# Interazioni Elettrodeboli


prof. Francesco Ragusa
Università di Milano


## Lezione n. 6

14.10.2025

## Analisi di Fourier dei campi di KG ed EM
## Radiazione del corpo nero – Ipotesi di Planck
## Oscillatore Quantistico

anno accademico 2025-2026

# Analisi di Fourier del campo di Klein-Gordon

- Consideriamo un campo (reale) $\phi(x)$ che soddisfi l'equazione di Klein-Gordon

$$\boxed{\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right)\phi = 0}$$

  - Possiamo rappresentare il campo con un integrale di Fourier

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\tilde{\Phi}(k)e^{ik\cdot x}$$

  - Se il campo è reale si ha anche

$$\boxed{\tilde{\Phi}(-k) = \tilde{\Phi}^*(k)}$$

  - L'applicazione di $(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)$ a $\phi(x)$ dà

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right)\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\left(-k^\mu k_\mu + m^2\right)\tilde{\Phi}(k)e^{ik\cdot x} = 0$$

- La funzione $\tilde{\Phi}(k)$ ($k$ quadri-dimensionale) deve essere singolare
  - Infatti deve essere $\left(-k^2 + m^2\right)\tilde{\Phi}(k) = 0 \Longrightarrow \tilde{\Phi}\left(k\right) = 0$ per $-k^2 + m^2 \neq 0$
  - E allo stesso tempo l'integrale che dà $\phi(x)$ deve essere non nullo
- Avremo pertanto

$$\tilde{\Phi}(k) = \Phi(k)\delta\left(k^2 - m^2\right)$$

- Possiamo eliminare la funzione $\delta(k^2 - m^2)$ integrando su $k^0$

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dk^0 d^3\mathbf{k}\Phi(k)\delta\left(k^2 - m^2\right)e^{ik\cdot x}$$

# Analisi di Fourier del campo di Klein-Gordon

- Ricordiamo che

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} \qquad f(x_i) = 0$$

- Nel nostro caso $(x = k_0)$

$$f(k_0) = k_0^2 - \mathbf{k}^2 - m^2$$

- Pertanto

$$\delta(k^2 - m^2) = \frac{1}{2E_\mathbf{k}}\left[\delta(k^0 - E_\mathbf{k}) + \delta(k^0 + E_\mathbf{k})\right]$$

- Ci sono 2 zeri ( $k_0 = \pm E_\mathbf{k}$)

$$E_\mathbf{k} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$$

- Introducendo nell'integrale di Fourier

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3\mathbf{k} \int \frac{dk^0}{2E_\mathbf{k}}\Phi(k)\left[\delta(k^0 + E_\mathbf{k}) + \delta(k^0 - E_\mathbf{k})\right]e^{ik^0 t}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)2E_\mathbf{k}}\left[\Phi(-E_\mathbf{k}, \mathbf{k})e^{-iE_\mathbf{k}t} + \Phi(E_\mathbf{k}, \mathbf{k})e^{iE_\mathbf{k}t}\right]e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

- Inoltre, nel primo termine, possiamo utilizzare il fatto che gli integrali sono estesi da $-\infty$ a $+\infty$ per sostituire $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)2E_\mathbf{k}}\left[\Phi(-E_\mathbf{k}, -\mathbf{k})e^{-iE_\mathbf{k}t}e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \Phi(E_\mathbf{k}, \mathbf{k})e^{+iE_\mathbf{k}t}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right]$$

# Analisi di Fourier del campo di Klein-Gordon

- Infine **definiamo** le due funzioni

$$a(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\Phi(-E_\mathbf{k}, -\mathbf{k}) \qquad b(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\Phi(E_\mathbf{k}, \mathbf{k})$$

  - Sostituiamo nell'integrale

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x} + b(\mathbf{k})e^{+ik\cdot x}\right]$$

- Per un campo **reale** ricordiamo che

$$\boxed{\tilde{\Phi}(-k) = \tilde{\Phi}^*(k)}$$

  - La condizione implica

$$b(\mathbf{k}) = a^*(\mathbf{k})$$

  - Per un campo reale l'espansione diventa

$$\boxed{\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x} + a^*(\mathbf{k})e^{+ik\cdot x}\right]}$$

