
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 8

21.10.2025

Tensore Energia-Impulso
Invarianza di gauge globale
Quantizzazione del campo di Dirac
Invarianza di gauge globale e locale

anno accademico 2025-2026

Tensore energia impulso

- Come prima applicazione del teorema di Noether consideriamo l'invarianza della Lagrangiana per traslazioni nello spazio tempo per il campo di Klein-Gordon

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi \phi]$$

- Le traslazioni sono elementi del gruppo di Poincaré
- Si tratta di trasformazioni dello spazio tempo
- Una traslazione è definita come

$$T_a : x \rightarrow x + a \quad \text{per le componenti} \quad x^\nu \rightarrow x^\nu + a^\nu$$

- Trasformazioni differenziabili
- Dipendono dai 4 parametri a^ν
- Per una traslazione infinitesima δa (δa^ν piccoli) i campi hanno una variazione

$$\delta \phi(x) = \phi(x + \delta a) - \phi(x) \approx \phi(x) + \partial_\nu \phi \delta a^\nu - \phi(x) = \delta a^\nu \partial_\nu \phi \quad \frac{\delta \phi}{\delta a^\nu} = \partial_\nu \phi$$

- La corrente di Noether è pertanto $j_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \frac{\delta \phi}{\delta a^\nu} \quad j_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$

- Nella diapositiva [197](#) abbiamo visto che $\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_n)} \delta \phi_n$

- Attenzione $\delta \mathcal{L}$ non è nulla !

- In definitiva

$$\delta \mathcal{L} = \partial^\mu j_{\mu\nu} \delta a^\nu$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta a^\nu} = \partial^\mu j_{\mu\nu} = \partial^\mu \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$$

Tensore energia impulso

- Infatti la lagrangiana è implicitamente una funzione della posizione
 - La variazione indotta dalla traslazione è

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad \delta \mathcal{L} = \delta a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = g_{\mu\nu} \partial^\mu \delta a^\nu \mathcal{L}(x)$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a^\nu} = \partial^\mu g_{\mu\nu} \mathcal{L}(x)}$$

- Uguagliando con l'analoga espressione trovata per la variazione dei campi (vedi diapositiva precedente)

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = \partial^\mu g_{\mu\nu} \mathcal{L}(x)$$

- Definiamo il tensore Energia-Impulso per il campo di Klein Gordon

$$\boxed{T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}(x)}$$

- La conservazione della corrente è
 - Le "cariche" conservate sono le componenti del 4-momento
- In particolare l'Hamiltoniana

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

$$P_\nu = \int T_{0\nu} d^3\mathbf{r}$$

Vedi slide **179**

$$H \equiv P_0 = \int T_{00} d^3\mathbf{r} \quad \mathcal{H} = T_{00} = \partial_0 \phi \partial_0 \phi - g_{00} \mathcal{L}(x)$$

$$\boxed{\mathcal{H} = \dot{\phi} \dot{\phi} - \mathcal{L}(x)}$$

Tensore energia impulso

- Analizziamo anche le componenti $\nu=1,3$ del 4-momento

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}(x)$$

$$P^\nu = \int T_0^\nu d^3\mathbf{r} = \int \partial_0 \hat{\phi} \partial^\nu \hat{\phi} d^3\mathbf{r} = - \int \dot{\hat{\phi}} \nabla \hat{\phi} d^3\mathbf{r}$$

- Anche nel caso di P, come per H, alla fine avremo bisogno di eliminare un contributo infinito

- Oppure adottiamo l'ordinamento normale

$$\hat{P} = - \int : \dot{\hat{\phi}} \nabla \hat{\phi} d^3\mathbf{r} :$$

- Sviluppiamo l'espressione

$$\hat{P} = - \int : \dot{\hat{\phi}} \nabla \hat{\phi} : d^3\mathbf{r} = - \frac{1}{2} \int : \dot{\hat{\phi}} \nabla \hat{\phi} + \hat{\phi} \nabla \dot{\hat{\phi}} : d^3\mathbf{r}$$

- Osserviamo che $\dot{\hat{\phi}} \nabla \hat{\phi} = \nabla(\hat{\phi} \dot{\hat{\phi}}) - (\nabla \hat{\phi}) \dot{\hat{\phi}}$ $\int \partial_i(\hat{\phi} \dot{\hat{\phi}}) d^3\mathbf{r} = \int dx_j dx_k \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_i(\hat{\phi} \dot{\hat{\phi}}) dx_i \rightarrow 0$

- Inoltre $:(\nabla \hat{\phi}) \dot{\hat{\phi}}: = : \hat{\phi} (\nabla \dot{\hat{\phi}}) :$

- Ovviamente le due espressioni conducono a risultati uguali solo se si applicano gli operatori al vuoto $|0\rangle$

- Otteniamo

$$P = - \frac{1}{2} \int : \dot{\hat{\phi}} \nabla \hat{\phi} - \hat{\phi} \nabla \dot{\hat{\phi}} : d^3\mathbf{r}$$

- A questo punto si sostituiscono le rappresentazioni del campo e si trova, come per l'Hamiltoniano

$$P = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{p} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} d^3\mathbf{p}$$

Il campo scalare complesso

- Il campo di Klein-Gordon che abbiamo fino ad ora studiato ha un solo grado di libertà
 - Si utilizza per descrivere particelle neutre senza spin: bosoni neutri
 - Particelle che coincidono con la propria antiparticella
- Per descrivere particelle cariche abbiamo bisogno di un campo complesso
 - La carica va intesa in senso ampio
 - È un numero quantico che distingue particelle e antiparticelle
 - Non è necessariamente la carica elettrica
- Consideriamo due particelle di Klein-Gordon con la stessa massa
 - La Lagrangiana di questo sistema è

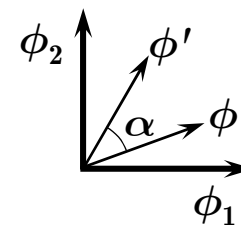
$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{\phi}_1 \partial^\mu \hat{\phi}_1 - \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{\phi}_2 \partial^\mu \hat{\phi}_2 - \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}_2^2$$

