

---

# Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa  
Università di Milano

## Lezione n. 9

27.10.2024

Quantizzazione del campo elettromagnetico  
Campi interagenti. Scattering. Matrice  $S$   
Teoria dello Scattering. Matrice  $S$   
Sviluppo perturbativo della matrice  $S$

anno accademico 2025-2026

---

# Quantizzazione del campo elettromagnetico

---

- Abbiamo visto nella diapositiva **143** le equazioni per il potenziale elettromagnetico
- Possono essere riscritte in forma manifestamente covariante introducendo il tensore antisimmetrico  $F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

- Il tensore  $F^{\mu\nu}$  è lasciato invariato da una trasformazione di gauge del potenziale

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$$

- Infatti

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu \partial^\nu \chi - (\partial^\nu A^\mu + \partial^\nu \partial^\mu \chi) = F^{\mu\nu}$$

- Le equazioni di Maxwell con le sorgenti sono

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

- Nel vuoto (in assenza di correnti e cariche) diventano

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \qquad \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0$$

- Nel gauge di Lorentz ( $\partial_\mu A^\mu = 0$ ) le equazioni diventano

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 \qquad \square A^\nu = 0$$

# Quantizzazione del campo elettromagnetico

---

- L'equazione ha una semplice soluzione di onda piana  $A^\mu(x) = N\varepsilon^\mu e^{-ik \cdot x}$

- Nella soluzione

- $N$  è un fattore di normalizzazione
- $\varepsilon^\mu$  è il vettore di polarizzazione del potenziale
- Infine il quadrivettore  $k = (k^0, \mathbf{k})$   $k^2 = 0$  è il quadri-momento del fotone

- La condizione del gauge di Lorentz diventa

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad k_\mu \varepsilon^\mu e^{-ik \cdot x} = 0 \quad k_\mu \varepsilon^\mu = 0$$

- Pertanto delle 4 componenti di  $\varepsilon^\mu$  solo tre sono indipendenti

- Tuttavia c'è ancora una ridondanza

- $F^{\mu\nu}$  è invariante per l'ulteriore trasformazione ( $\partial_\mu A^\mu$  è già uguale a zero)

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \tilde{\chi} \quad \text{con } \tilde{\chi} \text{ che soddisfa l'equazione } \partial_\mu \partial^\mu \tilde{\chi} = 0 \rightarrow \tilde{\chi} = i\beta N e^{-ik \cdot x}$$

- Infatti  $A'^\mu$  conduce, ovviamente, allo stesso  $F^{\mu\nu}$

- Inoltre continua a soddisfare il gauge di Lorentz  $\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu \tilde{\chi} = 0$

- Questa invarianza si traduce in una ulteriore arbitrarietà di  $\varepsilon^\mu$

$$A'^\mu = N\varepsilon^\mu e^{-ik \cdot x} + N\beta k^\mu e^{-ik \cdot x} = N\varepsilon'^\mu e^{-ik \cdot x} \quad \varepsilon'^\mu = \varepsilon^\mu + \beta k^\mu$$

- Infatti la condizione di Lorentz risulta ancora rispettata dato che  $k_\mu k^\mu = 0$

$$k_\mu \varepsilon'^\mu = k_\mu \varepsilon^\mu + \beta k_\mu k^\mu = k_\mu \varepsilon^\mu + 0 = k_\mu \varepsilon^\mu = 0$$

- Quest'ultima ridondanza deriva dalla massa nulla del fotone:  $k_\mu k^\mu = 0$

# Quantizzazione del campo elettromagnetico

---

- Quest'ultima ridondanza ci permette di ridurre a due i gradi di libertà del campo elettromagnetico

- Infatti, data una soluzione  $A^\mu = N \varepsilon^\mu e^{-ik \cdot x}$

$$k = (k^0, \mathbf{k}) \quad k^0 = |\mathbf{k}| \quad \varepsilon = (\varepsilon^0, \boldsymbol{\varepsilon}) \quad k \cdot \varepsilon = 0$$

- Possiamo fare ancora una trasformazione  $\varepsilon^\mu \rightarrow \varepsilon^\mu + \beta k^\mu$  in modo da annullare la componente temporale  $\varepsilon = (0, \boldsymbol{\varepsilon})$

- La condizione di Lorentz diventa

$$k \cdot \varepsilon = 0 \quad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0$$

in pratica si ritorna al gauge di Coulomb

- E quindi ci sono solo due polarizzazioni indipendenti
- Scegliamo una direzione di propagazione lungo l'asse  $z$
- Le due polarizzazioni possono essere

- Polarizzazione lineare  $\varepsilon_1 = (1, 0, 0) \quad \varepsilon_2 = (0, 1, 0)$

- Polarizzazione circolare  $\varepsilon_{\lambda=+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0) \quad \varepsilon_{\lambda=-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0)$

- I vettori introdotti soddisfano la relazione  $\varepsilon_\lambda^* \cdot \varepsilon_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} \quad \lambda, \lambda' = 1, 2$