- Per finire notiamo che se scriviamo $a(t) = a(\mathbf{k})e^{-i\omega_k t}$ $\qquad \omega_\mathbf{k} \equiv E_\mathbf{k}$
  - L'equazione di Klein-Gordon impone che $a(t)$ soddisfi l'equazione **dell'oscillatore**

$$\frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2} + \left(\mathbf{k}^2 + m^2\right)a(t) = 0 \qquad \frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2} + \omega_\mathbf{k}^2\, a(t) = 0$$

# Il campo elettromagnetico classico

- Applichiamo il formalismo appena esposto al campo elettromagnetico
- Equazioni di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_o \mathbf{J} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

  - Introduciamo i potenziali $\mathbf{A}$ e $\Phi$
  - I campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ si ottengono dai potenziali come

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\Phi \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- È noto che potenziali sono definiti a meno di una trasformazione di gauge

$$\Phi \to \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \qquad \mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\chi$$

  - Si può infatti verificare che si ottengono gli stessi campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$
- Sostituendo le espressioni di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ nella seconda e terza equazione di Maxwell otteniamo le equazioni per i potenziali

$$\nabla^2\Phi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{A} = \mu_o\mathbf{J} - \nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi + \nabla \cdot \mathbf{A}\right)$$

# Il campo elettromagnetico classico

- Si può utilizzare l'indeterminazione dei potenziali per semplificare le equazioni
  - Si fissa il gauge
- I gauge più utilizzati sono
  - Il gauge di Lorentz

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0}$$

    - Le equazioni dei potenziali diventano

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_o \mathbf{J}$$

  - Il gauge di Coulomb o gauge di radiazione

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0}$$

    - Le equazioni dei potenziali diventano

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_o \mathbf{J} - \frac{1}{c^2}\nabla \frac{\partial}{\partial t}\nabla \Phi$$

- Il gauge di Lorentz ha il vantaggio di essere covariante
  - Non dipende dal sistema di riferimento
- Il gauge di Coulomb non è covariante
  - Mette in evidenza il carattere trasversale dell'onda elettromagnetica

# Onde elettromagnetiche

- Consideriamo adesso un campo elettromagnetico
  - Utilizziamo il gauge di Coulomb

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0}$$

- Come abbiamo visto l'equazione del potenziale scalare diventa

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \cancel{\nabla} \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad \nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'}$$

- Nel vuoto, quindi in assenza di sorgenti: $\rho = 0 \quad \mathbf{J} = 0$
  - Pertanto il potenziale elettrico è nullo $\Phi = 0$
- L'equazione per il potenziale vettore diventa

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \cancel{\mu_o \mathbf{J}} - \nabla\left(\cancel{\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}} \nabla\Phi + \cancel{\nabla} \cdot \mathbf{A}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = 0}$$

- Pertanto ciascuna delle componenti del potenziale soddisfa l'equazione dell'onda
  - L'analisi di Fourier del potenziale conduce alla rappresentazione integrale

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \left[\mathbf{a}(\mathbf{k}) e^{-ik\cdot x} + \mathbf{a}^*(\mathbf{k}) e^{+ik\cdot x}\right]} \qquad \omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$$

  - Come nel caso di Klein-Gordon, posto $a(t) = a(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k t}$
  - L'equazione dell'onda impone che $a(t)$ soddisfi

$$\boxed{\frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2} + \omega_{\mathbf{k}}^2\, a(t) = 0}$$

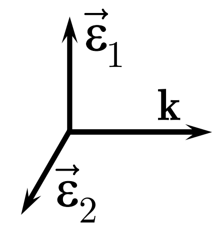
# Onde elettromagnetiche

- La condizione del gauge di Coulomb permette di evidenziare la **natura trasversale** dell'onda

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\left[\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{a}^*(\mathbf{k})e^{+ik\cdot x}\right] = 0$$

  - Pertanto le **ampiezze** $\mathrm{a}(\mathrm{k})$ devono essere perpendicolari al **vettore d'onda** $\mathrm{k}$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{k}) = 0$$




- Il vettore $\mathrm{a}(\mathrm{k})$ ha pertanto **solo due** gradi di libertà **(stati di polarizzazione)**
  - Si introducono pertanto due vettori **mutuamente perpendicolari e perpendicolari a** $\mathrm{k}$

$$\mathbf{a}(\mathbf{k}) = \sum_{\lambda=1,2}\vec{\varepsilon}_\lambda(\mathbf{k})a_\lambda(\mathbf{k})$$