- I campi ϕ_1 e ϕ_2 sono due gradi di libertà di un sistema che ha bisogno di due componenti in uno spazio astratto
 - Studiamo gli effetti dell'invarianza rispetto a rotazioni in questo spazio

$$\hat{\phi}'_1 = \hat{\phi}_1 \cos \alpha - \hat{\phi}_2 \sin \alpha$$

$$\hat{\phi}'_2 = \hat{\phi}_1 \sin \alpha + \hat{\phi}_2 \cos \alpha$$

- Le trasformazioni dipendono da un parametro (gruppo $SO[2]$)



Il campo scalare complesso

- Consideriamo una rotazione infinitesima: $\alpha \rightarrow \delta\alpha$ $\cos \delta\alpha \approx 1$ $\sin \delta\alpha \approx \delta\alpha$

- La trasformazione dei campi diventa

- **Pertanto le variazioni dei due campi sono**

$$\hat{\phi}'_1 = \hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2 \delta\alpha \qquad \delta\hat{\phi}_1 = \hat{\phi}'_1 - \hat{\phi}_1 = -\hat{\phi}_2 \delta\alpha \qquad \frac{\delta\hat{\phi}_1}{\delta\alpha} = -\hat{\phi}_2$$

$$\hat{\phi}'_2 = \hat{\phi}_1 \delta\alpha + \hat{\phi}_2 \qquad \delta\hat{\phi}_2 = \hat{\phi}'_2 - \hat{\phi}_2 = \hat{\phi}_1 \delta\alpha \qquad \frac{\delta\hat{\phi}_2}{\delta\alpha} = \hat{\phi}_1$$

- Si tratta di una simmetria interna con un solo parametro

- La corrente di Noether è

$$\hat{N}_\phi^\mu = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \hat{\phi}_n)} \frac{\delta \hat{\phi}_n}{\delta \alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \hat{\phi}_1)} \frac{\delta \hat{\phi}_1}{\delta \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \hat{\phi}_2)} \frac{\delta \hat{\phi}_2}{\delta \alpha}$$

$$= (\partial^\mu \hat{\phi}_1)(-\hat{\phi}_2) + (\partial^\mu \hat{\phi}_2)\hat{\phi}_1$$

$$\boxed{\hat{N}_\phi^\mu = (\partial^\mu \hat{\phi}_2)\hat{\phi}_1 - (\partial^\mu \hat{\phi}_1)\hat{\phi}_2}$$

- La carica conservata è

$$\hat{Q} = \int N_\phi^0 d^3\mathbf{r} = \int (\dot{\hat{\phi}}_2 \hat{\phi}_1 - \dot{\hat{\phi}}_1 \hat{\phi}_2) d^3\mathbf{r}$$

confrontare con la
corrente dell'equazione di
Klein-Gordon

Il campo scalare complesso

- È più conveniente introdurre un campo complesso ϕ

$$\hat{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\phi}_1 - i\hat{\phi}_2) \quad \hat{\phi}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\phi}_1 + i\hat{\phi}_2)$$

- Ricordando lo sviluppo di un campo scalare reale

$$\hat{\phi}_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}} [\hat{a}_{n\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_{n\mathbf{k}}^\dagger e^{+ik \cdot x}]$$

- Troviamo il seguente sviluppo per il campo complesso

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}} [\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{+ik \cdot x}]$$

- Gli operatori a e $b^\dagger$ sono adesso indipendenti

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{1\mathbf{k}} - i\hat{a}_{2\mathbf{k}}) \quad \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{1\mathbf{k}}^\dagger - i\hat{a}_{2\mathbf{k}}^\dagger)$$

- Si può verificare che gli operatori di creazione e distruzione introdotti hanno le seguenti regole di commutazione

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad [\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

- Tutte le altre regole di commutazione sono nulle

Il campo scalare complesso

- Si può verificare facilmente che nel piano complesso la trasformazione che abbiamo introdotto precedentemente diventa

$$\widehat{\phi}' = e^{-i\alpha} \widehat{\phi} \quad \widehat{\phi}' = (1 - i\delta\alpha) \widehat{\phi} \quad \delta\widehat{\phi} = -i\delta\alpha \widehat{\phi} \quad \delta\widehat{\phi}^\dagger = i\delta\alpha \widehat{\phi}^\dagger$$

- La trasformazione in oggetto prende il nome di trasformazione di fase (gruppo $U[1]$) o trasformazione di gauge globale (la fase non dipende da x)
- La Lagrangiana per il campo complesso è $\mathcal{L} = \partial_\mu \widehat{\phi}^\dagger \partial^\mu \widehat{\phi} - m^2 \widehat{\phi}^\dagger \widehat{\phi}$
- Ripetiamo il calcolo precedente utilizzando il campo complesso
- La corrente di Noether

$$\begin{aligned} \widehat{N}_\phi^\mu &= \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \widehat{\phi}_n)} \frac{\delta \widehat{\phi}_n}{\delta \alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \widehat{\phi}^\dagger)} \frac{\delta \widehat{\phi}^\dagger}{\delta \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \widehat{\phi})} \frac{\delta \widehat{\phi}}{\delta \alpha} \\ &= (\partial^\mu \widehat{\phi}) (i\widehat{\phi}^\dagger) + (\partial^\mu \widehat{\phi}^\dagger) (-i\widehat{\phi}) \quad \widehat{N}_\phi^\mu = i [(\partial^\mu \widehat{\phi}) \widehat{\phi}^\dagger - (\partial^\mu \widehat{\phi}^\dagger) \widehat{\phi}] \end{aligned}$$

- La carica conservata è

confrontare con la corrente dell'equazione di Klein-Gordon

$$\widehat{Q} = \int \widehat{N}_\phi^0 d^3\mathbf{r} = i \int [\dot{\widehat{\phi}} \widehat{\phi}^\dagger - \dot{\widehat{\phi}}^\dagger \widehat{\phi}] d^3\mathbf{r}$$



