nu = 1, 2, 3 \\ -f^{\mu\nu} & \mu = 0, \nu = 1, 2, 3 \end{cases}$$

- **Se $i, j = 1, 2, 3$** $\gamma^i \gamma^j \rightarrow \gamma^0 \gamma^i \gamma^j \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^0 \gamma^i \gamma^j = \gamma^i \gamma^j$

- **Se $\mu = 0, i = 1, 2, 3$** $\gamma^0 \gamma^i \rightarrow \gamma^0 \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = \gamma^i \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^i$ **Analogamente per $\gamma^j \gamma^0$**

- **Matrice pseudo-scalare** $\Gamma_P = \gamma^5$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 = \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \rightarrow S \gamma^5 = \gamma^5 S$$

- **Trasformazione di Lorentz**

$$f' = \overline{Su} \Gamma_P Su = \overline{u} S^{-1} \gamma^5 Su = \overline{u} \gamma^5 S^{-1} Su = \overline{u} \gamma^5 u = f$$

- **Inversione spaziale**

$$f' = \overline{S_P u} \Gamma_P S_P u = \overline{u} \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 u = -\overline{u} \gamma^5 \gamma^0 \gamma^0 u = -\overline{u} \gamma^5 u = -f$$

Inversione spaziale

- Vediamo adesso come si formalizza l'effetto dell'inversione spaziale nella teoria quantistica dei campi
- Lo stato di un sistema descritto da un vettore dello spazio di Fock
 - Ad esempio, una particella libera

$$|p\rangle = \hat{a}_p^\dagger |0\rangle$$

- Le classificazione delle particelle è fatta in base alle proprietà di trasformazione delle loro funzioni d'onda quando soggette a rotazioni
 - Scalari o pseudoscalari spin 0
 - Spinori spin $\frac{1}{2}$
 - Vettori o pseudovettori spin 1
 - Tensori spin 2
- Nella Teoria Quantistica dei Campi queste proprietà si riflettono sulle proprietà di trasformazione degli operatori di creazione
- Facciamo solo l'esempio dell'inversione spaziale delle particelle di spin 0
 - Concentriamoci su due possibili comportamenti
 - Scalare $|p\rangle \rightarrow +| -p\rangle$
 - Pseudoscalare $|p\rangle \rightarrow -| -p\rangle$

Queste relazioni sono vere anche nel Sistema di Riposo

Inversione spaziale

- Con notazione unificata

$$\mathbb{P}|\mathbf{p}\rangle \rightarrow \xi_{\mathbb{P}}|-\mathbf{p}\rangle$$

- $\mathbb{P}$ è l'operatore di inversione e $\xi_{\mathbb{P}}$ è la parità intrinseca della particella
- Deduciamo adesso l'effetto dell'operatore $\mathbb{P}$ sugli operatori a e $a^\dagger$ a partire dalle proprietà di trasformazione di uno stato di una particella

$$\mathbb{P}|\mathbf{p}\rangle = \mathbb{P}\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle \quad \mathbb{P}|\mathbf{p}\rangle = \mathbb{P}\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger\mathbb{P}^{-1}\mathbb{P}|0\rangle$$

- Assumiamo

$$\mathbb{P}|0\rangle = |0\rangle$$

- Otteniamo pertanto

$$\mathbb{P}|\mathbf{p}\rangle = \mathbb{P}\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger\mathbb{P}^{-1}|0\rangle$$

- Confrontando con la definizione di $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P}|\mathbf{p}\rangle = \xi_{\mathbb{P}}|-\mathbf{p}\rangle = \xi_{\mathbb{P}}\hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle$$

- Dal confronto concludiamo

$$\mathbb{P}\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger\mathbb{P}^{-1} = \xi_{\mathbb{P}}\hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger$$

- Inoltre, considerando l'aggiunto hermitiano di questa equazione (assumiamo $\xi^* = \xi$)

$$\mathbb{P}\hat{a}_{\mathbf{p}}\mathbb{P}^{-1} = \xi_{\mathbb{P}}\hat{a}_{-\mathbf{p}}$$

- Utilizzando queste relazioni si dimostra facilmente che

$$\mathbb{P}\hat{\phi}(\mathbf{r},t)\mathbb{P}^{-1} = \xi_{\mathbb{P}} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot (-\mathbf{r}))} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot (-\mathbf{r}))} \right) = \xi_{\mathbb{P}} \hat{\phi}(-\mathbf{r},t)$$

Inversione del campo scalare

- Calcoliamo adesso il risultato dell'operatore di inversione sul campo scalare reale

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)\mathbb{P}^{-1} &= \mathbb{P} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{ik \cdot x} \right) \Big|_{k_0=E_{\mathbf{k}}} \mathbb{P}^{-1} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left(\mathbb{P} \hat{a}_{\mathbf{k}} \mathbb{P}^{-1} e^{-ik \cdot x} + \mathbb{P} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \mathbb{P}^{-1} e^{ik \cdot x} \right) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left(\xi_{\mathbb{P}} \hat{a}_{-\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + \xi_{\mathbb{P}} \hat{a}_{-\mathbf{k}}^{\dagger} e^{ik \cdot x} \right) \\
 &= \xi_{\mathbb{P}} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{-\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^{\dagger} e^{i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right)
 \end{aligned}$$

- Cambiamo la variabile di integrazione $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} dk_i = -\int_{+\infty}^{-\infty} dk_i = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_i$
 $E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \rightarrow E_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot (-\mathbf{r})$

$$\mathbb{P}\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)\mathbb{P}^{-1} = \xi_{\mathbb{P}} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot (-\mathbf{r}))} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot (-\mathbf{r}))} \right) = \xi_{\mathbb{P}} \hat{\phi}(-\mathbf{r}, t)$$