- Possiamo infine calcolare i campi elettrico e magnetico

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\,c|\mathbf{k}|\left[\mathbf{a}(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x} - \mathbf{a}^*(\mathbf{k})e^{+ik\cdot x}\right]$$

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\left[\mathbf{k}\times\mathbf{a}(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x} - \mathbf{k}\times\mathbf{a}^*(\mathbf{k})e^{+ik\cdot x}\right]$$

  - Perché $\mathrm{E}$ **e** $\mathrm{B}$ **siano reali** deve essere

$$\mathbf{a}(-\mathbf{k}) = -\mathbf{a}^*(\mathbf{k})$$

**Cohen-Tannoudji et al.**
**Photons and Atoms**
**(Wiley 1997) p. 24**

# Onde elettromagnetiche

- L'energia associata al campo elettromagnetico è data da

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int\left(\varepsilon_o \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_o}\mathbf{B}^2\right)d^3\mathbf{r}}$$

- Calcoliamo esplicitamente il primo integrale

$$\frac{U_E}{c^2} = \frac{1}{2c^2}\int \varepsilon_o \mathbf{E}^2 d^3\mathbf{r} \qquad \boxed{k = |\mathbf{k}|}$$

$$= \frac{\varepsilon_o}{2}\int d^3\mathbf{r}\,\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}_1 k_1\left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}e^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}} - \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}_1}e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}}\right)\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}_2 k_2\left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}_2}e^{i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}} - \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}_2}e^{-i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}}\right)$$

$$= \frac{-\varepsilon_o}{2}\int k_1 k_2\begin{bmatrix}\mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}\mathbf{a}_{\mathbf{k}_2}\delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2) - \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}_2}\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2) - \\ \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}_1}\mathbf{a}_{\mathbf{k}_2}\delta(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1) + \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}_1}\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}_2}\delta(-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\end{bmatrix}\frac{d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3}$$

$$= \frac{\varepsilon_o}{2}\int k_1^2\left[-\mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}\mathbf{a}_{-\mathbf{k}_1} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}_1} + \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}_1}\mathbf{a}_{\mathbf{k}_1} - \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}_1}\mathbf{a}^*_{-\mathbf{k}_1}\right]\frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}$$

$$= \frac{\varepsilon_o}{2}\int k_1^2\left[2\mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}_1} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}\mathbf{a}_{-\mathbf{k}_1} - \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}_1}\mathbf{a}^*_{-\mathbf{k}_1}\right]\frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \qquad \boxed{\mathbf{a}(-\mathbf{k}) = -\mathbf{a}^*(\mathbf{k})}$$

Cohen-Tannoudji et al.
Photons and Atoms
(Wiley 1997) p. 24

$$= \frac{\varepsilon_o}{2}\int k_1^2\left[2\mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}_1} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}_1} + \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}_1}\mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}\right]\frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}$$

$$\boxed{U_E = \frac{2\varepsilon_o}{(2\pi)^3}\int \omega_{\mathbf{k}}^2\,\mathbf{a}_{\mathbf{k}}\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}}d^3\mathbf{k}} \qquad \omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$$

# Onde elettromagnetiche

- Analogamente si calcola l'energia associata a $\mathrm{B}$

$$U_{\mathbf{B}} = \frac{2}{\mu_o}\int |\mathbf{k}|^2\, \mathbf{a}_{\mathbf{k}}\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* d^3\mathbf{k}$$

  - L'energia totale è

$$\boxed{U = \frac{4\varepsilon_o}{(2\pi)^3}\int \omega_{\mathbf{k}}^2\, \mathbf{a}_{\mathbf{k}}\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* d^3\mathbf{k}}$$

$$\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}| \qquad \frac{1}{\varepsilon_o\mu_o} = c^2$$

  - Vediamo che l'energia del campo è la somma delle energie degli oscillatori in cui è stato scomposto il campo
    - Notiamo che classicamente l'energia e proporzionale al modulo quadrato dell'ampiezza dell'oscillazione
    - Notiamo inoltre che tutti gli oscillatori con quantità di moto tri-dimensionale $|\mathrm{k}|c = \omega_{\mathrm{k}}$ hanno una energia proporzionale a $\omega^2{}_{\mathrm{k}}$
- Partendo da queste considerazioni si può calcolare, classicamente, lo spettro della radiazione in una cavità: lo spettro della radiazione del corpo nero
  - Calcoliamo innanzitutto il numero degli oscillatori per unità di energia (o frequenza) corrispondenti ad una energia $d\omega = cdk$

$$dN = \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \frac{4\pi|\mathbf{k}|^2\,dk}{(2\pi)^3} = \frac{4\pi\omega^2 d\omega}{c^3(2\pi)^3} = \frac{4\pi\nu^2 d\nu}{c^3}$$