Il campo scalare complesso

- Utilizzando le espansioni integrali si possono calcolare

- L'Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}}] \omega$$

- L'operatore Carica

$$\hat{Q} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} - \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}}]$$

- In entrambi i calcoli si sono trascurati i termini che danno contributo infinito (equivalente a imporre prodotti normali)
 - Entrambi gli operatori (H e Q) si possono esprimere in funzione di due operatori numero relativi a due differenti tipi di quanti

$$\hat{n}_{\mathbf{k}}^+ = \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \quad \hat{n}_{\mathbf{k}}^- = \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}}$$

- Entrambi gli operatori numero (n^+ e n^-) hanno autovalori non negativi
- L'Hamiltoniano contiene la somma di questi operatori
 - L'Hamiltoniano è definito positivo
 - Si è eliminato il problema delle energie negative
- L'operatore Carica è la differenza dei due operatori
 - I due quanti contribuiscono con segno opposto alla carica
 - Hanno carica opposta (sono una antiparticella dell'altro)

Il campo scalare complesso

- Analizziamo un po' meglio l'effetto degli operatori a e b
 - Per un generico operatore di creazione o distruzione o_p

$$[\hat{Q}, \hat{o}_p] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} [\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, \hat{o}_p]$$

- Per i vari operatori di creazione e distruzione si ha

$$[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, \hat{a}_p] = [\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \hat{a}_p] = \hat{a}_k^\dagger [\hat{a}_k, \hat{a}_p] + [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_p] \hat{a}_k = -[\hat{a}_p, \hat{a}_k^\dagger] \hat{a}_k = -(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \hat{a}_k$$

- Pertanto

$$[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, \hat{a}_p] = -(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \hat{a}_k$$

$$[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, \hat{b}_p] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \hat{b}_p$$

- E analogamente ...

$$[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, \hat{a}_p^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \hat{a}_p^\dagger$$

$$[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, \hat{b}_p^\dagger] = -(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \hat{b}_p^\dagger$$

- Inserendo nella relazione di partenza

$$[\hat{Q}, \hat{a}_p] = -\hat{a}_p \quad [\hat{Q}, \hat{a}_p^\dagger] = \hat{a}_p^\dagger \quad [\hat{Q}, \hat{b}_p] = \hat{b}_p \quad [\hat{Q}, \hat{b}_p^\dagger] = -\hat{b}_p^\dagger$$

- Gli operatori a e $b^\dagger$ diminuiscono di 1 la carica
 - L'operatore a distrugge una particella, l'operatore $b^\dagger$ crea un'antiparticella
- Gli operatori $a^\dagger$ e b aumentano di 1 la carica
 - L'operatore $a^\dagger$ crea una particella, l'operatore b distrugge un'antiparticella

Il campo scalare complesso

- Gli stati del campo complesso si costruiscono come nel caso del campo reale
 - Adesso però ci sono due tipi di particelle indipendenti

- Particelle "Positive"

$$|p, +\rangle = \hat{a}_p^\dagger |0\rangle$$

- Particelle "Negative"

$$|p, -\rangle = \hat{b}_p^\dagger |0\rangle$$

- Analogamente si costruiscono stati con un numero arbitrario di quanti dei due tipi
- Data la forma degli operatori Q e H è immediato verificare che l'operatore Q è conservato

$$\dot{\hat{Q}} = [\hat{Q}, \hat{H}] = 0$$

- In assenza di interazioni si può facilmente verificare che il numero di antiparticelle e il numero di particelle si conservano separatamente
- Si può inoltre verificare che per i campi ϕ e $\phi^\dagger$ valgono regole di commutazione con Q simili a quelle degli operatori di creazione e distruzione

$$[\hat{Q}, \phi] = -\phi \quad [\hat{Q}, \phi^\dagger] = \phi^\dagger$$

- Definiamo (tramite sviluppo in serie) l'operatore
 - Si può dimostrare che

$$\hat{U}(\alpha) = e^{i\alpha\hat{Q}}$$

$$\hat{U}(\alpha)\hat{\phi}\hat{U}^{-1}(\alpha) = e^{i\alpha}\hat{\phi}$$

Quantizzazione del Campo di Dirac

- La quantizzazione del campo di Dirac ψ si effettua in modo del tutto analogo alla quantizzazione del campo di Klein-Gordon
 - Seguendo il nostro approccio per il campo di KG
 - Si sviluppa il campo nei modi normali
 - Si promuovono i coefficienti dello sviluppo a operatori
 - Si impongono le regole di commutazione
 - Alternativamente si può seguire il metodo canonico
 - Si scrive la Lagrangiana del campo di Dirac
 - Si individuano i momenti coniugati ai campi
 - Si impongono le relazioni di commutazioni fra campi e momenti coniugati
- Anticipiamo che la differenza fondamentale sta nel fatto che nelle regole di commutazione ai commutatori $[A,B]$ si sostituiscono gli anticommutatori $\{A,B\}$
 - La necessità degli anticommutatori può essere motivata alternativamente
 - Dal principio di esclusione di Pauli che richiede l'antisimmetria degli stati fermionici costruiti con gli operatori di creazione e distruzione
 - Dalla necessità che l'Hamiltoniana sia definita positiva
- Entrambe le impostazioni derivano da motivazioni fisiche
 - Vale la pena approfondire entrambi gli aspetti

Lagrangiana del campo di Dirac

- La Lagrangiana del campo di Dirac è

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^\dagger, \partial_\mu \psi) = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi$$

- Notiamo che non contiene i campi $\partial_\mu \psi^\dagger$

- L'equazione di Dirac segue semplicemente applicando le equazioni di Eulero Lagrange ai campi ψ e $\psi^\dagger$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_n)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_n}$$