- Utilizzando i quadri-vettori  $\varepsilon^\mu(\lambda) = (0, \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda) \quad \lambda = 1, 2 \quad \varepsilon_{\lambda\mu}^* \varepsilon_{\lambda'}^\mu = -\delta_{\lambda\lambda'}$

# Quantizzazione del campo elettromagnetico

---

- Ribadiamo che lo sviluppo fatto non è sostanzialmente differente da quello fatto utilizzando il gauge di Coulomb nella diapositiva 146
  - Anche in questo caso la scelta di rendere  $\epsilon^0 = 0$  non è covariante
    - Funziona in un sistema di riferimento particolare
  - Tuttavia abbiamo messo in evidenza come la riduzione dei due gradi di libertà dipenda:
    - Dalla invarianza di gauge
    - Dal fatto che il fotone abbia massa nulla
- Utilizzando le onde piane così definite possiamo sviluppare il campo elettromagnetico in integrale di Fourier

$$A^\mu(x) = \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2|\mathbf{k}|}} \left( \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu c_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ik \cdot x} + \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^{\mu*} c_{\mathbf{k},\lambda}^* e^{ik \cdot x} \right)$$

- $\lambda = 1, 2$
- $c_{\mathbf{k},\lambda}$  ,  $c_{\mathbf{k},\lambda}^*$

- La quantizzazione si potrebbe fare promuovendo le ampiezze  $c_{\mathbf{k},\lambda}$  e  $c_{\mathbf{k},\lambda}^*$  ad operatori di creazione e distruzione e imponendo le regole di commutazione
- Tuttavia una tale procedura non è soddisfacente
  - Non è covariante, vale solo in un dato sistema di riferimento
  - Non si riesce a derivare dalla quantizzazione canonica del campo elettromagnetico

# Quantizzazione del campo elettromagnetico

- Vediamo più in dettaglio la natura delle difficoltà (v. Aitchison 3<sup>rd</sup> ed. § 7.3.2)

- L'equazione  $\square A^\nu = 0$  può essere derivata dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

- Infatti, dalle equazioni di Eulero-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0$$

Nel gauge di Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \rightarrow \square A^\nu = 0$$

- Per procedere con la quantizzazione occorre calcolare i momenti coniugati

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{A}_\mu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} \quad \text{Evidenziamo i termini contenenti } \partial_0 A_\mu \text{ in } \mathcal{L} \quad \mathcal{L} \sim -(\partial_0 A_\nu - \partial_\nu A_0)(\partial^0 A^\nu - \partial^\nu A^0)$$

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} = -\partial^0 A^\mu + \partial^\mu A^0 \quad \pi^k = -(\partial^0 A^k - \partial^k A^0) = \partial^k A^0 - \dot{A}^k \quad k = 1, 2, 3$$

- Per  $\mu = 0$

$$\pi^0 = \partial^0 A^0 - \partial^0 A^0 = 0$$

- Pertanto la componente  $A^0$  non ha un momento coniugato

- Non si possono imporre regole di commutazione su tutte e 4 le componenti



# Quantizzazione del campo elettromagnetico

---

- Osserviamo che l'equazione dell'onda si ottiene imponendo il gauge di Lorentz
  - Pertanto la Lagrangiana utilizzata conduce ad una equazione più generale
  - Si può utilizzare una Lagrangiana diversa che conduca direttamente all'equazione dell'onda elettromagnetica

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$$

- Ricordiamo la definizione dei momenti coniugati

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)}$$

- Il nuovo pezzo di  $\mathcal{L}$  non contiene termini  $\partial_0 A_\mu$  per  $\mu = 1, 2, 3$
- I corrispondenti momenti coniugati rimangono invariati

$$\pi^k = \partial^k A^0 - \dot{A}^k = E^k \quad k = 1, 2, 3$$

- Per il momento coniugato  $\pi^0$  si trova  $\pi^0 = -(\partial_\mu A^\mu)$
- Abbiamo trovato 4 momenti coniugati diversi da zero
- Possiamo promuovere campi e momenti coniugati a operatori e imporre le regole di commutazione canoniche

$$[\hat{A}_\mu(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}_\nu(\mathbf{r}', t)] = ig_{\mu\nu}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

- Il tensore  $g^{\mu\nu}$  appare per la natura 4-vettoriale degli operatori



# Quantizzazione del campo elettromagnetico

---

- Ricordiamo tuttavia che la condizione di Lorentz era stata un ingrediente essenziale per ridurre a due il numero di gradi di libertà del sistema
- Aspettiamoci pertanto l'apparizione di aspetti non fisici legati ai due gradi di libertà aggiuntivi che sono rimasti nella formulazione
- Sviluppiamo ulteriormente il processo di quantizzazione
- Imponiamo le altre regole di commutazione

$$\left[ \hat{A}_\mu(\mathbf{r}, t), \hat{A}_\nu(\mathbf{r}', t) \right] = 0 \quad \left[ \hat{\pi}_\mu(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}_\nu(\mathbf{r}', t) \right] = 0$$