  - Tenendo conto che ogni oscillatore ha 2 gradi di libertà

$$\boxed{dN = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}}$$

# Energia media dell'oscillatore

- L'energia del campo è espressa come somma delle energie $E_n$ di tanti oscillatori
- Quando la radiazione è in equilibrio all'interno della cavità
  - Il materiale delle pareti contiene oscillatori elettromagnetici che interagiscono con il campo
    - Le pareti assorbono radiazione dagli oscillatori del campo
    - Le pareti emettono radiazione che è assorbita dagli oscillatori del campo
- Quando si è all'equilibrio termico l'energia assorbita è uguale a quella emessa
  - Gli oscillatori sono in equilibrio termico
    - La loro energia media può essere calcolata con la meccanica statistica
    - L'energia del campo è l'energia media degli oscillatori per il loro numero

$$U = \sum_n E_n = N \frac{1}{N} \sum_n E_n = N\bar{E}$$

  - La probabilità che un oscillatore abbia una energia $E$ è data da

$$P(E) = \frac{\exp[-E/kT]}{\int_0^\infty \exp[-E/kT]\,dE} dE = \exp[-E/kT]\frac{dE}{kT}$$

  - Pertanto, all'equilibrio termodinamico, l'energia media di ogni oscillatore è

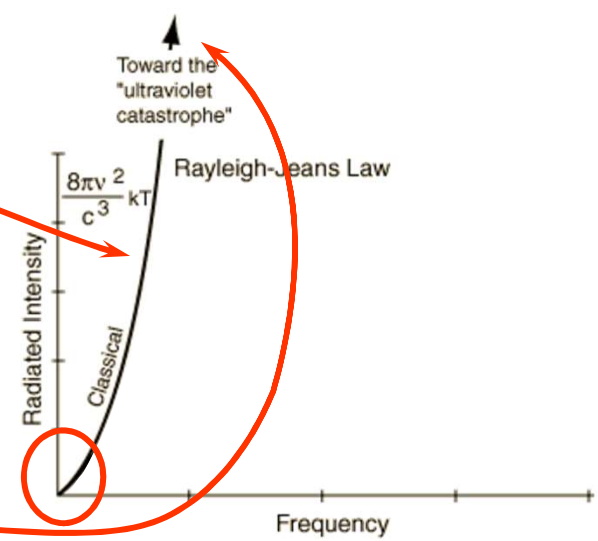
$$\bar{E} = \int_0^\infty E\exp[-E/kT]\frac{dE}{kT} = kT\int_0^\infty x\exp[-x]\,dx = kT$$

# Radiazione del corpo nero

$$\boxed{\overline{E} = kT}$$

- Questo è il risultato classico dell'equipartizione dell'energia
  - Un ingrediente essenziale è stato aver assunto che l'oscillatore può assumere un valore arbitrario di energia $E$
    - Distribuzione continua dell'energia
- Utilizziamo il risultato per calcolare la distribuzione di energia della radiazione del corpo nero
  - Associamo ad ogni gruppo di oscillatori di frequenza $\nu$ - $\nu + d\nu$ una energia $kT$
- La densità di energia è pertanto

$$dU = dN\overline{E} = dNkT \qquad \boxed{dU = kT\frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}}$$




- Questa è la famosa legge di Rayleigh-Jeans
- È la previsione classica dello spettro della radiazione del corpo nero
- È in accordo con i dati solo a bassissime frequenze

catastrofe ultravioletta

# Ipotesi di Planck

- Per risolvere il problema precedente Planck ipotizzò che
  - L'oscillatore non può assumere tutte le energie possibili classicamente
  - L'energia non dipende dall'ampiezza ma solo dalla frequenza $\nu = \omega/2\pi$
  - L'energia può assumere solo valori che sono un multiplo intero di $h\nu$

$$\boxed{E_n = nh\nu}$$

- Calcoliamo l'energia media
  - Preliminarmente la distribuzione di probabilità

$$P(E) = \frac{\exp\left[-E / kT\right]}{\int_0^\infty \exp\left[-E / kT\right] dE} dE \quad \Rightarrow \quad P(E_n) = \frac{\exp\left[-E_n / kT\right]}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-E_n / kT\right]}$$