- Variando i campi $\psi^\dagger$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^\dagger)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\dagger} \quad 0 = \gamma^0(i\cancel{D} - m)\psi \quad (i\cancel{D} - m)\psi = 0$$

- Alternativamente, variando i campi ψ

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \quad \partial_\mu i\bar{\psi}\gamma^\mu = -m\bar{\psi} \quad \bar{\psi}(i\vec{\cancel{D}} + m) = 0$$

- L'asimmetria fra ψ e $\psi^\dagger$ deriva dal fatto che più Lagrangiane sono possibili

- Ad esempio $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}^* = \overline{[\bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi]} = \overline{[\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi)]} = (\overline{i\gamma^\mu \partial_\mu \psi} - m\bar{\psi})\psi$

$$(\bar{u}Av)^* = \overline{(\bar{u}Av)} = (-i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu - m\bar{\psi})\psi$$

$$\mathcal{L}_1 = -\bar{\psi}(i\vec{\cancel{D}} + m)\psi$$

- Tuttavia si può dimostrare che le azioni corrispondenti differiscono per l'integrale di una 4-divergenza che si può rendere nullo all'infinito

- Pertanto conducono alle stesse equazioni

Hamiltoniana del campo di Dirac

- Possiamo a questo punto calcolare i momenti coniugati di ψ
- I momenti coniugati di $\psi^\dagger$ sono nulli per l'asimmetria fra ψ e $\psi^\dagger$ nella Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi$$

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = \bar{\psi} i \gamma^0 = i \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 = i \psi^\dagger$$

- L'Hamiltoniana è pertanto

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi \partial_0 \psi - \mathcal{L} = i \psi^\dagger \partial_0 \psi - \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi = i \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \partial_0 \psi - \psi^\dagger \gamma^0 (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \\ &= -\psi^\dagger \gamma^0 \left(i \sum_{k=1,3} \gamma^k \partial_k - m \right) \psi = \psi^\dagger (-i \alpha \cdot \nabla + \gamma^0 m) \psi \end{aligned}$$

$$\mathcal{H} = \psi^\dagger (-i \alpha \cdot \nabla + m \beta) \psi$$

- Dal momento che ψ soddisfa l'equazione di Dirac $(-i \alpha \cdot \nabla + m \beta) \psi = i \partial_0 \psi$
- Abbiamo una utile espressione alternativa per l'Hamiltoniana $\mathcal{H} = \psi^\dagger i \partial_0 \psi$
- Si potrebbe calcolare il momento del campo calcolando il tensore $T^{\mu\nu}$
- Diamo i due risultati (il calcolo può essere un esercizio)

$$H = \int d^3 \mathbf{r} \psi^\dagger i \partial_0 \psi$$

$$\mathbf{P} = \int d^3 \mathbf{r} \psi^\dagger (-i \nabla) \psi$$

Espansione del campo di Dirac

- L'espansione del campo di Dirac in onde piane si può fare allo stesso modo di quanto fatto per il campo scalare

$$\hat{\psi}(x) = \int \sum_{\sigma=\pm s} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} u_{\mathbf{k},\sigma} e^{-ik \cdot x} + \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger v_{\mathbf{k},\sigma} e^{+ik \cdot x} \right)$$

- Conviene definire delle funzioni con ben definite proprietà di ortogonalità

$$f_{\mathbf{k},\sigma} = \frac{u_{\mathbf{k},\sigma} e^{-ik \cdot x}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \quad g_{\mathbf{k},\sigma} = \frac{v_{\mathbf{k},\sigma} e^{+ik \cdot x}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}$$

- Si possono verificare le relazioni di ortogonalità

$$\begin{aligned} \int f_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(x) f_{\mathbf{k}'\sigma'}(x) d^3\mathbf{r} &= \delta_{\sigma,\sigma'} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} & \int g_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(x) g_{\mathbf{k}'\sigma'}(x) d^3\mathbf{r} &= \delta_{\sigma,\sigma'} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \\ \int f_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(x) g_{\mathbf{k}'\sigma'}(x) d^3\mathbf{r} &= 0 & \int g_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(x) f_{\mathbf{k}'\sigma'}(x) d^3\mathbf{r} &= 0 \end{aligned}$$

- Il campo diventa $\hat{\psi}(x) = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k} \left(f_{\mathbf{k},\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + g_{\mathbf{k},\sigma} \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \right)$

- Utilizzando queste relazioni si può facilmente invertire l'espansione

$$\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} = \int f_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger(x) \hat{\psi}(x) d^3\mathbf{r} \quad \hat{b}_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger = \int g_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger(x) \hat{\psi}(x) d^3\mathbf{r}$$

Quantizzazione del campo di Dirac

- Possiamo adesso discutere la quantizzazione del campo di Dirac

- Seguendo il nostro approccio iniziale promuoviamo le funzioni $a_{\mathbf{k}\sigma}$ e $b_{\mathbf{k}\sigma}$ a operatori in uno spazio astratto e fissiamo le regole di anti-commutazione

$$\{\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad \{\hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{b}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad \boxed{\text{tutte le altre nulle}}$$

- Con questi operatori si possono costruire gli stati con n particelle nello spazio di Fock

$$|\mathbf{k}_1\sigma_1, \dots, \mathbf{k}_n\sigma_n\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{k}_1} \dots 2E_{\mathbf{k}_n}} a_{\mathbf{k}_1\sigma_1}^\dagger \dots a_{\mathbf{k}_n\sigma_n}^\dagger |0\rangle$$

- Una analoga espressione si può scrivere con gli operatori $b^\dagger$ (antiparticelle)
- Le regole di anti-commutazione fra gli operatori a e b assicurano che gli stati hanno la corretta antisimmetria rispetto alle permutazioni di due particelle

$$|\mathbf{k}_1\sigma_1, \dots, \mathbf{k}_j\sigma_j, \dots, \mathbf{k}_k\sigma_k, \dots, \mathbf{k}_n\sigma_n\rangle = \pm |\mathbf{k}_1\sigma_1, \dots, \mathbf{k}_k\sigma_k, \dots, \mathbf{k}_j\sigma_j, \dots, \mathbf{k}_n\sigma_n\rangle$$

