
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 10

28.10.2024

Scattering di Coulomb
Interazione di due particelle cariche
Sezione d'urto $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

anno accademico 2025-2026

Scattering di Coulomb per particella di spin 0

- Calcoliamo ancora una volta la sezione d'urto per la diffusione Coulombiana
 - Questa volta utilizzando la teoria quantistica dei campi
- La lagrangiana del campo complesso di Klein Gordon è

$$\widehat{\mathcal{L}}_0 = \left(\partial^\mu \widehat{\phi} \right)^\dagger \left(\partial_\mu \widehat{\phi} \right) - m^2 \widehat{\phi}^\dagger \widehat{\phi}$$

- L'introduzione dell'interazione elettromagnetica porta al termine di interazione (confrontare con la slide 93)

$$\widehat{\mathcal{L}}' = -ie \left[\widehat{\phi}^\dagger \left(\partial^\mu \widehat{\phi} \right) - \left(\partial^\mu \widehat{\phi}^\dagger \right) \widehat{\phi} \right] A_\mu + e^2 A^\mu A_\mu \widehat{\phi}^\dagger \widehat{\phi}$$

- Nel seguito faremo un calcolo perturbativo al primo ordine e quindi trascuriamo il termine proporzionale a e^2
- Abbiamo bisogno l'Hamiltoniana di interazione
 - Trascurando il termine e^2 , nonostante $\mathcal{L}'$ contenga derivate di ϕ , si trova¹

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_i \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_0 \widehat{\phi}_i)} \partial_0 \widehat{\phi}_i - \widehat{\mathcal{L}} \quad \widehat{\mathcal{H}}' = ie \left[\widehat{\phi}^\dagger \left(\partial^\mu \widehat{\phi} \right) - \left(\partial^\mu \widehat{\phi}^\dagger \right) \widehat{\phi} \right] A_\mu \quad \widehat{\mathcal{H}}' = -\widehat{\mathcal{L}}'$$

- In definitiva

$$\widehat{\mathcal{H}}' = \widehat{j}^\mu A_\mu \quad \widehat{j}^\mu = ie \left[\widehat{\phi}^\dagger \left(\partial^\mu \widehat{\phi} \right) - \left(\partial^\mu \widehat{\phi}^\dagger \right) \widehat{\phi} \right] \quad \widehat{H}'(t) = \int \widehat{\mathcal{H}}'(x) d^3 \mathbf{r}$$

- ¹ Vedi Aitchison vol.1 § 7.4 (sezione dedicata al campo di Klein-Gordon)



L'elemento di Matrice S

- L'elemento di Matrice che vogliamo calcolare è $S_{if} = \langle f | S | i \rangle$
- Ricordiamo lo sviluppo

$$\hat{S} = \hat{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T[\hat{H}'_I(t_1) \hat{H}'_I(t_2) \dots \hat{H}'_I(t_n)]$$

- Approssimando al primo ordine ($i \neq f$)

potenziale dato
non è quantizzato

$$\begin{aligned} S_{if} &\approx \langle i | \hat{1} | f \rangle - i \langle f | \int \hat{H}'_I(t) dt | i \rangle = \delta_{if} - i \langle f | \int \mathcal{H}'_I(x) d^4x | i \rangle \\ &= -i \int \langle f | \hat{j}^\mu(x) A_\mu(x) | i \rangle d^4x = -i \int \langle f | \hat{j}^\mu(x) | i \rangle A_\mu(x) d^4x \end{aligned}$$

- Calcoliamo l'elemento di matrice della corrente

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ik \cdot x}) \Big|_{k_0=E_{\mathbf{k}}}$$

$$\langle f | \hat{j}^\mu(x) | i \rangle = ie \langle f | [\hat{\phi}^\dagger (\partial^\mu \hat{\phi}) - (\partial^\mu \hat{\phi}^\dagger) \hat{\phi}] | i \rangle$$

$$\langle f | \hat{j}^\mu(x) | i \rangle = ie \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}_1}}} \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}_2}}} \left\langle f \left| \begin{bmatrix} (\hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger e^{ik_1 \cdot x} + \hat{b}_{\mathbf{k}_1} e^{-ik_1 \cdot x}) (-ik_2^\mu \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{-ik_2 \cdot x} + ik_2^\mu \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{ik_2 \cdot x}) - \\ - (ik_1^\mu \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger e^{ik_1 \cdot x} - ik_1^\mu \hat{b}_{\mathbf{k}_1} e^{-ik_1 \cdot x}) (\hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{-ik_2 \cdot x} + \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{ik_2 \cdot x}) \end{bmatrix} \right| i \right\rangle$$

L'elemento di matrice della corrente j^μ

$$\langle f | \hat{j}^\mu(x) | i \rangle = ie \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}_1}}} \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}_2}}} \left\langle f \left| \left[\begin{array}{l} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger e^{ik_1 \cdot x} + \hat{b}_{\mathbf{k}_1} e^{-ik_1 \cdot x} \right) \left(-ik_2^\mu \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{-ik_2 \cdot x} + ik_2^\mu \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{ik_2 \cdot x} \right) - \\ - \left(ik_1^\mu \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger e^{ik_1 \cdot x} - ik_1^\mu \hat{b}_{\mathbf{k}_1} e^{-ik_1 \cdot x} \right) \left(\hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{-ik_2 \cdot x} + \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{ik_2 \cdot x} \right) \end{array} \right] \right| i \right\rangle$$

