
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 12

10.11.2025

Teoria di Fermi del decadimento β
Cinematica; spazio delle fasi
Approssimazione non relativistica
Generalizzazione della teoria di Fermi

anno accademico 2025-2026

Lo spazio delle fasi

- Studiamo lo spazio delle fasi per il decadimento β (decadimento a 3 corpi)

$$d\Phi = \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_e} \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3 2E_\nu} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_p} (2\pi)^4 \delta^4(P - k - k' - p)$$

- La presenza della funzione $\delta^3(0 - \mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{p})$ rende banale l'integrazione sul 3-momento del protone ($d^3\mathbf{p}$)

$$d\Phi = \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^9} \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_e} \frac{d^3\mathbf{k}'}{2E_\nu} \frac{1}{2E_p} \delta(m_n - E_e - E_\nu - E_p)$$

$$E_p = \sqrt{|\mathbf{k} + \mathbf{k}'|^2 + m_p^2}$$

$$|\mathbf{k}| \equiv k$$

- Da ora in poi è sottointeso che $\mathbf{p} = -(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$
- Da questo punto in poi si può sviluppare il calcolo in due modi differenti:
 - Il primo finalizzato allo studio del plot di Dalitz
 - Il secondo finalizzato al calcolo della distribuzione dell'energia dell'elettrone o di correlazioni angolari
- Affrontiamo il primo caso (affronteremo il secondo fra poco)
 - Sviluppiamo il modulo $|\mathbf{k} + \mathbf{k}'|$ e i differenziali

$$d\Phi = \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^9} \frac{k^2 dk d\Omega_e}{2E_e} \frac{k'^2 dk' d\Omega_\nu}{2E_\nu} \frac{1}{2E_p} \delta\left(m_n - E_e - E_\nu - \sqrt{k^2 + k'^2 + 2kk' \cos \theta_{e\nu}} + m_p^2\right)$$

Lo spazio delle fasi

- Ricordiamo che il decadimento è confinato su un piano

$$d\Phi = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{k^2 dk d\Omega_e}{2E_e} \frac{k'^2 dk' d\Omega_\nu}{2E_\nu} \frac{1}{2E_p} \delta(\dots) \quad |\mathbf{k}| \equiv k$$

$$\delta(\dots) = \delta(f(\cos \theta_{e\nu}))$$

- Possiamo scegliere la direzione dell'elettrone come riferimento per gli angoli e integrare su $d\Omega_e \rightarrow 4\pi$

$$d\Phi = \frac{2}{(2\pi)^4} \frac{k^2 dk}{2E_e} \frac{k'^2 dk' d\Omega_\nu}{2E_\nu} \frac{1}{2E_p} \delta(\dots)$$

- Inoltre, con la scelta fatta, $d\Omega_\nu = 2\pi d \cos \theta_{e\nu}$

$$d\Phi = \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{k^2 dk}{2E_e} \frac{k'^2 dk' d \cos \theta_{e\nu}}{2E_\nu} \frac{1}{2E_p} \delta(\dots)$$

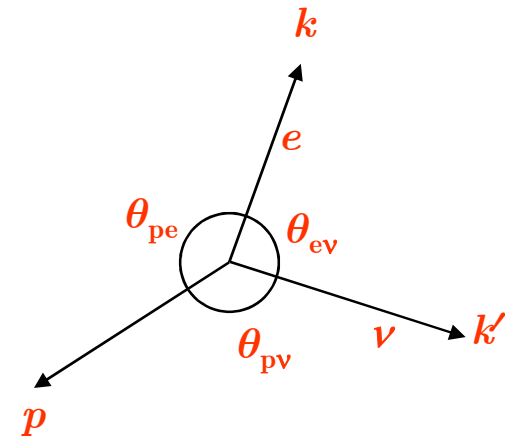
- Infine, dal momento che

$$E^2 = p^2 + m^2 \rightarrow E dE = p dp$$

- Otteniamo

$$d\Phi = \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{E_e k dE_e}{2E_e} \frac{E_\nu k' dE_\nu d \cos \theta_{e\nu}}{2E_\nu} \frac{1}{2E_p} \delta(\dots)$$

Scegliamo come variabili le due energie E_e e E_ν



$$d\Phi = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_p} k dE_e k' dE_\nu d \cos \theta_{e\nu} \delta(\dots)$$

Lo spazio delle fasi

- Integriamo sull'angolo $\theta_{e\nu}$

- Dobbiamo tenere conto della funzione

$\delta(f(x))$ dove $x = \cos\theta_{e\nu}$

$$f(x) = m_n - E_e - E_\nu - E_p(x) \quad E_p(x) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mathbf{k}'^2 - 2kk'x + m_p^2}$$

- Ricordiamo che $\mathbf{p} = -(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$. La funzione si annulla per $\cos\theta_{e\nu} = \cos\bar{\theta}_{e\nu} \equiv x_0$

- $\bar{\theta}_{e\nu}$ è l'angolo fissato dalla conservazione di energia e quantità di moto

- Ricordando la proprietà della funzione $\delta(x)$

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|} \quad x_0 = \cos\bar{\theta}_{e\nu} \quad \rightarrow \quad E_p = m_n - E_e - E_\nu$$

- Otteniamo

$$f'(x) = \frac{-kk'}{\sqrt{k^2 + k'^2 - 2kk'x + m_p^2}} \quad f'(x_0) = -\frac{kk'}{E_p}$$