  - Calcoliamo innanzitutto il denominatore

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-nh\nu / kT\right] \quad \textbf{posto} \quad x = \exp\left[-h\nu / kT\right] < 1 \qquad A = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

  - Otteniamo infine

$$\boxed{A = \frac{1}{1 - \exp\left[-h\nu / kT\right]}}$$

# Ipotesi di Planck

- Veniamo adesso al calcolo del valore medio

$$A\bar{E} = \sum_{n=0}^{\infty} h\nu n \exp\left[-nh\nu / kT\right]$$

**posto** $\alpha = h\nu / kT$

$$\boxed{A = \frac{1}{1-\exp\left[-h\nu / kT\right]}}$$

$$A\bar{E} = h\nu \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n\alpha} = -h\nu \frac{\partial}{\partial\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = -h\nu \frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{1}{1-e^{-\alpha}} = \frac{h\nu e^{-\alpha}}{\left(1-e^{-\alpha}\right)^2}$$

- Concludendo

$$\bar{E} = \frac{h\nu \exp\left[-h\nu / kT\right]}{1-\exp\left[-h\nu / kT\right]}$$

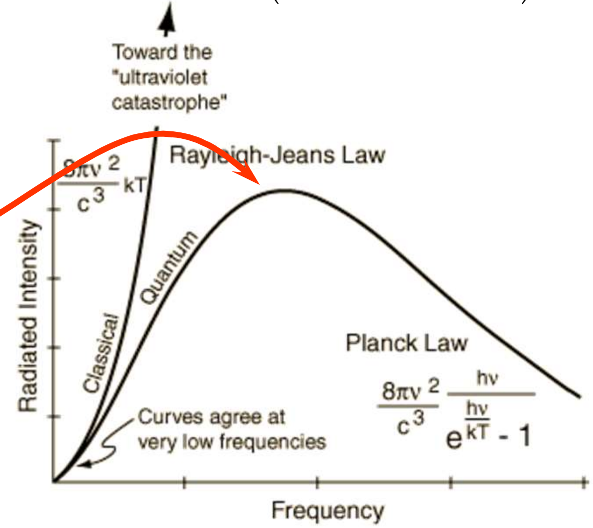
$$\boxed{\bar{E} = \frac{h\nu}{\exp\left[h\nu / kT\right]-1}}$$

notiamo che se $h\nu \to 0$

$$\bar{E} \to \frac{h\nu}{1-\left(1-h\nu / kT\right)} = kT$$

- La distribuzione dell'energia nella cavità diventa

$$\boxed{dU = \bar{E}dN = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp\left[h\nu / kT\right]-1} d\nu}$$




- L'accordo con i dati sperimentali è perfetto
- L'ipotesi critica è stata la natura discreta dell'energia dell'oscillatore

# Quantum Field Theory: Introduzione

- Un campo elettromagnetico all'interno di una cavità presenta degli aspetti interpretabili con una visione "particellare" del campo
  - Il campo può essere rappresentato come integrale di Fourier
  - All'equazione dell'onda corrisponde un'equazione di oscillatore armonico per ogni componente
  - L'energia del campo è espressa come somma delle energie dei singoli oscillatori
- Per un campo all'interno di una cavità in equilibrio termico con le pareti si può utilizzare la meccanica statistica per descrivere
  - La distribuzione di energia degli oscillatori
  - L'energia media degli oscillatori
- Abbiamo visto che
  - L'utilizzo del principio di equipartizione dell'energia (classico) porta alla distribuzione di Rayleigh-Jeans
    - In disaccordo con le osservazioni sperimentali
  - L'ipotesi di Planck che l'energia di ogni oscillatore sia un multiplo intero di $h\nu$ conduce alla distribuzione di Planck
    - In ottimo accordo con le osservazioni sperimentali

# Quantum Field Theory: Introduzione

- Ai nostri fini, l'aspetto più importante del calcolo della radiazione del corpo nero è che il campo può essere visto come un insieme di particelle (quanti)
  - Alla descrizione ondulatoria (campo) si affianca una descrizione particellare
    - Dualità onda-particella
  - L'aspetto particellare è associato ai modi descritti da oscillatori ( fotoni )
  - L'energia degli oscillatori è quantizzata ($E_n = nh\nu$ )
    - Il formalismo dell'oscillatore quantistico è perfetto per questo scopo