- Inseriamo gli stati $|i\rangle = |p_i\rangle$ $|f\rangle = |p_f\rangle$

$$|i\rangle = |p_i\rangle = \sqrt{2E_{p_i}} \hat{a}_{p_i}^\dagger |0\rangle \quad |f\rangle = |p_f\rangle = \sqrt{2E_{p_f}} \hat{a}_{p_f}^\dagger |0\rangle$$

- Sviluppiamo i termini nella prima riga (inseriremo alla fine le normalizzazioni)

$$a \quad \langle 0 | \hat{a}_{p_f} \left(-ik_2^\mu e^{-ik_2 \cdot x} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{ik_1 \cdot x} - ik_2^\mu e^{-ik_2 \cdot x} \hat{b}_{\mathbf{k}_1} \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{-ik_1 \cdot x} + ik_2^\mu e^{ik_2 \cdot x} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{ik_1 \cdot x} + ik_2^\mu e^{ik_2 \cdot x} \hat{b}_{\mathbf{k}_1} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{-ik_1 \cdot x} \right) \hat{a}_{p_i}^\dagger | 0 \rangle$$

$$\hat{b}_{\mathbf{k}_1} | 0 \rangle = 0 \quad \langle 0 | \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger = 0$$

$$\langle 0 | \hat{a}_{p_f} \left(-ik_2^\mu e^{-ik_2 \cdot x} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{ik_1 \cdot x} + ik_2^\mu e^{ik_2 \cdot x} \hat{b}_{\mathbf{k}_1} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{-ik_1 \cdot x} \right) \hat{a}_{p_i}^\dagger | 0 \rangle$$

- Sviluppiamo i termini nella seconda riga

$$b \quad \langle 0 | \hat{a}_{p_f} \left(ik_1^\mu \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger e^{ik_1 \cdot x} \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{-ik_2 \cdot x} - ik_1^\mu \hat{b}_{\mathbf{k}_1} e^{-ik_1 \cdot x} \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{-ik_2 \cdot x} + ik_1^\mu \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger e^{ik_1 \cdot x} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{ik_2 \cdot x} - ik_1^\mu \hat{b}_{\mathbf{k}_1} e^{-ik_1 \cdot x} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{ik_2 \cdot x} \right) \hat{a}_{p_i}^\dagger | 0 \rangle$$

$$\hat{b}_{\mathbf{k}_1} | 0 \rangle = 0 \quad \langle 0 | \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger = 0$$

$$\langle 0 | \hat{a}_{p_f} \left(ik_1^\mu \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger e^{ik_1 \cdot x} \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{-ik_2 \cdot x} - ik_1^\mu \hat{b}_{\mathbf{k}_1} e^{-ik_1 \cdot x} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{ik_2 \cdot x} \right) \hat{a}_{p_i}^\dagger | 0 \rangle$$

$\langle f | A | i \rangle$ è la differenza delle due espressioni a e b

$$\langle f | \hat{j}^\mu(x) | i \rangle = ie \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}_1}}} \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}_2}}} \sqrt{2E_{p_i} 2E_{p_f}} \langle f | A | i \rangle$$

L'elemento di matrice della corrente j^μ

- Otteniamo pertanto

$$\begin{aligned}
 \langle f | A | i \rangle &= \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \left(-ik_2^\mu e^{-ik_2 \cdot x} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{ik_1 \cdot x} + ik_2^\mu e^{ik_2 \cdot x} \hat{b}_{\mathbf{k}_1} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{-ik_1 \cdot x} \right) \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger | 0 \rangle - \\
 &\quad \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \left(ik_1^\mu e^{ik_1 \cdot x} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{-ik_2 \cdot x} - ik_1^\mu e^{-ik_1 \cdot x} \hat{b}_{\mathbf{k}_1} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{ik_2 \cdot x} \right) \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger | 0 \rangle = \\
 &= -i(k_2^\mu + k_1^\mu) e^{i(k_1 - k_2) \cdot x} \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger | 0 \rangle + i(k_2^\mu + k_1^\mu) e^{i(k_2 - k_1) \cdot x} \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \hat{b}_{\mathbf{k}_1} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger | 0 \rangle \\
 &= -i(k_2^\mu + k_1^\mu) e^{i(k_1 - k_2) \cdot x} \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\boxed{\mathbf{p}_i \neq \mathbf{p}_f} \quad \hat{a}_{\mathbf{p}_f} | 0 \rangle = 0 \\
 &\hat{a}_{\mathbf{p}_f} \hat{b}_{\mathbf{k}_1} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger = \hat{b}_{\mathbf{k}_1} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_f}
 \end{aligned}$$

- Per finire valutiamo l'ultimo valore di aspettazione

$$\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_i) \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger | 0 \rangle + \underbrace{\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2} | 0 \rangle}_{\hat{a}_{\mathbf{k}_2} | 0 \rangle = 0}$$

$$\boxed{\hat{a}_{\mathbf{k}_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger = \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2} + (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_i)}$$

$$\begin{aligned}
 (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_i) \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger | 0 \rangle &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_i) \underbrace{\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_f} | 0 \rangle}_{\hat{a}_{\mathbf{p}_f} | 0 \rangle = 0} + (2\pi)^6 \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_i) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_f)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle f | A | i \rangle = -i(2\pi)^6 (k_2^\mu + k_1^\mu) e^{i(k_1 - k_2) \cdot x} \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_i) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_f)}$$