- Il segno è $+$ o $-$ per permutazioni pari o dispari rispettivamente
- Nel seguito sarà utile trattare separatamente le due componenti di un campo

$$\hat{\psi}(x) = \hat{\psi}_a(x) + \hat{\psi}_{b^\dagger}(x)$$

- La componente a energia positiva $\hat{\psi}_a(x) = \int \sum_{\sigma=\pm s} f_{\mathbf{k}\sigma}(x) \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} d^3\mathbf{k}$

- La componente a energia negativa $\hat{\psi}_{b^\dagger}(x) = \int \sum_{\sigma=\pm s} g_{\mathbf{k}\sigma}(x) \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger d^3\mathbf{k}$
-

Quantizzazione del campo di Dirac

- Studiamo l'effetto del campo $\psi(x)$ sul vuoto

$$\hat{\psi}(x) = \int \sum_{\sigma=\pm s} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} u_{\mathbf{k},\sigma} e^{-ik \cdot x} + \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger v_{\mathbf{k},\sigma} e^{+ik \cdot x} \right)$$

- In particolare l'effetto di $\hat{\psi}^\dagger(x)$

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^\dagger |0\rangle &= \int \sum_{\sigma=\pm s} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger u_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger e^{+ik \cdot x} |0\rangle + \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma} v_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger e^{-ik \cdot x} |0\rangle \right) \\ &= \int \sum_{\sigma=\pm s} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger u_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger e^{+ik \cdot x} |0\rangle \end{aligned}$$

- Notiamo che $\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger |0\rangle$ è uno stato di una particella di momento $\mathbf{k}$
 - Pertanto $\hat{\psi}^\dagger |0\rangle$ è la sovrapposizione di infiniti stati con infiniti valori di $\mathbf{k}$
- Effettuiamo l'analisi dello stato come nel caso di Klein-Gordon (diapositiva 169)
 - I due stati sono

$$|\mathbf{p}, \rho, a\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}\rho}^\dagger |0\rangle \quad (\hat{\psi}^\dagger |0\rangle)^\dagger = \langle 0 | \hat{\psi} = \int \sum_{\sigma=\pm s} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} u_{\mathbf{k},\sigma} e^{-ik \cdot x}$$

- Otteniamo

$$\langle 0 | \hat{\psi} | \mathbf{p}, \rho, a \rangle = \int \sum_{\sigma=\pm s} \frac{d^3\mathbf{k} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} u_{\mathbf{k},\sigma} e^{-ik \cdot x} a_{\mathbf{p}\rho}^\dagger | 0 \rangle = \int \sum_{\sigma=\pm s} \frac{d^3\mathbf{k} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} u_{\mathbf{k},\sigma} e^{-ik \cdot x} \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} a_{\mathbf{p}\rho}^\dagger | 0 \rangle$$

Quantizzazione del campo di Dirac

$$\langle 0 | \hat{\psi} | \mathbf{p}, \rho, a \rangle = \int \sum_{\sigma=\pm s} \frac{d^3 \mathbf{k} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} u_{\mathbf{k},\sigma} e^{-ik \cdot x}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} a_{\mathbf{p}\rho}^\dagger | 0 \rangle$$

- Ricordiamo

$$\{ \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger \} = (2\pi)^3 \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

- Otteniamo

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\psi} | \mathbf{p}, \rho, a \rangle &= \int \sum_{\sigma=\pm s} \frac{d^3 \mathbf{k} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} u_{\mathbf{k},\sigma} e^{-ik \cdot x}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p},\rho}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + (2\pi)^3 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \delta_{\rho\sigma} | 0 \rangle \\ &= \int \sum_{\sigma=\pm s} \frac{d^3 \mathbf{k} u_{\mathbf{k},\sigma} e^{-ik \cdot x} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} (2\pi)^3 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \delta_{\rho\sigma} = u_{\mathbf{p}\rho} e^{-ik \cdot x} \end{aligned}$$

- Ancora una volta abbiamo trovato una soluzione dell'equazione di Dirac
 - Onda piana di una particella localizzata in x
- Analogamente si dimostra che $\psi(x)$ produce uno stato di antiparticella
 - Con un calcolo simile al precedente si può dimostrare che

$$\langle \mathbf{p}, \rho, b | \hat{\psi} | 0 \rangle = v_{\mathbf{p}\rho} e^{+ip \cdot x}$$

Quantizzazione del campo di Dirac

- Analogamente si dimostra che $\psi(x)$ produce uno stato di antiparticella

$$\hat{\psi}|0\rangle = \int \sum_{\sigma=\pm s} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} u_{\mathbf{k},\sigma} e^{-ik \cdot x} |0\rangle + \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger v_{\mathbf{k},\sigma} e^{+ik \cdot x} |0\rangle \right)$$

$$|\mathbf{p}, \rho, b\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \hat{b}_{\mathbf{p},\rho}^\dagger |0\rangle \rightarrow \langle \mathbf{p}, \rho, b| = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \langle 0| \hat{b}_{\mathbf{p},\rho}$$

- Otteniamo

$$\langle \mathbf{p}, \rho, b | \hat{\psi} | 0 \rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \langle 0 | \hat{b}_{\mathbf{p},\rho} \hat{\psi} | 0 \rangle = \int \sum_{\sigma=\pm s} \frac{d^3\mathbf{k} v_{\mathbf{k},\sigma} e^{+ik \cdot x} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \langle 0 | \hat{b}_{\mathbf{p},\rho} \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger | 0 \rangle$$

- Ricordiamo

$$\{\hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}, \hat{b}_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