- Proveremo ad estendere questa formulazione alle equazioni d'onda relativistiche (Klein-Gordon, Dirac)
  - Le differenze con il campo elettromagnetico sono
    - Il campo elettromagnetico ha una interpretazione classica
    - Le equazioni di Dirac e di Klein Gordon non hanno corrispettivo classico
  - L'analogia è pertanto
    - Il campo elettromagnetico e le equazioni di Dirac e di Klein-Gordon mettono in evidenza gli aspetti ondulatori
    - La descrizione in termini di oscillatori quantizzati metterà in evidenza gli aspetti particellari (quanti del campo)

# L'oscillatore quantistico

- Rivediamo la teoria dell'oscillatore armonico quantistico
  - In seguito, per i campi, utilizzeremo il formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano
    - È conveniente trattare anche l'oscillatore armonico in questo modo
- La Lagrangiana di un oscillatore armonico con un grado di libertà $q$ è

$$\boxed{L(q,\dot{q}) = T - U = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2}$$

- L'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \quad \Longrightarrow \quad m\ddot{q} = -m\omega^2 q$$

  - Le due soluzioni di questa equazione sono $\qquad q(t) = e^{\pm i\omega t}$
  - Pertanto la soluzione generale (reale) è

$$\boxed{q(t) = Ae^{+i\omega t} + A^* e^{-i\omega t}}$$

# L'oscillatore quantistico

- Passiamo al formalismo Hamiltoniano
  - Il momento canonico è definito da

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

$$\boxed{p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}}$$

  - L'Hamiltoniana è

$$H(p,q) = p\dot{q} - L = m\dot{q}^2 - \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2\right) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

$$\boxed{H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = T + U}$$

- Le Equazioni di Hamilton danno

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\[2ex] \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases}
\qquad
\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m} \\[2ex] &\Longrightarrow \quad \dot{p} = -m\omega^2 q \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\ddot{q} = -\omega^2 q} \end{aligned}$$

ritroviamo la definizione di $p$

# L'oscillatore quantistico

- La quantizzazione dell'oscillatore si ottiene
  - Trasformando $p$ e $q$ in operatori
  - Imponendo la regola di commutazione $(\hbar=1)$

$$\boxed{\widehat{H} = \frac{\widehat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\widehat{q}^2 \qquad \left[\widehat{q},\widehat{p}\right] = i}$$

- Utilizziamo la rappresentazione di Heisenberg
  - Funzioni d'onda indipendenti dal tempo
  - Operatori dipendenti dal tempo
- L'evoluzione di $q(t)$ e di $p(t)$ è pertanto

$$\frac{\partial \widehat{O}}{\partial t} = i\left[\widehat{H},\widehat{O}\right]$$

$$\frac{\partial \widehat{q}}{\partial t} = i\left[\widehat{H},\widehat{q}\right] = i\left[\frac{\widehat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\widehat{q}^2,\widehat{q}\right] = \frac{i}{2m}\left[\widehat{p}^2,\widehat{q}\right] = \frac{i}{2m}\left(\left[\widehat{p},\widehat{q}\right]\widehat{p} + \widehat{p}\left[\widehat{p},\widehat{q}\right]\right) \qquad \boxed{\frac{\partial \widehat{q}}{\partial t} = \frac{\widehat{p}}{m}}$$

$$\frac{\partial \widehat{p}}{\partial t} = i\left[\widehat{H},\widehat{p}\right] = i\left[\frac{\widehat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\widehat{q}^2,\widehat{p}\right] = \frac{i}{2}m\omega^2\left[\widehat{q}^2,\widehat{p}\right] = \frac{i}{2}m\omega^2\left(\left[\widehat{q},\widehat{p}\right]\widehat{q} + \widehat{q}\left[\widehat{q},\widehat{p}\right]\right)$$

$$\frac{\partial \widehat{p}}{\partial t} = -m\omega^2\widehat{q} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 \widehat{q}}{\partial t^2} = -\omega^2\widehat{q}}$$

uguali alle equazioni classiche

# L'oscillatore quantistico

- È noto che la quantizzazione dell'oscillatore rende **discrete le energie** che la particelle può assumere
- Occorre risolvere l'equazione agli **autovalori** $\boxed{\widehat{H}|u_E\rangle = E|u_E\rangle}$
  - Si può risolvere questo problema **prescindendo** dalla forma esplicita di $\widehat{p}$ e $\widehat{q}$
  - Si introducono gli operatori (dipendenti dal tempo)

$$\widehat{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{m\omega}\,\widehat{q}(t) + \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\widehat{p}(t)\right) \qquad \widehat{a}^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{m\omega}\,\widehat{q}(t) - \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\widehat{p}(t)\right)$$