L'elemento di matrice della corrente j^μ

- Riepilogando

$$\langle f | \hat{j}^\mu(x) | i \rangle = ie \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}_1}}} \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}_2}}} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i} 2E_{\mathbf{p}_f}} \langle f | A | i \rangle$$

$$\langle f | A | i \rangle = -i(2\pi)^6 (k_2^\mu + k_1^\mu) e^{i(k_1 - k_2) \cdot x} \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_i) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_f)$$

- Otteniamo

$$\langle f | \hat{j}^\mu(x) | i \rangle = e(p_i^\mu + p_f^\mu) e^{i(p_f - p_i) \cdot x}$$

- Possiamo calcolare l'elemento della matrice S

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i \int \langle f | \hat{j}^\mu(x) | i \rangle A_\mu(x) d^4x$$

- Confrontando con la definizione di $\mathcal{A}_{fi}$ $S_{fi} = \delta_{fi} + \mathcal{A}_{fi}$

- Otteniamo

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int \langle f | \hat{j}^\mu(x) | i \rangle A_\mu(x) d^4x = -ie(p_i^\mu + p_f^\mu) \int e^{i(p_f - p_i) \cdot x} A_\mu(x) d^4x$$

- Abbiamo ritrovato il risultato ottenuto con la meccanica quantistica relativistica (slide 96)

$$M_{fi} = ie(p_i^\mu + p_f^\mu) \int d^4x e^{-i(p_i - p_f) \cdot x} A_\mu(x)$$

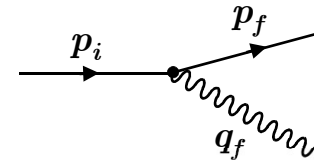
Interazione elettromagnetica: spin $\frac{1}{2}$

- Nel calcolo precedente abbiamo utilizzato l'Hamiltoniana d'interazione

$$\hat{\mathcal{H}}' = \hat{j}^\mu A_\mu \quad \hat{H}'(t) = \int \hat{\mathcal{H}}'(x) d^3\mathbf{r}$$

- Nel calcolo abbiamo considerato il potenziale A^μ un campo classico noto
 - Abbiamo trattato il più semplice problema dello scattering da potenziale
- Consideriamo adesso il caso in cui il campo A^μ sia quantizzato
 - In questo caso i processi che possono essere descritti dall'approssimazione al primo ordine devono contenere un fotone nello stato iniziale o nello stato finale

- Ad esempio la particella emette (oppure assorbe) un fotone



- Lo stato iniziale contiene un elettrone
- Lo stato finale contiene un elettrone e un fotone
- L'elemento di matrice è

$$|i\rangle = \hat{a}_{\mathbf{p}_i, s_i}^\dagger |0\rangle$$

$$|f\rangle = \hat{a}_{\mathbf{p}_f, s_f}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{q}_f, \lambda}^\dagger |0\rangle$$

$$\langle i | \hat{\mathcal{H}}' | f \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_i, s_i} \hat{j}^\mu \hat{A}_\mu \hat{a}_{\mathbf{p}_f, s_f}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{q}_f, \lambda}^\dagger | 0 \rangle$$

- Gli operatori j_μ e A_μ contengono gli opportuni operatori di creazione e distruzione tali che l'elemento di matrice sia diverso da zero
 - Senza un fotone nello stato finale l'elemento di matrice sarebbe nullo
 - Analogamente senza gli elettroni negli stati iniziale e finale

Interazione elettromagnetica: spin $\frac{1}{2}$

- Ad esempio senza un fotone nello stato finale (o iniziale) l'elemento di matrice sarebbe

$$\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \hat{j}^\mu \hat{A}_\mu \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger | 0 \rangle$$

- Ricordiamo lo sviluppo di A^μ

$$\hat{A}^\mu(x) = \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2|\mathbf{k}|}} \left(\varepsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu \hat{c}_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ik \cdot x} + \varepsilon_{\mathbf{k},\lambda}^{\mu*} \hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{ik \cdot x} \right)$$

- Sviluppando l'elemento di matrice come abbiamo fatto per lo scattering da potenziale
 - Gli operatori c possono essere portati a destra e danno contributo nullo
 - Gli operatori $c^\dagger$ possono essere portati a sinistra e danno contributo nullo
- Concludiamo pertanto che se lo stato iniziale o finale non contengono un fotone l'elemento di matrice è nullo