- Sostituiamo nella formula per $d\Phi$ e integriamo sull'angolo

$$d\Phi = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_p} k dE_e k' dE_\nu d\cos\theta_{e\nu} \frac{\delta(\cos\bar{\theta}_{e\nu} - \cos\theta_{e\nu})}{\frac{kk'}{E_p}}$$

$$d\Phi = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} dE_e dE_\nu$$

Dalitz Plot

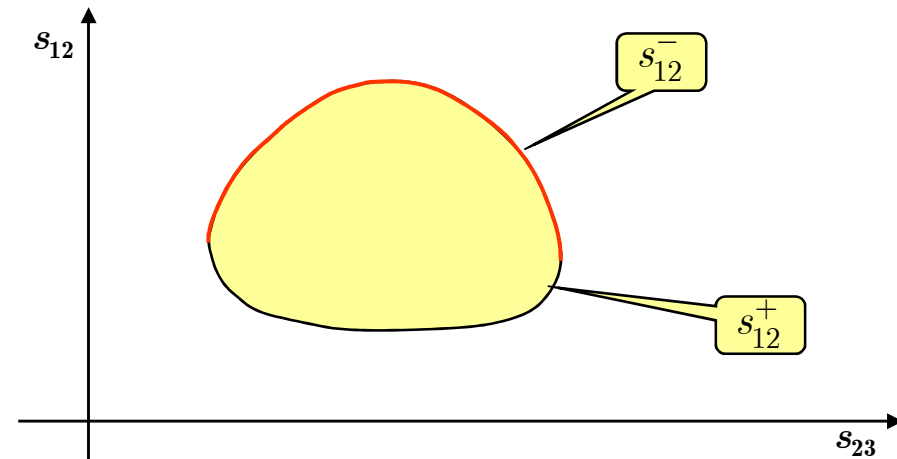
- Il risultato ottenuto è importante per il Dalitz Plot

- Ricordiamo le relazioni

$$E_1 = \frac{s + m_1^2 - s_{23}}{2\sqrt{s}}$$

$$E_2 = \frac{s + m_2^2 - s_{31}}{2\sqrt{s}}$$

$$E_3 = \frac{s + m_3^2 - s_{12}}{2\sqrt{s}}$$



- Da esse segue che $dE_1 = -2m_n ds_{23}$

- E le relazioni ottenute da sostituzioni cicliche degli indici

- Le relazioni

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_A} |\mathfrak{M}|^2 d\Phi_n$$

$$d\Phi = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} dE_e dE_\nu$$

$$\frac{d\Gamma}{dE_e dE_\nu} = \frac{1}{2m_A} \frac{|\mathfrak{M}|^2}{4(2\pi)^3}$$

- Implicano

- La misura di $d\Gamma/dE_1 dE_2$ è una misura di $|\mathfrak{M}|^2$: se l'elemento di matrice costante, lo spazio nel piano $E_1 - E_2$ (o $s_{12} - s_{23}$) è popolato uniformemente
- Deviazioni dall'uniformità danno indicazioni sulla dipendenza di $|\mathfrak{M}|^2$ dalle variabili $E_1 - E_2$

Esercizi

- In attesa di avere l'elemento di matrice si può impostare il programma per la costruzione di un generatore Montecarlo per il decadimento β :
 - Scrivere un programma per disegnare la regione fisica del decadimento
 - Generare una coppia di numeri casuali (E_1, E_2) distribuiti uniformemente nel piano all'interno della regione fisica
 - Utilizzando le formule cinematiche ricavate precedentemente scrivere i tre 4-vettori p_i del protone, del neutrone, del neutrino
 - Le formule precedenti permettono di scrivere i 3 vettori in un piano.
 - Ruotare con un angolo casuale i 3 vettori su questo piano
 - Generare una direzione casuale nello spazio e ruotare i 3 vettori in modo che giacciono sul piano perpendicolare alla direzione generata

Approssimazione non relativistica

- Ricordiamo l'espressione dell'ampiezza invariante

$$\mathfrak{M} = -iG \bar{u}_{p_p} \gamma^\mu u_{p_n} \bar{u}_{p_e} \gamma_\mu v_{p_\nu}$$

- Concentriamoci sulla parte relativa ai nucleoni (corrente adronica)
- Nella rappresentazione di Dirac lo spinore del protone è

$$u_p = \sqrt{E_p + m_p} \begin{pmatrix} \chi^s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m_p} \chi^s \end{pmatrix}$$
- Analogamente per lo spinore del neutrone
- Ricordiamo l'approssimazione non relativistica nella rappresentazione scelta

• Pertanto

$$E_p \approx m_p \quad \frac{\mathbf{p}}{m_p} \approx 0 \quad u_p \approx \sqrt{2m_p} \begin{pmatrix} \chi^s \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_p = \sqrt{2m_p} \begin{pmatrix} \chi^{\dagger s} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \sqrt{2m_p} \begin{pmatrix} \chi^{\dagger s} & 0 \end{pmatrix}$$

- Per la componente temporale della corrente adronica otteniamo pertanto
($m_p \approx m_n \approx m_N$)

$$\bar{u}_p \gamma^0 u_n = \sqrt{2m_p} \sqrt{2m_n} \begin{pmatrix} \chi^{\dagger r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^s \\ 0 \end{pmatrix} = 2m_N \chi^{\dagger r} \chi^s = 2m_N \delta_{rs}$$

Approssimazione non relativistica

- Per le componenti spaziali della corrente adronica

$$\bar{u}_p \gamma u_n = \sqrt{2m_p} \sqrt{2m_n} \begin{pmatrix} \chi^{\dagger r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^r \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2m_p} \sqrt{2m_n} \begin{pmatrix} \chi^{\dagger r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma \chi^r \end{pmatrix} = 0$$