  - Si verifica facilmente che gli **operatori** $\widehat{a}(t)$ e $\widehat{a}^\dagger(t)$ hanno la seguente regola di **commutazione** $\boxed{\left[\widehat{a}(t),\widehat{a}^\dagger(t)\right] = 1}$
  - Utilizzando gli **operatori** $\widehat{a}(t)$ e $\widehat{a}^\dagger(t)$ l'Hamiltoniana diventa

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\widehat{q}^2 \qquad \widehat{H} = \frac{1}{2}\left(\widehat{a}^\dagger(t)\widehat{a}(t) + \widehat{a}(t)\widehat{a}^\dagger(t)\right)\omega = \left(\widehat{a}^\dagger(t)\widehat{a}(t) + \frac{1}{2}\right)\omega$$

- **L'evoluzione temporale** di $\widehat{a}(t)$ è data da

$$\frac{\partial\widehat{a}(t)}{\partial t} = i\left[\widehat{H},\widehat{a}(t)\right] = i\left[\left(\widehat{a}^\dagger(t)\widehat{a}(t) + \frac{1}{2}\right)\omega,\widehat{a}(t)\right] = i\omega\left[\widehat{a}^\dagger(t)\widehat{a}(t),\widehat{a}(t)\right]$$

$$= i\omega\left[\widehat{a}^\dagger(t),\widehat{a}(t)\right]\widehat{a}(t) \qquad \boxed{\frac{\partial\widehat{a}(t)}{\partial t} = -i\omega\widehat{a}(t) \qquad \widehat{a}(t) = \widehat{a}(0)e^{-i\omega t}}$$

# L'oscillatore quantistico

- Analogamente si trova $\boxed{\widehat{a}^\dagger(t) = \widehat{a}^\dagger(0)e^{+i\omega t}}$
  - Per semplificare la notazione da ora in poi

$$\boxed{\widehat{a}(0) \equiv \widehat{a} \qquad \widehat{a}^\dagger(0) \equiv \widehat{a}^\dagger}$$

- Evidentemente

$$\widehat{a}^\dagger(t)\widehat{a}(t) = \widehat{a}^\dagger\widehat{a}$$

  - E pertanto l'Hamiltoniana è indipendente dal tempo $\widehat{H} = \left(\widehat{a}^\dagger\widehat{a} + \frac{1}{2}\right)\omega$
- Nella teoria gioca un ruolo molto importante l'operatore Numero

$$\boxed{\widehat{N} = \widehat{a}^\dagger\widehat{a}}$$

- L'operatore $N$ è hermitiano e pertanto i suoi autovalori sono reali
  - Sono inoltre positivi (non negativi)
    - Infatti consideriamo un autostato $|n\rangle$ $\widehat{N}|n\rangle = n|n\rangle$

$$\left\langle n \mid \widehat{N} \mid n\right\rangle = n\left\langle n \mid n\right\rangle = \left\langle n \mid \widehat{a}^\dagger\widehat{a} \mid n\right\rangle$$

    - Osserviamo che

$$\left\langle n \mid n\right\rangle = \left\| |n\rangle \right\|^2 > 0 \qquad \left\langle n \mid \widehat{a}^\dagger\widehat{a} \mid n\right\rangle = \left|\widehat{a}|n\rangle\right|^2 \geq 0$$

Pertanto $\boxed{\boldsymbol{n \geq 0}}$

- Si verifica facilmente che

$$\boxed{\left[\widehat{N},\widehat{a}^\dagger\right] = \widehat{a}^\dagger} \qquad \boxed{\left[\widehat{N},\widehat{a}\right] = -\widehat{a}}$$