Interazione elettromagnetica: spin $\frac{1}{2}$

- Tuttavia il processo appena descritto non è cinematicamente permesso
 - Infatti, se la particella iniziale e finale coincidono il processo con un fotone reale non è possibile perchè violerebbe la conservazione del 4-momento

$$p_i = p_f \pm q$$

- Il segno $\pm$ si riferisce alla emissione o all'assorbimento di un fotone rispettivamente
- Elevando al quadrato ambo i membri (ricordiamo che per un fotone reale si ha $q^2 = 0$)

$$m^2 = m^2 \pm p \cdot q \quad \longrightarrow \quad \boxed{p_f \cdot q = 0}$$

- Sviluppando il prodotto scalare nel sistema di riposo dell'elettrone finale (p_f) abbiamo pertanto

$$mE_q = 0 \qquad E_q = |\mathbf{q}| = 0$$

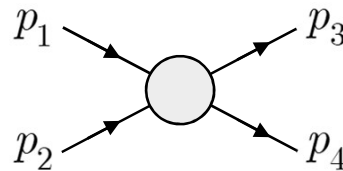
- Vediamo pertanto che la reazione in esame è possibile solo per un fotone reale di energia nulla
 - Notiamo, tuttavia, che sarebbe possibile per un fotone virtuale ($q^2 \neq 0$)

Interazione elettromagnetica: spin $\frac{1}{2}$

- Concludiamo che il primo termine non nullo dello sviluppo perturbativo è del secondo ordine

$$\hat{S} = \hat{1} - \frac{1}{2} \iint d^4x_1 d^4x_2 T[\hat{\mathcal{H}}'_I(x_1) \hat{\mathcal{H}}'_I(x_2)] \quad \hat{\mathcal{H}}'_I = \hat{j}^\mu \hat{A}_\mu$$

- Nel calcolo dell'elemento di matrice per un processo



- Abbiamo i seguenti stati iniziale e finale

$$|i\rangle = |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle = \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger |0\rangle \quad |f\rangle = |\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\rangle = \hat{a}_{\mathbf{p}_3}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_4}^\dagger |0\rangle$$

- Dobbiamo pertanto calcolare

$$\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \hat{a}_{\mathbf{p}_4} T[\hat{\mathcal{H}}'_I(x_1) \hat{\mathcal{H}}'_I(x_2)] \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle$$

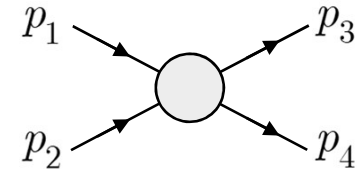
- In forma più estesa

$$\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \hat{a}_{\mathbf{p}_4} T[\hat{j}^\mu(x_1) \hat{A}_\mu(x_1) \hat{j}^\mu(x_2) \hat{A}_\mu(x_2)] \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle$$

Interazione elettromagnetica: spin $\frac{1}{2}$

- Non calcoleremo in dettaglio l'elemento di matrice

$$\left\langle 0 \left| \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \hat{a}_{\mathbf{p}_4} T \left[\hat{j}^\mu(x_1) \hat{A}_\mu(x_1) \hat{j}^\nu(x_2) \hat{A}_\nu(x_2) \right] \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger \right| 0 \right\rangle$$



- Faremo delle considerazioni generali
- Innanzitutto, dal momento che i campi del fotone e dei fermioni commutano $[\hat{A}^\mu, \hat{j}^\nu] = 0$

$$T[\hat{j}^\mu(x_1) \hat{A}_\mu(x_1) \hat{j}^\nu(x_2) \hat{A}_\nu(x_2)] = T[\hat{j}^\mu(x_1) \hat{j}^\nu(x_2)] T[\hat{A}_\mu(x_1) \hat{A}_\nu(x_2)]$$

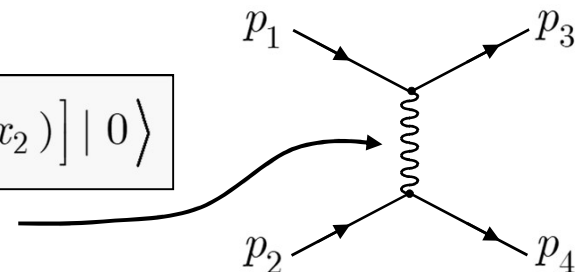
- Nel caso del processo che stiamo esaminando non ci sono fotoni negli stati iniziale e finale
- I campi fotonici agiscono direttamente sugli stati di vuoto $|0\rangle \equiv |0, e\rangle_{\mathbf{k}_1} \otimes |0, \gamma\rangle_{\mathbf{k}_2} \otimes \dots \otimes$
- Possiamo pertanto fattorizzare l'elemento di matrice

$$\left\langle 0 \left| \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \hat{a}_{\mathbf{p}_4} T[\hat{j}^\mu(x_1) \hat{j}^\nu(x_2)] \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger \right| 0 \right\rangle \left\langle 0 \left| T[\hat{A}_\mu(x_1) \hat{A}_\nu(x_2)] \right| 0 \right\rangle$$

- Si definisce propagatore fotonico l'espressione

$$D_{\mu\nu}(x_1, x_2) = i \left\langle 0 \left| T[\hat{A}_\mu(x_1) \hat{A}_\nu(x_2)] \right| 0 \right\rangle$$

- Graficamente viene rappresentato come in figura



Interazione elettromagnetica: spin $\frac{1}{2}$

- Si può dimostrare che
 - Il propagatore dipende solo dalla differenza delle coordinate x_1 e x_2

$$D_{\mu\nu}(x_1, x_2) = D_{\mu\nu}(x_1 - x_2)$$

- Il propagatore è la funzione di Green dell'equazione del campo elettromagnetico (equazione dell'onda elettromagnetica)

$$\square D_{\mu\nu}(x_1 - x_2) = g_{\mu\nu} \delta^4(x_1 - x_2)$$

- La forma esplicita

$$D_{\mu\nu}(x - x') = \frac{1}{4\pi} \frac{g_{\mu\nu}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta \left[c \left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right]$$