- Vediamo che per $\mu=1,2,3$ le matrici γ^μ mescolano le componenti “large” e “small” degli spinori e pertanto, nell'approssimazione non relativistica danno contributo nullo

$$\bar{u}_p \gamma^\mu u_n \approx \begin{cases} 2m_N \chi^{s\dagger} \chi^r = 2m_N \delta_{rs} & \mu = 0 \\ 0 & \mu \neq 0 \end{cases}$$

- Il risultato implica che la interazione di Fermi (vettoriale) non prevede che lo spin del nucleone (o del nucleo) possa cambiare
- Nello studio dei decadimenti β furono presto trovati nuclei che decadevano con variazione dello spin nucleare:

- Ad esempio

$$\begin{aligned} He^6(0^+) &\rightarrow Li^6(1^+) + e^- + \bar{\nu} \\ B^{12}(1^+) &\rightarrow C^{12}(0^+) + e^- + \bar{\nu} \end{aligned}$$

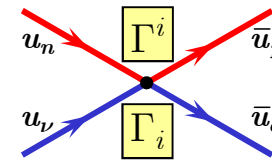
- Divenne pertanto presto chiaro che l'interazione vettoriale doveva essere generalizzata per descrivere anche i decadimenti con variazione dello spin nucleare

Generalizzazione della Teoria di Fermi

- La scelta di interazione fra correnti vettoriali è solo una delle varie possibili
 - La richiesta importante da soddisfare è che l'Hamiltoniana sia uno scalare

$$\mathcal{H}' = G (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu) + h.c.$$

- L'interazione di Fermi è il prodotto scalare di due correnti vettoriali



- Si può generalizzare l'interazione introducendo altre matrici nel vertice di interazione

$$\mathcal{H}' = G \sum_{i=S,V,A,T,P} C_i (\bar{\psi}_p \Gamma^i \psi_n) (\bar{\psi}_e \Gamma_i \psi_\nu) + h.c.$$

- Le matrici Γ_i sono le seguenti combinazioni di matrici γ che hanno ben precise proprietà di trasformazione nelle trasformazioni di Lorentz:

• $\Gamma_S = 1$	Scalare	16 matrici indipendenti
• $\Gamma_V = \gamma^\mu$	Vettore	
• $\Gamma_A = \gamma^5 \gamma^\mu$	Vettore Assiale	
• $\Gamma_T = \sigma^{\mu\nu} = i/2 [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$	Tensore	
• $\Gamma_P = \gamma^5$	Pseudoscalare	

Studieremo in seguito il perché di queste denominazioni

Generalizzazione della Teoria di Fermi

- Verifichiamo che questa generalizzazione permette anche le variazioni dello spin nucleare
- Come nel caso vettoriale utilizziamo la rappresentazione di Dirac

- Ricordiamo anche la matrice γ^5

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

- Interazione scalare

$$\Gamma_S = I$$

$$\bar{u}_p \Gamma_S u_n = \bar{u}_p I u_n \approx \sqrt{4m_p m_n} (\chi^{\dagger s}, 0) \gamma^0 I \begin{pmatrix} \chi^r \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{4m_p m_n} \chi^{\dagger s} \chi^r$$

- Gli spinori χ_r e χ_s rappresentano gli stati di spin del nucleone prima e dopo il decadimento
- Otteniamo pertanto ($m_p \approx m_n \approx m_N$)

$$\bar{u}_p u_n \approx 2m_N \chi^{\dagger s} \chi^r = 2m_N \delta_{sr}$$

- Come nel caso vettoriale l'interazione scalare non permette variazioni di spin

Generalizzazione della Teoria di Fermi

- **Interazione Vettoriale Assiale**

$$\Gamma_A = \gamma^5 \gamma^\mu$$

- **Scriviamo esplicitamente le 4 matrici Γ_A**

$$\gamma^5 \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^5 \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}$$

- **Possiamo subito notare che adesso la matrice $\gamma^5 \gamma^0$ mescola componenti large e small al contrario delle matrici $\gamma^5 \gamma^i$**
- **Calcoliamo innanzitutto la componente temporale corrente adronica**

$$\begin{aligned} \bar{u}_p \gamma^5 \gamma^0 u_n &\approx 2m_N (\chi^{\dagger s}, 0) \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \begin{pmatrix} \chi^r \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2m_N (\chi^{\dagger s}, 0) \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^r \\ 0 \end{pmatrix} = 2m_N (\chi^{\dagger s}, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^r \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Generalizzazione della Teoria di Fermi

$$\gamma^5 \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^5 \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}$$

- **Calcoliamo adesso le componenti spaziali della corrente adronica**

$$\begin{aligned} \bar{u}_p \gamma^5 \gamma^i u_n &\approx 2m_N (\chi^{\dagger s}, 0) \gamma^0 \gamma^5 \gamma^i \begin{pmatrix} \chi^r \\ 0 \end{pmatrix} = 2m_N (\chi^{\dagger s}, 0) \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^r \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2m_N (\chi^{\dagger s}, 0) \begin{pmatrix} -\sigma^i \chi^r \\ 0 \end{pmatrix} = -2m_N \chi^{\dagger s} \sigma^i \chi^r \end{aligned}$$

- **In conclusione**

$$\bar{u}_p \gamma^5 \gamma^\mu u_n \approx \begin{cases} 0 & \mu = 0 \\ -2m_N \chi^{\dagger s} \sigma^\mu \chi^r & \mu \neq 0 \end{cases}$$

Interazione Assiale

- **Vediamo pertanto che l'Interazione Assiale permette transizioni nucleari con variazione dello spin**

Generalizzazione della Teoria di Fermi

- **Interazione Tensoriale**

$$\Gamma_T = \begin{cases} 0 & \mu = \nu \\ i\gamma^\mu \gamma^\nu & \mu \neq \nu \end{cases}$$