- Otteniamo

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}, \rho, b | \hat{\psi} | 0 \rangle &= \int \sum_{\sigma=\pm s} \frac{d^3\mathbf{k} v_{\mathbf{k},\sigma} e^{+ik \cdot x} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \langle 0 | \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p},\rho} + (2\pi)^3 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \delta_{\rho\sigma} | 0 \rangle \\ &= \int \sum_{\sigma=\pm s} \frac{d^3\mathbf{k} v_{\mathbf{k},\sigma} e^{+ik \cdot x} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} (2\pi)^3 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \delta_{\rho\sigma} = v_{\mathbf{p},\rho} e^{+ip \cdot x} \end{aligned}$$

Quantizzazione del campo di Dirac

- Verifichiamo le regole di anticommutazione (a tempi uguali $t = t'$)

$$\{\hat{\psi}_n(x), \hat{\psi}_m(x')\} \quad \{\hat{\psi}_n^\dagger(x), \hat{\psi}_m^\dagger(x')\} \quad \{\hat{\psi}_n(x), \hat{\psi}_m^\dagger(x')\}$$

- Abbiamo indicato la commutazione delle singole componenti

- I campi ψ hanno 4 componenti

- Dal momento che gli operatori a e b anti-commutano fra di loro avremo

$$\{\hat{\psi}_n(x), \hat{\psi}_m^\dagger(x')\} = \{\hat{\psi}_{an}(x), \hat{\psi}_{am}^\dagger(x')\} + \{\hat{\psi}_{b^\dagger n}(x), \hat{\psi}_{b^\dagger m}^\dagger(x')\}$$

- Cominciamo con le componenti a energia positiva

$$\{\hat{\psi}_{an}(x), \hat{\psi}_{am}^\dagger(x')\} = \int \sum_{\sigma\sigma'} d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' f_{\mathbf{k}\sigma n}(x) f_{\mathbf{k}'\sigma' m}^\dagger(x') \{\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger\}$$

$$= (2\pi)^3 \int \sum_{\sigma} d^3\mathbf{k} f_{\mathbf{k}\sigma n}(x) f_{\mathbf{k}\sigma m}^\dagger(x')$$

$$\{\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} e^{+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \sum_{\sigma} u_{\mathbf{k}\sigma n} u_{\mathbf{k}\sigma m}^\dagger$$

Ricordiamo $t = t'$

- Analogamente per le componenti a energia negativa

$$\begin{aligned} \{\hat{\psi}_{b^\dagger n}(x), \hat{\psi}_{b^\dagger m}^\dagger(x')\} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \sum_{\sigma} v_{\mathbf{k}\sigma n} v_{\mathbf{k}\sigma m}^\dagger \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} e^{+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \sum_{\sigma} v_{-\mathbf{k}\sigma n} v_{-\mathbf{k}\sigma m}^\dagger \end{aligned}$$

Quantizzazione del campo di Dirac

- Sommando i due pezzi

$$\left\{ \widehat{\psi}_n(x), \widehat{\psi}_m^\dagger(x') \right\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} e^{+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \left(\sum_{\sigma} u_{\mathbf{k}\sigma} u_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger + \sum_{\sigma} v_{-\mathbf{k}\sigma} v_{-\mathbf{k}\sigma}^\dagger \right)_{nm}$$

- Oltre alle relazioni di completezza già studiate (diapositiva **82**) ne esistono altre

$$\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \sum_{\sigma} \left(u_{\mathbf{k}\sigma} u_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger + v_{-\mathbf{k}\sigma} v_{-\mathbf{k}\sigma}^\dagger \right)_{nm} = \widehat{I}_{nm} = \delta_{nm} \quad \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} (\cdots) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

- In conclusione otteniamo

$$\left\{ \widehat{\psi}_n(x), \widehat{\psi}_m^\dagger(x') \right\} = \delta_{nm} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} e^{+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$$

$$\boxed{\left\{ \widehat{\psi}_n(x), \widehat{\psi}_m^\dagger(x') \right\} = \delta_{nm} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}$$

- Con una procedura simile si ottengono le altre relazioni

$$\boxed{\left\{ \widehat{\psi}_n(x), \widehat{\psi}_m(x') \right\} = 0}$$

$$\boxed{\left\{ \widehat{\psi}_n^\dagger(x), \widehat{\psi}_m^\dagger(x') \right\} = 0}$$

Hamiltoniana e regole di commutazione

- Veniamo adesso all'espressione dell'Hamiltoniana in funzione degli operatori di creazione e distruzione
 - È conveniente partire dalle relazioni

$$H = \int d^3\mathbf{r} \psi^\dagger i \partial_0 \psi \quad \psi(x) = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k} (f_{\mathbf{k},\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + g_{\mathbf{k},\sigma} \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger)$$

- Utilizzando l'espansione di ψ otteniamo

$$i \partial_0 \psi(x) = \int \sum_{\sigma'=\pm s} d^3\mathbf{k}' E_{\mathbf{k}'} (f_{\mathbf{k}',\sigma'} \hat{a}_{\mathbf{k}',\sigma'} - g_{\mathbf{k}',\sigma'} \hat{b}_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger) \quad \psi^\dagger(x) = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k} (f_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger + g_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma})$$

- Introducendo nell'Hamiltoniana

$$H = \int d^3\mathbf{r} \psi^\dagger i \partial_0 \psi = \int d^3\mathbf{r} \sum_{\sigma,\sigma'=\pm s} d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' (f_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger + g_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}) E_{\mathbf{k}'} (f_{\mathbf{k}',\sigma'} \hat{a}_{\mathbf{k}',\sigma'} - g_{\mathbf{k}',\sigma'} \hat{b}_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger)$$

- Eseguiamo l'integrazione sul volume

- Utilizziamo le relazioni di ortogonalità: sopravvivono solo due termini

$$H = \int \sum_{\sigma,\sigma'=\pm s} d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' E_{\mathbf{k}'} \int d^3\mathbf{r} (f_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger f_{\mathbf{k}',\sigma'} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}',\sigma'} - g_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger g_{\mathbf{k}',\sigma'} \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \hat{b}_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger)$$

nel caso di Dirac c'è solo una derivata ∂_0

$$= \int \sum_{\sigma,\sigma'=\pm s} d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' E_{\mathbf{k}'} (\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}',\sigma'} \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \hat{b}_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}) = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k} E_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} - \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger)$$