- Si può dimostrare che le derivate spaziali di  $A_\mu$  commutano

$$\left[ \partial_k \hat{A}_\mu(\mathbf{r}, t), \hat{A}_\nu(\mathbf{r}', t) \right] = 0 \quad \left[ \partial_k \hat{A}_\mu(\mathbf{r}, t), \partial_l \hat{A}_\nu(\mathbf{r}', t) \right] = 0 \quad k, l = 1, 2, 3$$

- Pertanto la regola di commutazione canonica si riduce a

$$\pi^k = \partial^k A^0 - \dot{A}^k \quad \left[ \hat{A}_\mu(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}_\nu(\mathbf{r}', t) \right] = - \left[ \hat{A}_\mu(\mathbf{r}, t), \dot{\hat{A}}_\nu(\mathbf{r}', t) \right] = ig_{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

- Confrontiamola con quella del campo di Klein-Gordon reale

$$\left[ \hat{\phi}(\mathbf{r}, t), \dot{\hat{\phi}}(\mathbf{r}', t) \right] = i\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

- Osserviamo che le regole di commutazione per  $A_0$  hanno il segno diverso da quelle di un campo scalare (ad es. il campo di Klein-Gordon)

$$\left[ \hat{A}_0(\mathbf{r}, t), \dot{\hat{A}}_0(\mathbf{r}', t) \right] = -ig_{00} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

# Quantizzazione del campo elettromagnetico $c_{\mathbf{k},\lambda}, c_{\mathbf{k},\lambda}^*$

- Vedremo fra poco che il segno differente è di fondamentale importanza
- Possiamo a questo punto sviluppare il campo elettromagnetico

$$\hat{A}^\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2|\mathbf{k}|}} \left( \varepsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu \hat{\alpha}_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ik \cdot x} + \varepsilon_{\mathbf{k},\lambda}^{\mu*} \hat{\alpha}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{ik \cdot x} \right)$$

**NB:**  
 $\lambda = 0,1,2,3$

- A differenza di quanto fatto con il campo classico adesso la somma sugli stati di polarizzazione è adesso estesa a tutti e 4 gli stati
- Costruiremo esplicitamente i 4-vettori  $\varepsilon_{\mu\mathbf{k},\lambda}$  per un arbitrario  $k = (|\mathbf{k}|, \mathbf{k})$
- Per il momento è sufficiente dire che

$$k_\mu \varepsilon_{\mathbf{k},1}^\mu = k_\mu \varepsilon_{\mathbf{k},2}^\mu = 0 \quad k_\mu \varepsilon_{\mathbf{k},0}^\mu = -k_\mu \varepsilon_{\mathbf{k},3}^\mu \quad \varepsilon_{\mu\mathbf{k},\lambda} \varepsilon_{\mathbf{k},\lambda'}^\mu = g_{\lambda\lambda'}$$

- Dalle regole di commutazione dei campi  $A_\mu$  si derivano le regole per gli operatori di creazione e distruzione

$$[\alpha_{\mathbf{k},\lambda}, \hat{\alpha}_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger] = -g_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

- Ancora una volta notiamo la presenza del segno meno per  $\lambda = \lambda' = 0$ 
  - La sua presenza causa un grave problema di autoconsistenza della teoria
  - Vedremo infatti, nella prossima diapositiva, che compaiono degli stati con norma negativa privi di significato fisico

**ad esempio**

$$\begin{aligned} k &= (|\mathbf{k}|, 0, 0, |\mathbf{k}|) \\ \varepsilon_0 &= (1, 0, 0, 0) \\ \varepsilon_1 &= (0, 1, 0, 0) \\ \varepsilon_2 &= (0, 0, 1, 0) \\ \varepsilon_3 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

# Quantizzazione del campo elettromagnetico

---

- Come nel caso dei campi di Klein-Gordon e di Dirac utilizziamo gli operatori di creazione per costruire gli stati a partire dal vuoto

$$|\mathbf{k}, \lambda\rangle = \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger |0\rangle$$

- Calcoliamo la norma dello stato

$$\langle \mathbf{k}, \lambda | \mathbf{k}', \lambda' \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} - g_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') | 0 \rangle$$

$$\langle \mathbf{k}, \lambda | \mathbf{k}', \lambda' \rangle = -g_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

- Per  $\lambda = 0$  gli stati hanno norma negativa  $\langle \mathbf{k}, 0 | \mathbf{k}', 0 \rangle = -(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$
- Un tale risultato è inaccettabile; conduce a probabilità negative
- Un'altra conseguenza grave è che l'Hamiltoniana non è più definita positiva
- In modo analogo a quanto fatto per il campo scalare reale (vedi slide [190](#)) si può calcolare l'Hamiltoniana del campo elettromagnetico

$$H = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} (\hat{a}_{\mathbf{k},1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},1} + \hat{a}_{\mathbf{k},2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},2} + \hat{a}_{\mathbf{k},3}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},3} - \hat{a}_{\mathbf{k},0}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},0}) \omega_{\mathbf{k}}$$

- È evidente che la componente temporale 0 può dare un contributo negativo all'energia

# Quantizzazione del campo elettromagnetico

---

- Nel caso classico la scelta del gauge di Lorentz aveva lasciato due gradi di libertà eliminando gli stati con polarizzazione time-like e longitudinali
- Abbiamo visto che non possiamo richiedere la relazione operatoriale  $\partial_\mu \hat{A}^\mu = 0$  senza incorrere in problemi di autoconsistenza