- La sua trasformata di Fourier è

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(q) = -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$$

- Ritorneremo presto sul propagatore

Interazione elettromagnetica: spin $\frac{1}{2}$

- Consideriamo adesso la parte dell'elemento di matrice relativa ai fermioni

$$\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \hat{a}_{\mathbf{p}_4} T[\hat{j}^\mu(x_1) \hat{j}^\nu(x_2)] \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle$$

- Occorrerebbe trattare attentamente l'eventualità di particelle identiche
- Per questi calcoli sono state messe a punto tecniche molto efficaci
 - In particolare
 - Contrazione di operatori di campo
 - Teorema di Wick
 - Regole di Feynman
 - Ai nostri fini diciamo che per particelle non identiche (esempio scattering elettrone - protone) l'elemento di matrice si fattorizza in due pezzi

$$\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \hat{j}^\mu(x_1) \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_4} \hat{j}^\nu(x_2) \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle$$

- Infine (faremo il calcolo in seguito)

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \hat{j}^\mu(x_1) \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger | 0 \rangle &= -e \bar{u}_{\mathbf{p}_3, s_3} \gamma^\mu u_{\mathbf{p}_1, s_1} e^{-i(p_1 - p_3) \cdot x_1} \\ \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_4} \hat{j}^\nu(x_2) \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle &= -e \bar{u}_{\mathbf{p}_4, s_4} \gamma^\nu u_{\mathbf{p}_2, s_2} e^{-i(p_2 - p_4) \cdot x_2} \end{aligned}$$

- Notiamo che abbiamo ritrovato la forma delle correnti di transizione dell'equazione di Dirac

Interazione elettromagnetica: spin $\frac{1}{2}$

- Ricordiamo l'espressione per la matrice S al secondo ordine

$$\hat{S} = 1 - \frac{1}{2} \iint d^4x_1 d^4x_2 T \left[\hat{\mathcal{H}}'_I(x_1) \hat{\mathcal{H}}'_I(x_2) \right]$$

- Occorre integrare su x_1 e x_2

- Inoltre

$$S_{fi} = \delta_{fi} + \mathcal{A}_{fi}$$

- Pertanto $\mathcal{A}_{fi} = -\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 j_1^\mu(x_1) D_{\mu\nu}(x_1 - x_2) j_2^\nu(x_2)$

- La corrente $j_1(x_1)$ interagisce con A_μ nel punto dello spazio-tempo x_1

- Il propagatore $D_{\mu\nu}(x_1 - x_2)$ propaga l'interazione da x_1 a x_2

- La corrente $j_2(x_2)$ interagisce con A_μ nel punto dello spazio tempo x_2

- Passiamo nello spazio dei momenti

- Facciamo un cambio di variabile $x_1 - x_2 = z$ $x_2 = x_1 - z$ $dx_2 = -dz$

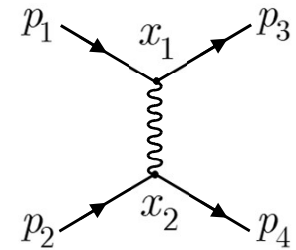
$$x_1 = x \quad \mathcal{A}_{fi} = \frac{1}{2} \int d^4x d^4z j_1^\mu(x) D_{\mu\nu}(z) j_2^\nu(x - z)$$

- Ricordiamo il risultato trovato per gli elementi di matrice delle correnti

$$j_1^\mu(x_1) = -e \bar{u}_{\mathbf{p}_3, s_3} \gamma^\mu u_{\mathbf{p}_1, s_1} e^{-i(p_1 - p_3) \cdot x_1} \quad j_2^\nu(x_2) = -e \bar{u}_{\mathbf{p}_4, s_4} \gamma^\nu u_{\mathbf{p}_2, s_2} e^{-i(p_2 - p_4) \cdot x_2}$$

- Otteniamo ($u_{p\alpha, s\alpha} \rightarrow u_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$)

$$\mathcal{A}_{fi} = \frac{1}{2} e^2 \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1 \bar{u}_4 \gamma^\nu u_2 \int d^4x d^4z e^{-i(p_1 - p_3) \cdot x} D_{\mu\nu}(z) e^{-i(p_2 - p_4) \cdot (z - x)}$$



Interazione elettromagnetica: spin $\frac{1}{2}$

$$\mathcal{A}_{fi} = \frac{1}{2} e^2 \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1 \bar{u}_4 \gamma^\nu u_2 \int d^4x d^4z e^{-i(p_1-p_3) \cdot x} D_{\mu\nu}(z) e^{-i(p_2-p_4) \cdot (z-x)}$$

- Otteniamo pertanto

$$M_{fi} = \frac{e^2}{2} \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1 \bar{u}_4 \gamma^\nu u_2 \int d^4x e^{-i(p_1-p_3+p_2-p_4) \cdot x} \int d^4z D_{\mu\nu}(z) e^{-i(p_4-p_2) \cdot z}$$