ovviamente $\widehat{H} = \left(\widehat{N} + \frac{1}{2}\right)\omega$

# L'oscillatore quantistico

- Dalle regole precedenti discende che se $|n>$ è un autostato dell'operatore Numero $N$ sono suoi autostati anche $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ e $\hat{a}|n\rangle$
  - Infatti $N\hat{a}^\dagger|n\rangle = \left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{N}\right)|n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle$ $\quad \boxed{\left[\hat{N},\hat{a}^\dagger\right] = \hat{a}^\dagger}$
  - E inoltre $N\hat{a}|n\rangle = \left(-\hat{a} + \hat{a}\hat{N}\right)|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle$ $\quad \boxed{\left[\hat{N},\hat{a}\right] = -\hat{a}}$
    - Pertanto $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ e $\hat{a}|n\rangle$ sono autostati di $N$
- Consideriamo lo stato $\hat{a}^k|n\rangle$ $\quad (\, k < n\,)$
  - L'autovalore di $N$ corrispondente è $\hat{N}\hat{a}^k|n\rangle = (n-k)\hat{a}^k|n\rangle$
  - Se $k$ assumesse valori $k > n$ il risultato contraddirebbe la positività di $N$
- Per evitare questa contraddizione concludiamo che
  - Gli autovalori di $N$ sono numeri interi
  - Esiste uno stato $|0>$ (lo stato vuoto) con autovalore $0$ che ha le proprietà

$$\boxed{\hat{a}|0\rangle = 0 \qquad \langle 0\,|\,0\rangle = 1 \qquad \hat{N}|0\rangle = 0|0\rangle = 0}$$

Postulato

- Gli stati con autovalore $n$ possono essere costruiti a partire dal vuoto tramite l'applicazione ripetuta dell'operatore $\hat{a}^\dagger$
  - L'operatore $\hat{a}^\dagger$ prende il nome di operatore di creazione
  - L'operatore $\hat{a}$ prende il nome di operatore di distruzione

# L'oscillatore quantistico

- A partire dal vuoto si possono costruire esplicitamente gli autovettori di $N$

$$\boxed{|1\rangle = a^\dagger |0\rangle}$$

  - Lo stato $|1\rangle$ è normalizzato

$$\langle 1| = \left(a^\dagger |0\rangle\right)^\dagger = \langle 0|a \qquad \langle 1 \mid 1\rangle = \left\langle 0 \mid aa^\dagger \mid 0\right\rangle = \left\langle 0 \mid 1 + a^\dagger a \mid 0\right\rangle = \langle 0 \mid 0\rangle = 1$$

$$\boxed{\langle 1 \mid 1\rangle = 1} \qquad \boxed{a\big|0\big\rangle = 0}$$

- Analogamente lo stato

$$\boxed{|2\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}} a^\dagger a^\dagger |0\rangle}$$

$$\begin{aligned}\langle 2 \mid 2\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left\langle 0 \mid aaa^\dagger a^\dagger \mid 0\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle 0 \mid a\left(1 + a^\dagger a\right)a^\dagger \mid 0\right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left(\left\langle 0 \mid aa^\dagger \mid 0\right\rangle + \left\langle 0 \mid aa^\dagger aa^\dagger \mid 0\right\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \left\langle 0 \mid aa^\dagger\left(1 + a^\dagger a\right) \mid 0\right\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \left\langle 0 \mid aa^\dagger \mid 0\right\rangle\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1\end{aligned}$$

- Per induzione si può dimostrare che lo stato con $n$ particelle è ottenuto dalla applicazione ripetuta $n$ volte dell'operatore $a^\dagger$

$$\boxed{|n\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{n!}}\left(a^\dagger\right)^n |0\rangle}$$

# L'oscillatore quantistico

- Per finire osserviamo che gli autostati dell'operatore numero $N$ sono anche autostati dell'Hamiltoniana

$$\boxed{\widehat{H} = \left(\widehat{N} + \frac{1}{2}\right)\omega}$$

  - Pertanto

$$\widehat{H}\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle \qquad E_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\omega$$

- Osserviamo che l'energia del vuoto non è nulla

$$\boxed{E_0 = \tfrac{1}{2}\omega}$$

- Commenti
  - Abbiamo diagonalizzato l'Hamiltoniana e trovato gli autovalori dell'energia utilizzando solo proprietà algebriche
    - La soluzione è la stessa per tutti i problemi che hanno le stesse regole di commutazione per gli operatori $a$
    - Se gli $a$ hanno anche una espressione esplicita in termini di operatori differenziali si può trovare una espressione esplicita per gli stati
      - Ad esempio i Polinomi di Hermite
  - L'Hamiltoniana è definita positiva perché $N$ è definito positivo
  - Dato che $N$ e $H$ commutano il numero delle particelle è costante
    - Questo accade in tutte le teorie senza interazione