Hamiltoniana e regole di commutazione

$$\hat{H} = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k} E_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} - \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \right)$$

- Il termine relativo ai quanti a è già sotto forma di un operatore numero
- Per mettere anche il secondo termine sotto forma di operatore numero abbiamo bisogno di commutare i due operatori
- Se usassimo una regola di commutazione (trascuriamo il termine infinito)

$$\left[\hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}, \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \right] = c \rightarrow \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger = c + \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \quad H = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k} E_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} - \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \right)$$

- L'Hamiltoniana non sarebbe definita positiva
- I quanti b contribuirebbero con energia negativa !
- Al contrario, con una regola di anti-commutazione

$$\left\{ \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}, \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \right\} = c \rightarrow \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger = c - \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}, \quad \hat{H} = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k} E_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \right)$$

- Questa volta anche i quanti b contribuiscono all'energia con segno positivo
- Adottare regole di anti-commutazione è necessario per avere una Hamiltoniana definita positiva

Invarianza di gauge globale

- Anche la Lagrangiana del campo di Dirac è invariante per trasformazioni di fase costante: trasformazioni di gauge globali

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \quad \psi \rightarrow \psi' = e^{-i\alpha}\psi \quad \psi^\dagger \rightarrow \psi'^\dagger = e^{+i\alpha}\psi^\dagger$$

- Ovviamente, se la fase è costante, la Lagrangiana è invariante

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}'(i\not{\partial} - m)\psi' = e^{+i\alpha}\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)e^{-i\alpha}\psi = e^{+i\alpha}e^{-i\alpha}\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi = \mathcal{L}$$

- Calcoliamo adesso la corrente che corrisponde a questa invarianza

- Per una trasformazione infinitesima

$$\psi' = (1 - i\delta\alpha)\psi \quad \delta\psi = -i\delta\alpha\psi \quad \frac{\delta\psi}{\delta\alpha} = -i\psi \quad \text{Analogamente} \quad \frac{\delta\psi^\dagger}{\delta\alpha} = i\psi^\dagger$$

- Ricordiamo l'espressione per la corrente di Noether

$$j^\mu = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_n)} \frac{\delta\psi_n}{\delta\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \frac{\delta\psi}{\delta\alpha} + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^\dagger)} \frac{\delta\psi^\dagger}{\delta\alpha}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu$$

$$j^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu(-i\psi)$$



$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^\dagger)} = 0$$

- Abbiamo ritrovato la corrente di probabilità della teoria di Dirac

- È una corrente conservata

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

Invarianza di gauge globale

- Calcoliamo adesso la carica conservata associata alla conservazione della corrente

$$\hat{Q} = \int j^0 d^3\mathbf{r} = \int \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) d^3\mathbf{r} = \int \psi^\dagger(x) \psi(x) d^3\mathbf{r}$$

- Le espansioni dei campi sono

$$\hat{\psi}(x) = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k} (f_{\mathbf{k},\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + g_{\mathbf{k},\sigma} \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger) \quad \hat{\psi}^\dagger(x) = \int \sum_{\sigma'=\pm s} d^3\mathbf{k}' (f_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger + g_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}',\sigma'})$$

- Inserendo le due espressioni nella carica

$$\hat{Q} = \int d^3\mathbf{r} d\mathbf{k}' d\mathbf{k} \sum_{\sigma\sigma'} (f_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger + g_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}',\sigma'}) (f_{\mathbf{k},\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + g_{\mathbf{k},\sigma} \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger)$$

- Utilizzando le proprietà di ortogonalità delle funzioni f e g sopravvivono solo due termini

$$\hat{Q} = \int d\mathbf{k}' d\mathbf{k} \sum_{\sigma\sigma'} \int d^3\mathbf{r} (f_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger f_{\mathbf{k},\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + g_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger g_{\mathbf{k},\sigma} \hat{b}_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma})$$

$$\hat{Q} = \int d\mathbf{k}' d\mathbf{k} \sum_{\sigma\sigma'} (\hat{a}_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + \hat{b}_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}) = \int d\mathbf{k} \sum_{\sigma} (\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma})$$

Invarianza di gauge globale

$$\hat{Q} = \int d\mathbf{k} \sum_{\sigma} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \right)$$

- Vediamo che anche in questo caso per trasformare il secondo operatore in un operatore numero abbiamo bisogno di regole di commutazione

- Vediamo adesso l'effetto di avere utilizzato anticommutatori

$$\{ \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}, \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \} = c \rightarrow \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} = c - \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}, \quad \hat{Q} = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} - \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \right)$$

- Con questa scelta le particelle e le antiparticelle hanno cariche opposte
- Nei due calcoli che abbiamo fatto (Q e H) abbiamo scartato il contributo infinito che deriva dal commutatore
 - Nel caso dei campi fermionici abbiamo però cambiato anche il segno degli operatori
 - Dobbiamo precisare la definizione del prodotto normale nel caso di campi fermionici
 - Il prodotto normale porta gli operatori di distruzione a destra e inserisce un segno $+$ o $-$ a seconda del numero pari o dispari di permutazioni

$$: \hat{a}_1 \hat{a}_2^{\dagger} : := -\hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_1 \quad : \hat{b}_1 \hat{a}_1 \hat{a}_2^{\dagger} : := \hat{a}_2^{\dagger} \hat{b}_1 \hat{a}_1$$

Invarianza di gauge globale

- L'invarianza globale di gauge della Lagrangiana di Dirac porta alla corrente conservata $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi$ $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$