- Gupta e Bleuler proposero di imporre una condizione più debole

• Definiamo

$$\hat{A}^{\mu(+)}(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{\varepsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu \hat{\alpha}_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ik \cdot x}}{(2\pi)^3 \sqrt{2|\mathbf{k}|}} d^3\mathbf{k} \quad \hat{A}^{\mu(-)}(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{\varepsilon_{\mathbf{k},\lambda}^{\mu*} \hat{\alpha}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{ik \cdot x}}{(2\pi)^3 \sqrt{2|\mathbf{k}|}} d^3\mathbf{k}$$

- La condizione proposta da Gupta e Bleuler è di restringere gli stati fisici  $|\Psi\rangle$  dello spazio di Fock solo a quelli che soddisfano la condizione

$$\langle \Psi | \partial_\mu \hat{A}^\mu | \Psi \rangle = \langle \Psi | \partial_\mu \hat{A}^{\mu(+)} + \partial_\mu \hat{A}^{\mu(-)} | \Psi \rangle = 0$$

- Equivalente a

$$\partial_\mu \hat{A}^{\mu(+)} | \Psi \rangle = 0 \quad \langle \Psi | \partial_\mu \hat{A}^{\mu(-)} = 0$$

- Per comprendere le implicazioni di questa condizione sviluppiamo la prima relazione

$$\partial_\mu \hat{A}^{\mu(+)} | \Psi \rangle = \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{k_\mu \varepsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu \hat{\alpha}_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ik \cdot x}}{(2\pi)^3 \sqrt{2|\mathbf{k}|}} d^3\mathbf{k} | \Psi \rangle$$

- Esaminiamo l'integrando

# Quantizzazione del campo elettromagnetico

- Abbiamo visto (diapositiva [238](#)) che per  $\lambda = 1, 2$  il prodotto scalare  $k_\mu \varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda}^\mu = 0$  è nullo mentre per  $\lambda = 0, 3$   $k_\mu \varepsilon_{\mathbf{k}, 0}^\mu = -k_\mu \varepsilon_{\mathbf{k}, 3}^\mu$  Pertanto avremo

$$\sum_{\lambda=0}^3 k_\mu \varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda}^\mu \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, \lambda} |\Psi\rangle = (k_\mu \varepsilon_{\mathbf{k}, 1}^\mu \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 1} \cancel{*} k_\mu \varepsilon_{\mathbf{k}, 2}^\mu \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 2}) |\Psi\rangle + (k_\mu \varepsilon_{\mathbf{k}, 0}^\mu \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 0} + k_\mu \varepsilon_{\mathbf{k}, 3}^\mu \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 3}) |\Psi\rangle =$$

$$= (k_\mu \varepsilon_{\mathbf{k}, 0}^\mu \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 0} + k_\mu \varepsilon_{\mathbf{k}, 3}^\mu \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 3}) |\Psi\rangle = k_\mu \varepsilon_{\mathbf{k}, 0}^\mu (\hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 0} - \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 3}) |\Psi\rangle = 0$$

- Pertanto la condizione di Gupta e Bleuler implica che  $(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 0} - \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 3}) |\Psi\rangle = 0$
- Vediamo adesso l'effetto di questa condizione sul valore di aspettazione dell'Hamiltoniana in uno stato  $|\Psi\rangle$

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \langle \Psi | (\hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 1}^\dagger \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 1} + \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 2}^\dagger \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 2} + \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 3}^\dagger \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 3} - \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 0}^\dagger \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 0}) \omega_{\mathbf{k}} | \Psi \rangle$$

- Analizziamo i contributi  $\lambda = 0$  e  $\lambda = 3$  dell'integrando

$$\langle \Psi | \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 3}^\dagger = (\hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 3} | \Psi \rangle)^\dagger = (\hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 0} | \Psi \rangle)^\dagger = \langle \Psi | \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 0}^\dagger$$

$$\langle \Psi | (\hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 3}^\dagger \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 3} - \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 0}^\dagger \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 0}) | \Psi \rangle = \langle \Psi | (\hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 0}^\dagger \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 3} - \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 0}^\dagger \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 0}) | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 0}^\dagger (\hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 3} - \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, 0}) | \Psi \rangle = 0$$

- Pertanto al valore di aspettazione dell'Hamiltoniana contribuiscono solo gli stati con polarizzazione trasversale (gli stati con significato fisico)
- Per semplicità la trattazione è stata intuitiva e parziale
- Tuttavia mostra una via per quantizzare il campo elettromagnetico utilizzando il metodo canonico

# Quantizzazione del campo elettromagnetico

---

- Applicheremo questi concetti ad alcuni processi di elettrodinamica quantistica
  - Utilizzeremo la rappresentazione del campo

$$\hat{A}^\mu(x) = \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2|\mathbf{k}|}} \left( \varepsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu \hat{\alpha}_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ik \cdot x} + \varepsilon_{\mathbf{k},\lambda}^{\mu*} \hat{\alpha}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{ik \cdot x} \right)$$