- **Iniziamo con le 3 matrici σ^{0k} ($k = 1, 3$)**

$$\sigma^{0k} = i\gamma^0 \gamma^k = i \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}$$

- **Queste matrici mescolano componenti large e small e pertanto $\bar{u}_p \sigma^{0k} u_n \approx 0$**
- **Consideriamo adesso le restanti 3 matrici σ^{kl} ($k, l = 1, 3 \ k \neq l$)**
- **Abbiamo già visto che (con k, l, m ciclici e $k, l, m = 1, 3$)**

$$\sigma^{k,l} = \Sigma^m \quad \Sigma^m = \begin{pmatrix} \sigma^m & 0 \\ 0 & \sigma^m \end{pmatrix}$$

- **Otteniamo pertanto un risultato analogo a quello dell'interazione assiale**

$$\bar{u}_p \sigma^{\mu\nu} u_n \approx \begin{cases} 0 & \mu \text{ o } \nu = 0 \\ 2m_N \chi^{\dagger s} \sigma^m \chi^r & \mu, \nu = 1, 3 \end{cases}$$

**Interazione
Tensoriale**

- **L'Interazione Tensoriale permette transizioni nucleari con variazione dello spin**

Generalizzazione della Teoria di Fermi

- Per finire calcoliamo l'elemento di matrice della corrente adronica per l'Interazione Pseudoscalare

$$\Gamma_P = \gamma^5$$

- Ricordiamo la forma della matrice γ^5 nella rappresentazione di Pauli-Dirac

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice γ^5 chiaramente mescola le componenti large e small
- Pertanto, nell'approssimazione non relativistica

$$\bar{u}_p \gamma^5 u_n \approx 0$$

Interazione
Pseudoscalare

- Pertanto l'Interazione Pseudoscalare, nell'approssimazione non relativistica, non può contribuire al decadimento β

Generalizzazione della Teoria di Fermi

- Riassumendo, la parte relativa ai nucleoni dell'elemento di matrice nella approssimazione non relativistica o "statica" si può approssimare così

Accoppiamento	Elemento di Matrice Nucleare		
	Forma covariante	Approssimazione Statica	
S	$\bar{u}_p u_n$	$2m_N \chi^{\dagger s} \chi^r$	
V	$\bar{u}_p \gamma^\mu u_n$	$2m_N \chi^{\dagger s} \chi^r$	$\mu = 0$
A	$\bar{u}_p \gamma^5 \gamma^k u_n$	$2m_N \chi^{\dagger s} \sigma^k \chi^r$	$k \neq 0$
T	$\bar{u}_p \sigma^{\mu\nu} u_n$	$2m_N \chi^{\dagger s} \sigma^k \chi^r$	$\mu, \nu \neq 0$ $k \text{ cyclic}$
P	$\bar{u}_p \gamma^5 u_n$	0	

Elemento di matrice nucleare

- La parte relativa al nucleone deve essere generalizzata per tenere conto del fatto che, in generale, il nucleone è in uno stato legato nel nucleo

$$\bar{u}_p \Gamma_X u_n \rightarrow \langle X \rangle \equiv \langle N_{Z+1}^A | \hat{O} \hat{\Gamma}_i | N_Z^A \rangle$$

- Gli stati $|N_Z^A\rangle$ e $|N_{Z+1}^A\rangle$ sono rispettivamente le funzioni d'onda iniziale e finale del nucleo
- L'operatore O permette un elemento di matrice non nullo fra nuclei diversi
 - Distrugge un neutrone nello stato iniziale
 - Crea un protone nello stato finale
- L'operatore Γ è una delle matrici introdotte e determina la variazione di spin
- Gli elementi di matrice nucleare sono di due tipi e vengono indicati

$$\langle 1 \rangle \equiv \langle N_{Z+1}^A | \hat{1} \hat{O} | N_Z^A \rangle \quad \langle \sigma \rangle \equiv \langle N_{Z+1}^A | \hat{\sigma} \hat{O} | N_Z^A \rangle \quad 3 \begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{cases}$$

- Il calcolo di questa parte dell'elemento di matrice deve tenere conto della struttura nucleare del particolare nucleo in esame
- Non ci occuperemo di questa parte del calcolo

Generalizzazione della Teoria di Fermi

- Dal momento che l'interazione è

$$\mathcal{H}_I' = G \sum_{i=S,V,A,T} C_i (\bar{\psi}_p \Gamma^i \psi_n) (\bar{\psi}_e \Gamma_i \psi_\nu) + h.c.$$

- L'ampiezza invariante ha 4 termini

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_S + \mathfrak{M}_V + \mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_T$$

- Ricordando quanto detto per l'elemento di matrice nucleare abbiamo

- **Scalare**

$$\mathfrak{M}_S = G C_S \langle 1 \rangle \bar{u}_e(k) v_\nu(k')$$

- **Vettoriale**

$$\mathfrak{M}_V = G C_V \langle 1 \rangle \bar{u}_e(k) \gamma^0 v_\nu(k')$$

- **Vettoriale Assiale**

$$\mathfrak{M}_A = G C_A \langle \sigma_j \rangle \bar{u}_e(k) \gamma^5 \gamma^j v_\nu(k')$$

Somma di 3 termini
($j = 1, 2, 3$)

- **Tensoriale**

$$\mathfrak{M}_T = 2 G C_T \langle \sigma_j \rangle \bar{u}_e(k) \Sigma^j v_\nu(k')$$

Nella somma tensoriale
ci sono 6 termini
(quindi il fattore 2)

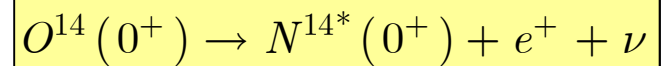
Generalizzazione della Teoria di Fermi

- Riassumendo:

- Gli accoppiamenti di tipo S e V non possono variare lo spin del nucleone
 - Le transizioni con accoppiamenti S e V sono le Transizioni di Fermi
- Gli accoppiamenti di tipo A e T possono variare lo spin del nucleone
 - Le transizioni con accoppiamenti A e T sono le Transizioni di Gamov-Teller
- Gli accoppiamenti di tipo P si annullano nel limite statico

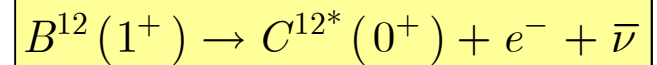
- Regole di selezione:

- Transizioni nucleari con $J_i = J_f = 0$
sono dette Transizioni Pure di Fermi



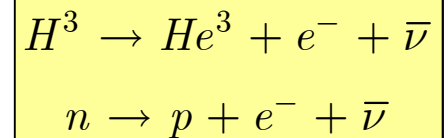
- Possono coinvolgere solo le ampiezze $\mathfrak{M}_S$ e $\mathfrak{M}_V$

- Transizioni nucleari con $\Delta J = |J_i - J_f| = 1$
sono dette Transizioni Pure di Gamov-Teller



- Possono coinvolgere solo le ampiezze $\mathfrak{M}_A$ e $\mathfrak{M}_T$

- Transizioni nucleari con $J_i = J_f$ $J_i, J_f \neq 0$
sono dette Transizioni Miste



- Possono coinvolgere tutte le ampiezze $\mathfrak{M}_S, \mathfrak{M}_V, \mathfrak{M}_A$ e $\mathfrak{M}_T$

La Larghezza di Decadimento

- Per circa 20 anni l'attività sperimentale fu molto intensa per cercare di capire quali dei possibili accoppiamenti fossero effettivamente realizzati in natura
- L'osservabile sperimentale più semplice è lo spettro di energia dell'elettrone

- La larghezza di decadimento è data da

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_n} |\mathfrak{M}|^2 d\Phi$$

- L'elemento dello Spazio delle Fasi

$$d\Phi = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E_{k'}} \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} (2\pi)^4 \delta^4(P - k - k' - p)$$

- L'elemento di matrice $\mathfrak{M}$ possiede degli indici che identificano gli stati di polarizzazione iniziale e finale delle particelle $\rightarrow \mathfrak{M}_{s_i, s_1, s_2, s_3}$
- Sappiamo che se non si osserva lo stato di polarizzazione finale occorre sommare i corrispondenti elementi $|\mathfrak{M}|^2$ (somma su s_1, s_2, s_3)
- Se lo stato iniziale non è polarizzato occorre mediare sulle polarizzazioni possibili dello stato iniziale (somma su s_i)
- Se non si osservano effetti polarizzatori si definisce pertanto

$$\overline{|\mathfrak{M}|^2} = \frac{1}{2} \sum_{s_i=1}^2 \sum_{s_1, s_2, s_3=1}^2 |\mathfrak{M}_{s_i, s_1, s_2, s_3}|^2$$

Termini di Interferenza

- Il modulo quadrato dell'elemento di matrice contiene termini di interferenza

$$|\mathfrak{M}|^2 = \frac{1}{2} \sum_s \mathfrak{M}_s^* \mathfrak{M}_s = \frac{1}{2} \sum_s (\mathfrak{M}_S^* \mathfrak{M}_S + \dots + \mathfrak{M}_S^* \mathfrak{M}_A + \dots)$$

- L'indice s rappresenta tutti gli indici di spin
- Per brevità si è indicato solo un termine di interferenza (SA) senza indici s
- Dimostriamo che i termini di interferenza SA, ST, VA, VT si annullano
- Per tutti i termini sopra indicati la parte relativa all'elemento di matrice nucleare contiene termini tipo $\langle 1 \rangle$ e $\langle \sigma \rangle$

- Pertanto, trascurando costanti non essenziali (il risultato sarà nullo)

$$\langle 1 \rangle^* \langle \sigma^j \rangle = (\chi^{\dagger s} \chi^r)^* \chi^{\dagger s} \sigma^j \chi^r = \chi^{\dagger r} \chi^s \chi^{\dagger s} \sigma^j \chi^r \quad \text{L'indice } j \text{ si satura con l'indice leptonico corrispondente}$$

- Utilizziamo la rappresentazione esplicita per gli spinori di Pauli

$$\chi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \chi_k^s = \delta_{s,k}$$

- Inseriamo nell'espressione del termine di interferenza

$$\chi^{\dagger r} \chi^s \chi^{\dagger s} \sigma^j \chi^r = \sum_k \chi_k^{\dagger r} \chi_k^s \sum_{l,m} \chi_l^{\dagger s} \sigma_{l,m}^j \chi_m^r$$

Termini di Interferenza

$$\chi^{\dagger r} \chi^s \chi^{\dagger s} \sigma^j \chi^r = \sum_k \chi_k^{\dagger r} \chi_k^s \sum_{l,m} \chi_l^{\dagger s} \sigma_{l,m}^j \chi_m^r$$

- Sommiamo sugli indici di polarizzazione iniziale e finale

$$\sum_{s,r} \left(\sum_k \chi_k^{\dagger r} \chi_k^s \sum_{l,m} \chi_l^{\dagger s} \sigma_{l,m}^j \chi_m^r \right) = \sum_{s,r} \left(\sum_k \delta_{k,r} \delta_{k,s} \sum_{l,m} \delta_{l,s} \sigma_{l,m}^j \delta_{r,m} \right) = \sum_{s,r} \delta_{s,r} \sigma_{s,r}^j$$