- Le parti evidenziate sono rispettivamente

- Una funzione $\delta()$

- La trasformata di Fourier del propagatore (o Funzione di Green)

- Abbiamo in definitiva

$$\mathcal{A}_{fi} = \frac{e^2}{2} \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1 \bar{u}_4 \gamma^\nu u_2 (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_3 + p_2 - p_4) \tilde{D}_{\mu\nu}(q)$$

- Abbiamo definito il 4-momento trasferito $q = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$

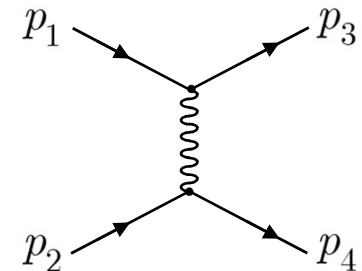
- Inoltre ricordiamo che

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(q) = -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$$

$$\mathcal{A}_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 + p_4) \mathfrak{M}_{fi}$$

- Per finire

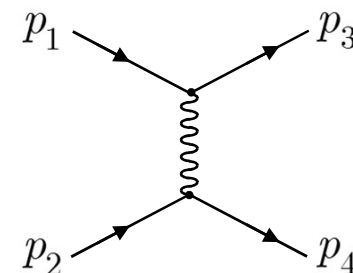
$$\mathfrak{M}_{fi} = -i \frac{e^2}{2} \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1 \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}_4 \gamma^\nu u_2$$



$$q = p_4 - p_2$$

Regole di Feynman

- Diamo le regole di Feynman per l'ordine perturbativo più basso
 - Il cosiddetto tree-level (livello d'albero)
 - Non ci sono loop
- In un diagramma ci sono linee esterne e linee interne
 - Le linee esterne corrispondono alle particelle negli stati iniziale e finale (particelle reali)
 - Le linee interne corrispondono a stati virtuali tramite i quali descriviamo l'interazione (particelle virtuali, propagatori)
- Per ogni elemento occorre introdurre un fattore (funzione) nella ampiezza $-i\mathcal{M}$



	Particelle esterne			Particelle interne			Vertici
	<i>entranti</i>	<i>uscenti</i>					
<i>fermioni</i>	u	$\bar{u}$					
	$\bar{v}$	v					
<i>spin 0</i>	1	1					
<i>fotoni</i>	ε_μ	ε_μ^*					$ie(p_i + p_f)^\mu$
						$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$	
						$\frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2}$	
						$\frac{i}{q^2 - m^2}$	

Sezione d'urto $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

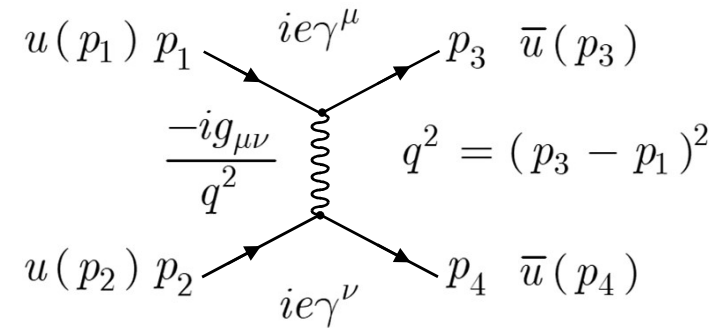
- Calcoliamo adesso la sezione d'urto del processo $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ utilizzando le regole di Feynman

- Il diagramma di Feynman del processo è

- Abbiamo due fermioni entranti
- Abbiamo due fermioni uscenti
- Ci sono due vertici fermione fotone
- C'è un propagatore fotonico

- L'ampiezza invariante è

$$-i\mathfrak{M} = \bar{u}_3 (ie\gamma^\mu) u_1 \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}_4 (ie\gamma^\nu) u_2$$



$$\mathfrak{M} = -e^2 \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1 \frac{1}{q^2} \bar{u}_4 \gamma_\nu u_2$$

- Se fosse $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$ ci sarebbero 2 diagrammi
 - Con p_3 e p_4 scambiati (e un segno meno relativo)
- Per il calcolo di $|\mathfrak{M}|^2$ si utilizzano le tecniche di tracce delle matrici γ sviluppate precedentemente
- In particolare sappiamo che le due correnti portano ai due tensori

$$L_e^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_e) \gamma^\alpha (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\beta] \quad L_\mu^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\not{p}_4 + m_\mu) \gamma^\alpha (\not{p}_2 + m_\mu) \gamma^\beta]$$

Sezione d'urto $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

- Il calcolo dei due tensori dà (vedi diapositiva 116)

$$L_e^{\alpha\beta} = 2[p_3^\alpha p_1^\beta + p_1^\alpha p_3^\beta - (p_1 \cdot p_3 - m_e^2)g^{\alpha\beta}]$$

$$L_\mu^{\alpha\beta} = 2[p_4^\alpha p_2^\beta + p_2^\alpha p_4^\beta - (p_2 \cdot p_4 - m_\mu^2)g^{\alpha\beta}]$$