- L'aspetto importante, conseguenza dell'invarianza di gauge, è il fatto che i campi appaiono nella forma

$$\hat{j} = \hat{\psi}^\dagger \hat{O} \hat{\psi}$$

- Banalizzando, la presenza contemporanea di un campo hermitiano coniugato e un campo normale assicura che compaia il prodotto della fase e della sua complessa coniugata il cui prodotto è 1
- Meno banale: la presenza contemporanea di un campo hermitiano coniugato e un campo "normale" assicura che la carica sia conservata
- I campi contengono operatori di creazione e distruzione: protoni e antiprotoni

$$\hat{\psi}^\dagger(x) = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k} (f_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger + g_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma})$$

$$\hat{\psi}(x) = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k} (f_{\mathbf{k},\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + g_{\mathbf{k},\sigma} \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger)$$

- L'applicazione della corrente a uno stato induce una variazione di carica nulla

$$\Delta Q = 0$$

		p			$\bar{p}$			
$\psi^\dagger$	ψ	$\psi^\dagger$	ψ	Q_p	$\psi^\dagger$	ψ	$Q_{\bar{p}}$	Q_T
$a^\dagger$	a	+1	-1	0			0	0
$a^\dagger$	$b^\dagger$	+1		+1		+1	-1	0
b	a		-1	-1	-1		+1	0
b	$b^\dagger$			0	-1	+1	0	0



Invarianza locale di gauge e QED

- Gli elettroni liberi sono descritti dalla Lagrangiana

$$\mathcal{L}_e = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

- Questa Lagrangiana è invariante per trasformazioni di gauge globali
 - Gruppo $U(1)$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x)$$

- L'invarianza si perde se α dipende da x (trasformazioni di gauge locali)

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x)$$

- Infatti, se α è funzione di x

$$\partial_\mu\psi'(x) = \partial_\mu e^{i\alpha(x)}\psi(x) = e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\psi(x) + e^{i\alpha(x)}[i\partial_\mu\alpha(x)]\psi(x)$$

- Il termine aggiuntivo, dovuto al fatto che α dipende da x , distrugge l'invarianza

- La Lagrangiana modificata è

$$\mathcal{L}'_e = \bar{\psi}(x)e^{-i\alpha(x)}e^{i\alpha(x)}\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) + \bar{\psi}(x)e^{-i\alpha(x)}e^{i\alpha(x)}\gamma^\mu[i\partial_\mu\alpha(x)]\psi(x) - m\bar{\psi}(x)e^{-i\alpha(x)}e^{i\alpha(x)}\psi(x)$$

$$\mathcal{L}'_e = \mathcal{L}_e + \bar{\psi}(x)[i\gamma^\mu\partial_\mu\alpha(x)]\psi(x)$$

non è invariante

Invarianza locale di gauge e QED

- Si può costruire una teoria in cui la Lagrangiana sia invariante per trasformazioni di gauge locali
 - Aggiungendo degli altri campi
 - Modificando opportunamente l'operatore differenziale
- Partiamo dal secondo punto, la modifica dell'operatore differenziale
 - Occorre compensare la derivata per la variazione del gauge
 - Derivata Covariante
 - Aggiungiamo un termine "moltiplicazione per funzione" all'operatore ∂_μ
 - A_μ serve per compensare il termine aggiuntivo introdotto dalla trasformazione locale di fase
 - Perché questo avvenga è necessario che anche la funzione $A_\mu(x)$ si trasformi in un modo ben determinato se si opera una trasformazione di gauge locale
 - Ricordiamo il termine aggiuntivo
$$\mathcal{L}'_e = \mathcal{L}_e + \bar{\psi}(x) \left[i\gamma^\mu \partial_\mu \alpha(x) \right] \psi(x)$$
 - Per compensarlo
$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$$
 - Ricordiamo l'elettrodinamica classica !
- Nella prossima diapositiva si verifica che la Lagrangiana scritta utilizzando la derivata covariante è invariante per le trasformazioni di gauge locali di ψ e A_μ

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x)$$

Invarianza locale di gauge e QED

- Infatti la nuova Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi$$

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

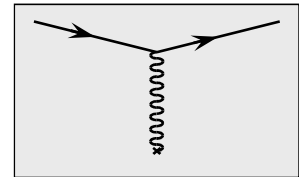
- Verifichiamo che la Lagrangiana scritta utilizzando la derivata covariante è invariante per le trasformazioni di gauge locali di ψ e A_μ

- Abbiamo infatti visto nelle diapositive precedenti che

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \rightarrow i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\bar{\psi}\gamma^\mu [i\partial_\mu\alpha(x)]\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha(x)$$

$$e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \rightarrow e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)) = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

- I due termini aggiuntivi dovuti alle trasformazioni di gauge di ψ e A_μ si elidono



- Notiamo che il termine aggiuntivo introdotto dalla derivata covariante D_μ
 - Garantisce l'invarianza di gauge
 - Rappresenta l'interazione dell'elettrone con un campo vettoriale (v.diap. [246](#))
- La teoria viene completata introducendo il termine cinetico per il campo A_μ

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

- Il termine cinetico è la lagrangiana libera di una particella vettoriale di spin 1 che è il campo elettromagnetico (il fotone)

Invarianza locale di gauge e QED

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

- Il termine cinetico per il campo vettoriale A_μ corrisponde al termine cinetico dell'elettrone $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$
- Descrive l'evoluzione libera del campo A_μ
 - È la lagrangiana del campo elettromagnetico
 - Si verifica facilmente che anche il nuovo termine cinetico possiede l'invarianza di gauge
 - In particolare $F^{\mu\nu}$ è già invariante
- Se il campo A_μ descrivesse una particella con massa m_γ la Lagrangiana dovrebbe contenere anche il termine

$$\mathcal{L}_{m_\gamma} = m_\gamma A^\mu A_\mu$$

- Questo termine non sarebbe invariante rispetto alle trasformazioni di gauge del campo A_μ
- Per avere una teoria per campi vettoriali che possenga l'invarianza di gauge locale occorre che il quanto del campo A_μ sia una particella senza massa