- Pertanto otteniamo in definitiva

$$\sum_{r,s} \langle 1 \rangle^* \langle \sigma^j \rangle = \sum_{s,r} \delta_{s,r} \sigma_{s,r}^j = \sum_r \sigma_{rr}^j = \text{Tr} \sigma^j = 0$$

- Pertanto i termini di interferenza fra elementi di matrice di Fermi e di Gamov-Teller si annullano se mediati sugli stati di polarizzazione
- Di conseguenza il quadrato (mediato) dell'ampiezza invariante diventa

$$|\overline{\mathfrak{M}_S + \mathfrak{M}_V + \mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_T}|^2 = |\overline{\mathfrak{M}_S + \mathfrak{M}_V}|^2 + |\overline{\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_T}|^2 \equiv |\overline{\mathfrak{M}_F}|^2 + |\overline{\mathfrak{M}_{GT}}|^2$$

- Il risultato appena ottenuto permette di semplificare il calcolo
 - Sottolineiamo che succede solo se si media sugli stati di polarizzazione
 - Per questo motivi i calcoli per osservabili che dipendono dalla polarizzazione sono un po' più lunghi

Somme sugli stati di polarizzazione nucleari

- Valutiamo adesso i termini restanti negli elementi di matrice nucleari
- Consideriamo ad esempio l'elemento di matrice per una transizione di Fermi

$$|\mathfrak{M}_F|^2 = \overline{\mathfrak{M}_S^* \mathfrak{M}_S} + \overline{\mathfrak{M}_V^* \mathfrak{M}_V} + 2 \operatorname{Re} \overline{\mathfrak{M}_S^* \mathfrak{M}_V}$$

- In tutti e tre i termini compare la somma sulle polarizzazioni di termini

$$\overline{\mathfrak{M}^* \mathfrak{M}} \propto (\overline{u_p} \Gamma^a u_n)^\dagger (\overline{u_p} \Gamma^b u_n)$$

- Abbiamo indicato la matrice genericamente Γ perchè considerazioni identiche valgono per le transizioni di Gamov-Teller

- Utilizziamo sempre l'approssimazione non-relativistica $u_N \approx \sqrt{2m_N} \begin{pmatrix} \chi^s \\ 0 \end{pmatrix}$

- La parte dell'elemento di matrice dovuta agli spinori degli adroni è

$$\overline{\mathfrak{M}^* \mathfrak{M}} \rightarrow 4m_N^2 \sum_{rs} (\chi^{\dagger s} \Gamma^a \chi^r)^\dagger (\chi^{\dagger s} \Gamma^b \chi^r) = 4m_N^2 \sum_{rs} (\chi^{\dagger r} \Gamma^{a\dagger} \chi^s) (\chi^{\dagger s} \Gamma^b \chi^r)$$

- Con l'approssimazione non relativistica utilizzata vale $\Gamma^\dagger = \Gamma$ e $\chi^\dagger = \chi^T$
- Per finire utilizziamo esplicitamente gli indici matriciali nell'espressione

$$\overline{\mathfrak{M}^* \mathfrak{M}} \propto 4m_N^2 \sum_{r,s} \sum_{jk} (\chi_j^r \Gamma_{jk}^a \chi_k^s) \sum_{lm} (\chi_l^s \Gamma_{lm}^b \chi_m^r)$$

- Ancora una volta utilizziamo la forma esplicita per gli spinori $\chi_k^s = \delta_{s,k}$

$$\overline{\mathfrak{M}^* \mathfrak{M}} \propto 4m_N^2 \sum_{r,s} \sum_{jk} (\delta_{rj} \Gamma_{jk}^a \delta_{sk}) \sum_{lm} (\delta_{sl} \Gamma_{lm}^b \delta_{rm}) = 4m_N^2 \sum_{r,s} \Gamma_{rs}^a \Gamma_{sr}^b = 4m_N^2 \operatorname{Tr} [\Gamma^a \Gamma^b]$$

Somme sugli stati di polarizzazione nucleari

- Concludiamo il calcolo considerando esplicitamente i due casi
 - Transizioni di Fermi
 - La matrice Γ è semplicemente la matrice I

$$\overline{\mathfrak{M}}^* \mathfrak{M} \propto 4m_N^2 \text{Tr}[I] = 8m_N^2$$

- Transizioni di Gamov-Teller
 - Le matrici Γ^a sono le matrici di Pauli

$$\overline{\mathfrak{M}}^* \mathfrak{M} \propto 4m_N^2 \text{Tr}[\sigma^a \sigma^b] = 8m_N^2 \delta_{ab}$$

Il tensore leptonico

- Per la parte leptonica dell'elemento di matrice non si usano approssimazioni
 - Si utilizza la teoria di Dirac
 - Occorre calcolare il modulo quadrato degli elementi di matrice del tipo

$$\mathfrak{M}_{fi} \propto \bar{u}_{p_e} \Gamma^a v_{p_\nu}$$

$$\Gamma^a = \hat{1}, \gamma^\mu, \gamma^5 \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}$$

- Per il calcolo di questi termini si possono utilizzare le tecniche di traccia introdotte precedentemente
 - Abbiamo però una piccola complicazione per la presenza del termine di interferenza

$$|\overline{\mathfrak{M}_F}|^2 = |\overline{\mathfrak{M}_S}|^2 + |\overline{\mathfrak{M}_V}|^2 + 2 \operatorname{Re} \overline{\mathfrak{M}_S^*} \mathfrak{M}_V$$