- Osserviamo che la somma sulle polarizzazioni è limitata a  $\lambda = 1,2$ 
  - Gli stati fisici rispettano la condizione di Gupta e Bleuler
  - Gli operatori  $\alpha$  creano stati con polarizzazioni  $\lambda = 1,2$
- Le onde piane dell'onda elettromagnetica sono  $\varepsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu e^{-ik \cdot x}$
- Tuttavia questo metodo si può applicare solo all'elettrodinamica
  - Diventa praticamente impossibile per teorie più complicate
    - Ad esempio per i quanti dell'interazione debole  $Z^0$  e  $W^\pm$
- Si usano tecniche più potenti
  - In particolare l'integrale di cammino (Path Integral)
  - Non ci addentreremo in questi problemi

# Campi interagenti

---

- La teoria quantistica dei campi fin qui vista descrive l'evoluzione di particelle libere
  - Gli operatori numero  $\hat{N}_k = a_k^\dagger a_k$  commutano con l'Hamiltoniana
  - Il numero delle particelle presenti in ogni modo rimane costante
    - Non abbiamo risolto il problema di avere una teoria capace di descrivere un numero di particelle variabile nel tempo

• È necessaria una teoria con campi interagenti

- Una trattazione rigorosa di campi interagenti va oltre gli obbiettivi del corso
  - Tuttavia discutiamo brevemente alcuni aspetti
- Ritorniamo all'oscillatore quantistico unidimensionale  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2$ 
  - L'energia potenziale è una forma quadratica
    - Di solito risultato di approssimazioni al primo ordine
    - Essenziale per trovare la soluzione algebrica
    - Implica la conservazione del numero di quanti (  $N$  commuta con  $H$  )
- Per introdurre la possibilità di variazione del numero dei quanti occorre andare oltre l'approssimazione armonica

# Campi interagenti

---

- Introduciamo un termine anarmonico di terzo grado

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 + \lambda\hat{q}^3$$

- Esprimendo l'Hamiltoniano in funzione degli operatori  $a$  e  $a^\dagger$

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger)\omega + \lambda(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^3 \equiv \hat{H}_0 + \lambda\hat{H}'$$

- Non si può risolvere con i metodi algebrici utilizzati precedentemente
- Si può verificare che  $N = a^\dagger a$  e  $H'$  non commutano
  - Gli autovettori di  $H$  hanno un numero variabile di quanti
- Non esiste una soluzione esatta di questo problema
- Si ricorre al metodo perturbativo
  - Si tratta il termine  $\lambda H'$  come perturbazione
  - Si espandono gli autovettori (e autovalori) di  $H$  in funzione degli autovettori dell'Hamiltoniano imperturbato  $H_0$ 
    - Agli autovettori imperturbati  $|r\rangle$  corrispondono gli autovettori perturbati  $|\bar{r}\rangle$

$$\hat{H}|\bar{r}\rangle = \bar{E}_r|\bar{r}\rangle \quad |\bar{r}\rangle = \sum_n c_{rn}|n\rangle \quad \hat{H}_0|n\rangle = E_n^{(0)}|n\rangle$$

$$\bar{E}_r = E_r^{(0)} + \lambda E_r^{(1)} + \lambda^2 E_r^{(2)} + \dots$$

# Campi interagenti

- Si trova il seguente risultato

$$\bar{E}_r = E_r^{(0)} + \lambda E_r^{(1)} + \lambda^2 E_r^{(2)} + \dots$$

$$\hat{H}_0 |r\rangle = E_r^{(0)} |r\rangle \quad E_r^{(1)} = \langle r | H' | r \rangle \quad E_r^{(2)} = \sum_{r \neq s} \frac{\langle r | H' | s \rangle \langle s | H' | r \rangle}{E_r^{(0)} - E_s^{(0)}}$$

- La correzione al primo ordine è  $\langle r | H' | r \rangle = \langle r | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^3 | r \rangle$
- Per calcolare la correzione del secondo ordine occorre calcolare elementi di matrice del tipo  $\langle r | H' | s \rangle = \langle r | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^3 | s \rangle$

- È facile rendersi conto che il secondo elemento di matrice è diverso da zero anche per  $s \neq r$ , in particolare per  $s = r + 3, r + 1, r - 1, r - 3$

- Questa semplice discussione mostra che l'introduzione di un termine anarmonico ci impone di considerare processi con numero di particelle non costante

- In particolare allo stato  $|r\rangle$  (che ha numero definito di quanti) si sostituisce uno stato sovrapposizione di stati contenenti numeri differenti di quanti di  $H_0$

$$|\bar{r}\rangle = \sum_n c_{rn} |n\rangle$$

- Nella derivazione della Lagrangiana del campo il termine del potenziale era diventato

$$\tau \Delta x \left( \frac{q_n - q_{n-1}}{\Delta x} \right)^2 \rightarrow \tau \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx$$

- Prodotto di due campi

- L'interazione è rappresentata dal prodotto di almeno tre campi  $\lambda q^3 \rightarrow \lambda \phi^3$