- Il modulo quadrato dell'ampiezza è

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}}|^2 &= \frac{e^4}{q^4} L_e^{\alpha\beta} L_{\mu,\alpha\beta} \\ &= \frac{8e^4}{q^4} [(p_3 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_2) + (p_3 \cdot p_2)(p_1 \cdot p_4) - m_e^2 p_4 \cdot p_2 - m_\mu^2 p_1 \cdot p_3 + 2m_e^2 m_\mu^2] \end{aligned}$$

- Consideriamo il limite ultra-relativistico (trascuriamo le masse)

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} [(p_3 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_2) + (p_3 \cdot p_2)(p_1 \cdot p_4)]$$

- Ricordiamo la formula della sezione d'urto

Flusso Incidente

$$d\sigma = \frac{|\overline{\mathfrak{M}}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} d\Phi_n(p_1 + p_2; p_3, \dots, p_{n+2})$$

Spazio delle Fasi

- Calcoliamo adesso lo spazio delle fasi e il flusso incidente

Variabili di Mandelstam

- Consideriamo lo scattering $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$
- Ricordiamo la conservazione del 4-momento

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

- Definiamo le variabili di Mandelstam

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2 \quad u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2 \quad q^2 = (p_3 - p_1)^2 = t$$

- Specializziamo le relazioni nel centro di massa trascurando le masse delle particelle ($p_i^2 = 0$, $|\mathbf{p}_i| = E_i$)

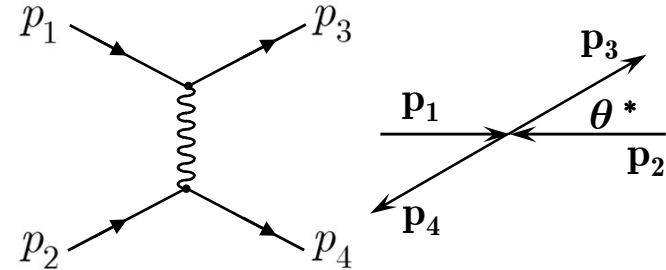
$$s = 2p_1 \cdot p_2 = 2p_3 \cdot p_4 \quad \Rightarrow \quad p_1 \cdot p_2 = p_3 \cdot p_4 = \frac{s}{2} = 2\mathbf{p}^2$$

$$t = -2p_1 \cdot p_3 = -2p_2 \cdot p_4 \quad \Rightarrow \quad p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4 = -\frac{t}{2} = \mathbf{p}^2(1 - \cos \theta^*)$$

$$u = -2p_1 \cdot p_4 = -2p_2 \cdot p_3 \quad \Rightarrow \quad p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3 = -\frac{u}{2} = \mathbf{p}^2(1 + \cos \theta^*)$$

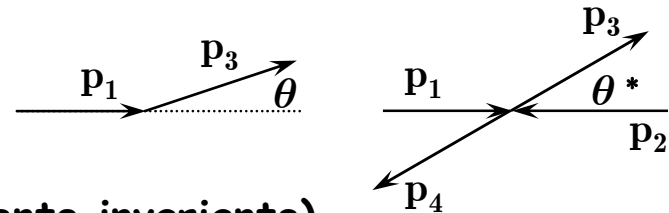
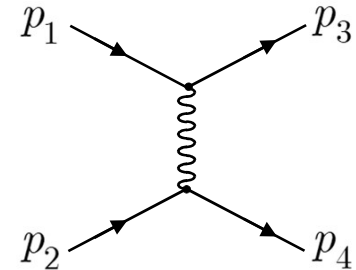
- Calcoliamo l'elemento di matrice in funzione di s, t, u

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}}|^2 &= \frac{8e^4}{q^4} [(p_3 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_2) + (p_3 \cdot p_2)(p_1 \cdot p_4)] = \frac{8e^4}{t^2} \left[\frac{s^2}{4} + \frac{u^2}{4} \right] = 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2} \\ &= 2e^4 \frac{16\mathbf{p}^4 + 4\mathbf{p}^4(1 + \cos \theta^*)^2}{4\mathbf{p}^4(1 - \cos \theta^*)^2} = 2e^4 \frac{16 + 16\cos^4 \frac{\theta^*}{2}}{16\sin^4 \frac{\theta^*}{2}} = 2e^4 \frac{1 + \cos^4 \frac{\theta^*}{2}}{\sin^4 \frac{\theta^*}{2}} \end{aligned}$$



Cinematica reazione $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$

- Prima di iniziare il calcolo del flusso e dello spazio delle fasi discutiamo alcuni aspetti della cinematica della reazione
 - Analizziamo lo stato finale
 - Abbiamo 2 particelle per un totale di 8 variabili cinematiche
 - La relazione $E^2 = m^2 + p^2$ riduce le variabili a 6
 - Inoltre la conservazione dell'energia-impulso totali (4 relazioni) riduce ulteriormente a 2 le variabili indipendenti
 - In assenza di polarizzazione nello stato iniziale una rotazione di un angolo ϕ intorno all'asse definito dal fascio è inessenziale
 - Pertanto, per descrivere lo stato finale, è sufficiente una sola variabile
 - Sono possibili diverse scelte; ad esempio
 - Angolo di deflessione θ
 - Energia E di una delle due particelle 3,4
 - Variabile di Mandelstam t (relativisticamente invariante)



$$t = (p_3 - p_1)^2$$

$$t = m^2 + m^2 - 2E_1 E_3 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos\theta$$