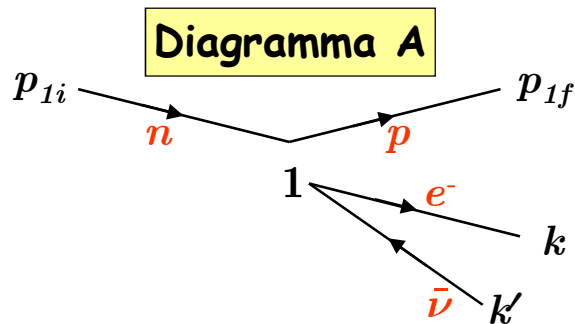
- In realtà gli spinori e la loro posizione sono gli stessi in tutti e 3 i termini
 - In particolare nel termine di interferenza (ad esempio SV)

$$\overline{\mathfrak{M}_S} \mathfrak{M}_V \propto (\bar{u}_{p_e} \hat{1} v_{p_\nu})^\dagger (\bar{u}_{p_e} \gamma^\mu v_{p_\nu}) = (\bar{v}_{p_\nu} \hat{1} u_{p_e}) (\bar{u}_{p_e} \gamma^\mu v_{p_\nu})$$

- La struttura è la stessa degli altri termini
- I vertici sono invece mescolati
- Un esempio chiarirà più di ogni altra spiegazione

- Somme sulle polarizzazioni
- Relazioni di completezza

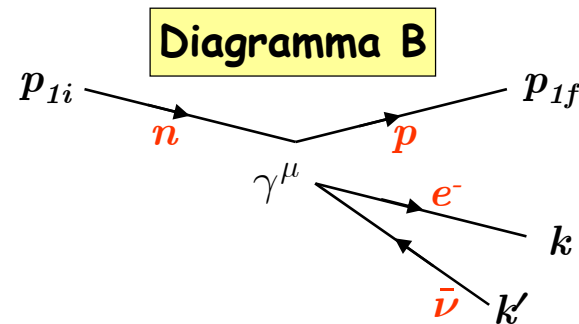
Elementi di matrice



$$(\not{k} + m_e) 1 (\not{k}' - m_\nu) 1$$

• Per i “quadrati” si introducono nell'ordine:

- Fermione
- Vertice
- Anti-Fermione
- Vertice



$$(\not{k} + m_e) \gamma^\mu (\not{k}' - m_\nu) \overline{\gamma}^\nu$$

• Per il termine di “interferenza”:

- Fermione (diagramma A)
- Vertice (diagramma A)
- Anti-Fermione (diagramma B)
- Vertice (diagramma B)

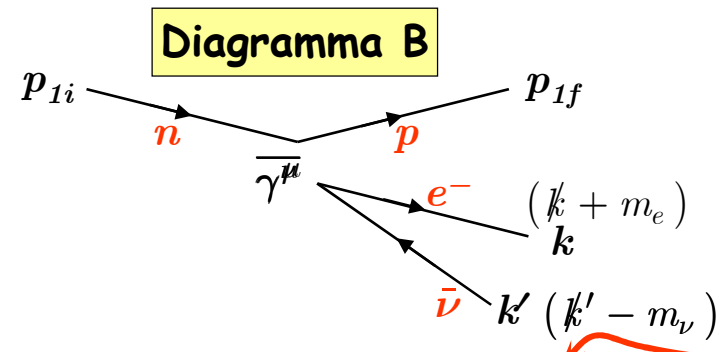
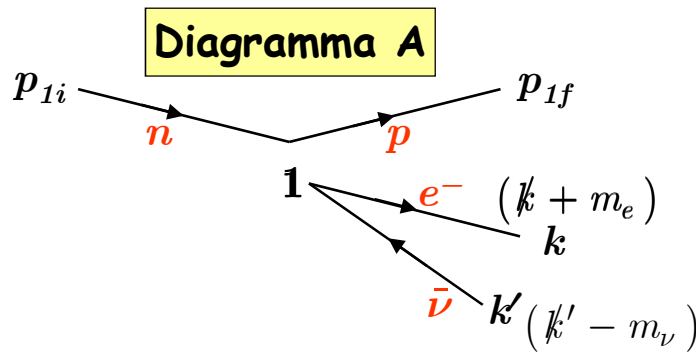
$$(\not{k} + m_e) 1 (\not{k}' - m_\nu) \overline{\gamma}^\nu$$

N.B.: il secondo vertice introduce l'aggiunto spinoriale della matrice di vertice

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}}_F|^2 &= C_S^2 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(\not{k}' - m_\nu)] + C_V^2 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)\gamma^0(\not{k}' - m_\nu)\gamma^0] + \\ &+ 2\text{Re}[C_S C_V 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(\not{k}' - m_\nu)\gamma^0]] \end{aligned}$$



Elementi di matrice



• Per i “quadrati” si introducono nell'ordine:

- Fermione
- Vertice
- Anti-Fermione
- Vertice

• Per il termine di “interferenza”:

- Fermione (diagramma A)
- Vertice (diagramma A)
- Anti-Fermione (diagramma B)
- Vertice (diagramma B)

N.B.: il secondo vertice introduce l'aggiunto spinoriale della matrice di vertice

$$|\overline{\mathfrak{M}}_F|^2 = C_S^2 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(\not{k}' - m_\nu)] + C_V^2 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)\gamma^0(\not{k}' - m_\nu)\gamma^0] +$$

$$+ 2\text{Re}[C_S C_V 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(\not{k}' - m_\nu)\gamma^0]]$$

L'elemento di Matrice

- Riepilogando, l'elemento di matrice risulta

$$\overline{|\mathfrak{M}_S + \mathfrak{M}_V + \mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_T|^2} = \overline{|\mathfrak{M}_S + \mathfrak{M}_V|^2} + \overline{|\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_T|^2} = \overline{|\mathfrak{M}_F|^2} + \overline{|\mathfrak{M}_{GT}|^2}$$