# Campi interagenti

- Abbiamo già visto la forma di alcune interazioni

$$M_{fi} = -i \int d^4x j_{em}^\mu(x) A_\mu(x)$$

- **Klein Gordon**  $j_{em}^\mu = iq [\phi_f^* \partial^\mu \phi_i - (\partial^\mu \phi_f^*) \phi_i]$

- **Dirac**  $j_{em}^\mu = q \bar{\psi}_f(x) \gamma^\mu \psi_i(x)$

- Come esempio l'interazione di un fermione con il campo elettromagnetico

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad \mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

il prodotto di  
tre campi:  $\bar{\psi}, \psi, A_\mu$

$$\mathcal{L}' = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}'$$

- Se l'interazione non contiene derivate dei campi i momenti coniugati della teoria interagente non cambiano rispetto a quelli della teoria libera  $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)}$

- L'Hamiltoniana è pertanto

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_D + \mathcal{H}_A + \mathcal{H}'$$

$$\mathcal{H}' = -\mathcal{L}'$$

# Campi interagenti

---

- La Lagrangiana introdotta porta alle seguenti equazioni

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = e\gamma^\mu A_\mu \psi \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi$$

- Si tratta di un sistema di equazioni differenziali non lineari
- Non si sa risolvere in forma chiusa
- Per un tempo fissato è possibile sviluppare i campi in termini di operatori di creazione e distruzione. Ad esempio per  $t = 0$  (vedi diapositiva [213](#))

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, 0) = \int \sum_{\sigma=\pm s} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left( \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} u_{\mathbf{k},\sigma} e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger v_{\mathbf{k},\sigma} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) \quad \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$$

- Purtroppo l'evoluzione di questo sviluppo non può essere fatta come nel caso del campo libero
- In particolare non è più vero che il campo ad un successivo tempo  $t$  possa essere sviluppato negli stessi operatori di creazione e distruzione

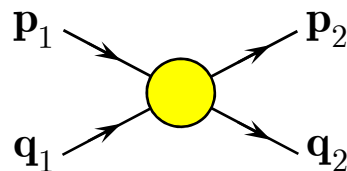
$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \neq \int \sum_{\sigma=\pm s} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left( \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} u_{\mathbf{k},\sigma} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger v_{\mathbf{k},\sigma} e^{+i\omega_{\mathbf{k}}t} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right)$$

- Questo campo non è soluzione delle equazioni di campo con interazione
- Un problema molto complesso
- Si risolve solo con metodi perturbativi

# Teoria dello Scattering

- Vogliamo adesso vedere come si può descrivere un processo di scattering
  - Ad esempio lo scattering di 2 elettroni mediato da interazione elettromagnetica

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$$



- Si comincia assumendo che quando le particelle sono molto distanti l'interazione sia trascurabile e quindi esse possano essere descritte da campi liberi

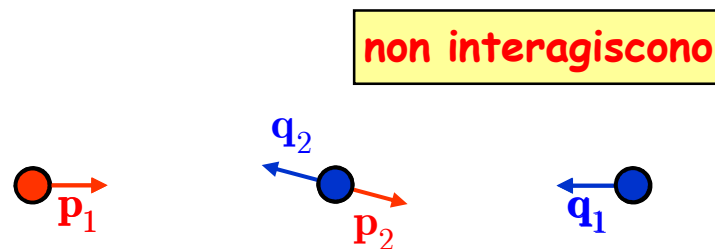
- In particolare, con  $a^\dagger(p)$  è l'operatore di creazione degli elettroni, lo stato iniziale è

$$|p_1, q_1\rangle = a^\dagger(p_1) a^\dagger(q_1) |0\rangle$$

- Il punto importante è che lo stato  $|p_1, q_1\rangle$  contiene tutta la storia delle due particelle libere incidenti (non interagenti, libere)

- Sia nel passato remoto
- Sia nel futuro lontano

- Lo stato finale  $|p_2, q_2\rangle$  non è l'evoluzione libera dello stato  $|p_1, q_1\rangle$



è uno stato differente nel passato e nel futuro

# Teoria dello Scattering: la Matrice $S$

---

- Per i motivi appena illustrati lo stato iniziale è chiamato stato asintotico  $|\rangle_{\text{in}}$

$$|p_1, q_1\rangle_{\text{in}} = a_{\text{in}}^\dagger(p_1) a_{\text{in}}^\dagger(q_1) |0\rangle$$

- Gli stati  $|\rangle_{\text{in}}$  formano una base completa dello spazio di Hilbert
  - Sono stati di particelle non interagenti
  - Sono "etichettati" indicando i momenti delle particelle nel passato remoto
- Nel passaggio dal passato al futuro le particelle interagiscono e il futuro dello stato che interagisce cambia
  - Nel futuro l'interazione può portare a stati liberi diversi da quello iniziale
- Nel 1943 Heisenberg formulò una teoria dello scattering introducendo un operatore nello spazio di Hilbert: la Matrice  $S$