- Ricordiamo l'altra variabile di Mandelstam

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$

Lo spazio delle fasi $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$

- Calcoliamo lo spazio delle fasi per il processo $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ ($p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$)

$$d\Phi_2 = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3\mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4}$$

- Integrando sul 3-momento $\mathbf{p}_4$ della particella 4

$$d\Phi_2 = \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \frac{(2\pi)}{2E_4} \frac{d^3\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \quad E_4 = \sqrt{\mathbf{p}_4^2 + m_4^2}$$

- Questa formula è valida in tutti i sistemi di riferimento

- Specializziamo la formula nel sistema del centro di massa $\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4 \equiv \mathbf{q}_f$

$$E_3^2 = \mathbf{q}_f^2 + m_3^2 \quad E_4^2 = \mathbf{q}_f^2 + m_4^2$$

- $q_f = |\mathbf{q}_f|$ è la quantità di moto delle due particelle nello stato finale, uguale per le due particelle

- Abbiamo pertanto

$$E_3 dE_3 = q_f dq_f = E_4 dE_4$$

- Definiamo infine

$$\sqrt{s} = W_i = W_f = E_1 + E_2 = E_3 + E_4$$

Lo spazio delle fasi $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$

- Abbiamo pertanto

$$dW_f = dE_3 + dE_4 = \frac{q_f dq_f}{E_3} + \frac{q_f dq_f}{E_4} = \frac{E_3 + E_4}{E_3 E_4} q_f dq_f$$

$$dW_f = \frac{W_f}{E_3 E_4} |\mathbf{q}_f| d|\mathbf{q}_f|$$

- Da cui otteniamo $q_f^2 dq_f = q_f \frac{E_3 E_4}{W_f} dW_f$

- Possiamo pertanto riscrivere lo spazio delle fasi

$$d\Phi_2 = \delta(W_i - W_f) \frac{1}{E_3 E_4} \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{(4\pi)^2} = \frac{1}{(4\pi)^2} \delta(W_i - W_f) \frac{1}{E_3 E_4} q_f^2 dq_f d\Omega$$

$$d\Phi_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \delta(W_i - W_f) \frac{|\mathbf{q}_f|}{W_f} dW_f d\Omega$$

- Integrando su W_f

$$d\Phi_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\mathbf{q}_f|}{W_f} d\Omega$$

Il fattore di flusso

- Infine, calcoliamo il fattore di flusso nel sistema del centro di massa
 - Nel centro di massa abbiamo $p_2 = -p_1 \equiv \mathbf{q}_i$

$$\begin{aligned}\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2} &= \sqrt{(E_1 E_2 + \mathbf{q}_i^2)^2 - (m_1 m_2)^2} \\&= \sqrt{E_1^2 E_2^2 + 2\mathbf{q}_i^2 E_1 E_2 + \mathbf{q}_i^4 - (m_1 m_2)^2} \\&= \sqrt{(\mathbf{q}_i^2 + m_1^2)(\mathbf{q}_i^2 + m_2^2) + 2\mathbf{q}_i^2 E_1 E_2 + \mathbf{q}_i^4 - (m_1 m_2)^2} \\&= \sqrt{2\mathbf{q}_i^4 + (m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2)\mathbf{q}_i^2} = |\mathbf{q}_i| \sqrt{2\mathbf{q}_i^2 + (m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2)} \\&= |\mathbf{q}_i| \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2} = |\mathbf{q}_i| \sqrt{(E_1 + E_2)^2} = |\mathbf{q}_i| W_i\end{aligned}$$

- Riassumendo

$$\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2} = |\mathbf{q}_i| W_i$$

Sezione d'urto $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

- Come ultima semplificazione notiamo che nello scattering elastico ($m_1 = m_3$ e $m_2 = m_4$) le quantità di moto nel centro di massa sono uguali $|\mathbf{q}_i| = |\mathbf{q}_f|$

- Inoltre, dato che abbiamo trascurato le masse (m_μ e $m_e \ll E$)

$$E_1 \approx |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{q}_i| \quad E_2 = |\mathbf{p}_2| = |\mathbf{q}_i| \quad s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2, \mathbf{0})^2 = W_i^2$$

$$|\mathbf{q}_i| = |\mathbf{q}_f| = \frac{\sqrt{s}}{2}$$

- Riassumendo gli altri risultati

$$W_i = W_f = \sqrt{s} \quad F = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2} = 4|\mathbf{q}_i| W_i$$

$$d\Phi_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\mathbf{q}_f|}{W_f} d\Omega \quad \overline{|\mathfrak{M}|^2} = 2e^4 \frac{1 + \cos^4 \frac{\theta^*}{2}}{\sin^4 \frac{\theta^*}{2}}$$

- Possiamo finalmente calcolare la sezione d'urto

$$d\sigma = \frac{1}{F} \overline{|\mathfrak{M}|^2} d\Phi_2 = \frac{1}{4|\mathbf{q}_i| W_i} \overline{|\mathfrak{M}|^2} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\mathbf{q}_f|}{W_f} d\Omega \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{4s} \overline{|\mathfrak{M}|^2}$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{e^4}{2s} \frac{1 + \cos^4 \frac{\theta^*}{2}}{\sin^4 \frac{\theta^*}{2}}}$$