- Calcoliamo il termine relativo alle transizioni di Fermi $\overline{|\mathfrak{M}_F|^2}$

$$\overline{|\mathfrak{M}_F|^2} = \overline{|\mathfrak{M}_S|^2} + \overline{|\mathfrak{M}_V|^2} + 2 \operatorname{Re} \overline{\mathfrak{M}_S^* \mathfrak{M}_V}$$

- Abbiamo visto che

$$\mathfrak{M}_S = GC_S \langle 1 \rangle \bar{u}_e(k) v_\nu(k') \quad \mathfrak{M}_V = GC_V \langle 1 \rangle \bar{u}_e(k) \gamma^0 v_\nu(k')$$

- Dove abbiamo anche calcolato $\langle 1 \rangle = 8m_N^2$

- Assumendo C_S e C_V reali otteniamo

$$\begin{aligned} \overline{|\mathfrak{M}_F|^2} &= G^2 C_S^2 4m_N^2 \operatorname{Tr}[(\not{k} + m_e)(\not{k}' - m_\nu)] + \\ &+ G^2 C_V^2 4m_N^2 \operatorname{Tr}[(\not{k} + m_e) \gamma^0 (\not{k}' - m_\nu) \gamma^0] + \\ &+ 2 \operatorname{Re}[G^2 C_S C_V 4m_N^2 \operatorname{Tr}[(\not{k} + m_e)(\not{k}' - m_\nu) \gamma^0]] \end{aligned}$$

- Per il momento non indicheremo più G^2 e lo reintrodurremo alla fine del calcolo

L'elemento di Matrice

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}}_F|^2 &= C_S^2 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(\not{k}' - \cancel{m_\nu})] + C_V^2 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)\gamma^0(\not{k}' - \cancel{m_\nu})\gamma^0] + \\ &+ 2\text{Re}[C_S C_V 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(\not{k}' - \cancel{m_\nu})\gamma^0]] \end{aligned}$$

- **Assumiamo** $m_\nu = 0$

- **Sviluppiamo ulteriormente ricordando**

$$\text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}] = 0 \quad n \text{ dispari}$$

$$|\overline{\mathfrak{M}}_F|^2 = C_S^2 4m_N^2 \text{Tr}[\not{k}\not{k}'] + C_V^2 4m_N^2 \text{Tr}[\not{k}\gamma^0\not{k}'\gamma^0] + 2\text{Re}[C_S C_V 4m_N^2 \text{Tr}[m_e\not{k}'\gamma^0]]$$

- **A questo punto calcoliamo le tracce ricordando le due regole**

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho] = 4g^{\mu\nu}g^{\sigma\rho} - 4g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} + 4g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}$$

- **In definitiva**

$$|\overline{\mathfrak{M}}_F|^2 = C_S^2 4m_N^2 4k \cdot k' + C_V^2 4m_N^2 4(E_e E_\nu - k \cdot k' + E_e E_\nu) + 2\text{Re}[C_S C_V 4m_N^2 4m_e E_\nu]$$

$$|\overline{\mathfrak{M}}_F|^2 = 16m_N^2 [C_S^2 k \cdot k' + C_V^2 (2E_e E_\nu - k \cdot k') + 2C_S C_V m_e E_\nu]$$



L'elemento di Matrice

$$|\overline{\mathfrak{M}_F}|^2 = 16m_N^2 [C_S^2 k \cdot k' + C_V^2 (2E_e E_\nu - k \cdot k') + 2C_S C_V m_e E_\nu]$$

$$|\overline{\mathfrak{M}_F}|^2 = 16m_N^2 [C_S^2 (E_e E_\nu - \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\nu) + C_V^2 (2E_e E_\nu - k \cdot k') + 2C_S C_V m_e E_\nu]$$

$$|\overline{\mathfrak{M}_F}|^2 = 16m_N^2 [C_S^2 (E_e E_\nu - \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\nu) + C_V^2 (2E_e E_\nu - E_e E_\nu + \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\nu) + 2C_S C_V m_e E_\nu]$$

$$|\overline{\mathfrak{M}_F}|^2 = 16m_N^2 [C_S^2 (E_e E_\nu - \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\nu) + C_V^2 (E_e E_\nu + \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\nu) + 2C_S C_V m_e E_\nu]$$

$$|\overline{\mathfrak{M}_F}|^2 = 16m_N^2 E_e E_\nu \left[C_S^2 \left(1 - \frac{\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\nu}{E_e E_\nu} \right) + C_V^2 \left(1 + \frac{\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\nu}{E_e E_\nu} \right) + 2C_S C_V \frac{m_e E_\nu}{E_e E_\nu} \right]$$

$$|\overline{\mathfrak{M}_F}|^2 = 16m_N^2 E_e E_\nu \left[C_S^2 (1 - \beta_e \cdot \beta_\nu) + C_V^2 (1 + \beta_e \cdot \beta_\nu) + 2C_S C_V \frac{m_e}{E_e} \right]$$

- Per finire, reintroduciamo la costante G e otteniamo

$$|\overline{\mathfrak{M}_F}|^2 = 16m_N^2 E_e E_\nu G^2 \left[C_S^2 (1 - \beta_e \cdot \beta_\nu) + C_V^2 (1 + \beta_e \cdot \beta_\nu) + 2C_S C_V \frac{m_e}{E_e} \right]$$

- Un calcolo analogo per l'elemento di matrice di Gamov-Teller

$$|\overline{\mathfrak{M}_{GT}}|^2 = 16m_N^2 E_e E_\nu G^2 \left[3C_A^2 \left(1 - \frac{1}{3} \beta_e \cdot \beta_\nu \right) + 12C_T^2 \left(1 + \frac{1}{3} \beta_e \cdot \beta_\nu \right) - 12C_A C_T \frac{m_e}{E_e} \right]$$