- La matrice  $S$  trasforma lo stato asintotico iniziale nello stato finale

$$S |p_1, q_1\rangle_{\text{in}}$$

- Questo stato rappresenta la sovrapposizione di tutti i possibili stati finali (liberi) in cui lo stato iniziale si può trasformare per effetto dell'interazione
- Lo stato finale, sovrapposizione di tutte le possibilità, deve avere norma 1

$${}_{\text{in}} \langle p_1, q_1 | S^\dagger S | p_1, q_1 \rangle_{\text{in}} = 1$$

$$S^\dagger S = 1$$

La matrice  $S$  è unitaria

# Teoria dello Scattering

---

- Noi siamo interessati al seguente problema
  - Dato lo stato iniziale  $|i\rangle_{\text{in}} = |p_1, q_1\rangle_{\text{in}}$
  - Calcolare la probabilità di avere uno stato finale  $|f\rangle_{\text{in}} = |p_2, q_2\rangle_{\text{in}}$
- Stato finale: sono particelle libere che nel futuro hanno momenti  $p_2$  e  $q_2$
- Nel passato  $|p_2, q_2\rangle_{\text{in}}$  rappresenta particelle libere con i momenti indicati
- Lo stato  $|p_2, q_2\rangle_{\text{in}}$  nel futuro rappresenterà ancora uno stato di particelle libere con i momenti indicati (evoluzione di particelle libere)
- Osserviamo che:
  - Se facciamo variare  $|i\rangle_{\text{in}}$  fra tutti gli stati della base allora gli stati  $S|i\rangle_{\text{in}}$  costituiscono un'altra base
  - Ciò è conseguenza della unitarietà della Matrice  $S$
- Anche gli stati  $S|i\rangle_{\text{in}}$  sono stati di particelle libere
  - La matrice  $S$  collega stati asintotici ottenuti per  $t \rightarrow -\infty$  e  $t \rightarrow +\infty$
  - Non considera esplicitamente i dettagli dell'interazione posta a  $t = 0$
- In conclusione la probabilità cercata è

$$\wp = \left| {}_{\text{in}} \langle p_2, q_2 | S | p_1, q_1 \rangle_{\text{in}} \right|^2$$

$$\wp = \left| {}_{\text{in}} \langle f | S | i \rangle_{\text{in}} \right|^2 = \left| S_{fi} \right|^2$$

# Rappresentazione d'Interazione

- Quando si introducono le interazioni non si può più usare la rappresentazione di Heisenberg perché non si conoscono soluzioni esatte delle equazioni di campo
  - In particolare non si sa calcolare l'effetto dell'operatore di evoluzione

$$\exp[-i\hat{H}(t - t_o)]$$

**$H$  è l'Hamiltoniano completo**

- Consideriamo di nuovo l'equazione di Schrödinger ( $H_o$  è l'Hamiltoniano libero)

$$\hat{H}\psi_S(\mathbf{r},t) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi_S(\mathbf{r},t) \quad \hat{H} = \hat{H}_o + \hat{H}'$$

- Definiamo, tramite l'operatore di evoluzione libero ( $t_o = 0$ )
  - Sostituendo  $\psi_S$  nell'equazione di Schrödinger

$$\psi_I = e^{i\hat{H}_o t}\psi_S$$

$$\psi_S = e^{-i\hat{H}_o t}\psi_I$$

$$\hat{H}e^{-i\hat{H}_o t}\psi_I = i\frac{\partial}{\partial t}(e^{-i\hat{H}_o t}\psi_I) \quad (\hat{H}_o + \hat{H}')e^{-i\hat{H}_o t}\psi_I = \hat{H}_oe^{-i\hat{H}_o t}\psi_I + ie^{-i\hat{H}_o t}\frac{\partial}{\partial t}\psi_I$$

- Moltiplichiamo a sinistra per  $\exp[iH_o t]$  e poniamo  $\hat{H}'_I = e^{i\hat{H}_o t}\hat{H}'e^{-i\hat{H}_o t}$

$$(\hat{H}_o + \hat{H}'_I)\psi_I = H_o\psi_I + i\frac{\partial}{\partial t}\psi_I$$



$$\hat{H}'_I\psi_I = i\frac{\partial}{\partial t}\psi_I$$

- Pertanto nella rappresentazione d'interazione l'equazione di evoluzione della funzione d'onda è determinata solo da  $H'_I$



# Calcolo della Matrice $S$

---

- Troviamo una soluzione formale per  $\psi_I$

- Integrando l'equazione

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_I = \hat{H}'_I \psi_I$$

$$\int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} \psi_I dt = \psi_I(t) - \psi_I(-\infty) = -i \int_{-\infty}^t \hat{H}'_I \psi_I(t_1) dt_1$$

$$\psi_I(t) = \psi_I(-\infty) - i \int_{-\infty}^t \hat{H}'_I \psi_I(t_1) dt_1$$

- Lo stato  $\psi_I(-\infty)$  non è nient'altro che  $|i\rangle_{\text{in}}$  introdotto precedentemente

$$\psi_I(t) = |i\rangle_{\text{in}} - i \int_{-\infty}^t \hat{H}'_I \psi_I(t_1) dt_1$$

- L'equazione può essere risolta iterativamente

- Primo ordine, approssimando  $\psi_I(t) \approx |i\rangle_{\text{in}}$  nell'integrando

$$\psi_I(t) = |i\rangle_{\text{in}} + \int_{-\infty}^t [-i \hat{H}'_I(t_1)] |i\rangle_{\text{in}} dt_1$$

- Secondo ordine: approssimando nell'integrando  $\psi_I(t)$  con la  $\psi_I(t)$  del primo ordine

$$\begin{aligned} \psi_I(t) = |i\rangle_{\text{in}} &+ \int_{-\infty}^t [-i \hat{H}'_I(t_1)] |i\rangle_{\text{in}} dt_1 \\ &+ \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} [-i \hat{H}'_I(t_1)] [-i \hat{H}'_I(t_2)] |i\rangle_{\text{in}} dt_2 \end{aligned}$$

# Calcolo della Matrice $S$

---

- Sommando la serie formalmente

$$\psi_I(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n [H'_I(t_1) H'_I(t_2) \dots H'_I(t_n)] |i\rangle_{\text{in}}$$

- Ricordiamo che per  $t \rightarrow +\infty$  abbiamo definito  $\psi_I(\infty) = S|i\rangle_{\text{in}}$
- Per confronto troviamo un'espressione per la matrice  $S$

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n [\hat{H}'_I(t_1) \hat{H}'_I(t_2) \dots \hat{H}'_I(t_n)]$$

- Nella formula abbiamo ribadito la natura operatoriale delle grandezze
  - Osserviamo che i tempi sono ordinati:  $t_1 > t_2 > \dots > t_n$
  - Definiamo l'operatore di ordinamento cronologico  $T$
- $$T[\hat{A}(t_1) \hat{A}(t_2)] = \begin{cases} \hat{A}(t_1) \hat{A}(t_2) & t_1 > t_2 \\ \hat{A}(t_2) \hat{A}(t_1) & t_2 > t_1 \end{cases}$$
- Si dimostra che si possono estendere tutti gli integrali a  $+\infty$  e si ottiene la serie di Dyson

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dt_1 \int dt_2 \dots \int dt_n T[\hat{H}'_I(t_1) \hat{H}'_I(t_2) \dots \hat{H}'_I(t_n)]$$

# Sviluppo perturbativo

---

- Isoliamo il contributo  $n = 0$

$$\hat{S} = \hat{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dt_1 \int dt_2 \dots \int dt_n T \left[ \hat{H}'_I(t_1) \hat{H}'_I(t_2) \dots \hat{H}'_I(t_n) \right]$$

- Notiamo che la matrice  $S$  contiene un termine 1 che tiene conto del fatto che le particelle possono anche non interagire

- Si dimostra che gli operatori  $H'_I$  sono esprimibili in funzione dei campi liberi  $\hat{\psi}_I$

- Per il calcolo delle sezioni d'urto o delle larghezze di decadimento occorre calcolare elementi di matrice fra stato iniziale e finale

$$\langle f | \hat{S} | i \rangle \equiv S_{fi} = \delta_{fi} + \mathcal{A}_{fi} = \delta_{fi} + \langle f | \hat{A} | i \rangle$$

- Abbiamo implicitamente definito l'ampiezza di transizione  $\mathcal{A}_{fi}$
- Vedremo che l'ampiezza  $\mathcal{A}_{fi}$  contiene a sua volta una funzione  $\delta(p_i - p_f)$  4-dimensionale che esprime la conservazione dell'energia e della quantità di moto
- Si preferisce fattorizzare anche questo aspetto con una ulteriore matrice

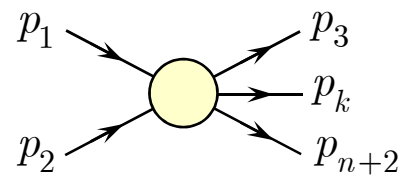
$$\mathcal{A}_{fi} = (2\pi)^4 \delta(p_i - p_f) \mathfrak{M}_{fi}$$

# Sezione d'urto e vita media

- Nella Fisica delle Particelle Elementari si studiano sostanzialmente due fenomeni

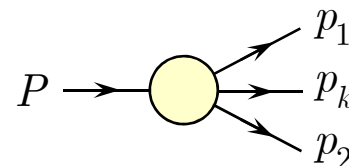
- La diffusione (scattering) di due particelle → sezione d'urto

- Proiettile - Bersaglio →  $\sigma$
- Fasci in collisione →  $\sigma$



- Il decadimento di una particella → larghezza di decadimento

- Vita media →  $\tau$
- Larghezza di decadimento →  $\Gamma = 1/\tau$



- Entrambi i processi vengono descritti per mezzo dell'ampiezza invariante di transizione  $\mathfrak{M}$

$$d\sigma = \frac{|\mathfrak{M}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} d\Phi_n(p_1 + p_2; p_3, \dots, p_{n+2})$$

$$\hbar = c = 1$$

Flusso Incidente

$$d\Gamma = \frac{|\mathfrak{M}|^2}{2M} d\Phi_n(P; p_1, \dots, p_n)$$

Spazio delle Fasi