
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 4

7.10.2025

Interazione elettromagnetica
Limite di bassa energia dell'equazione di Dirac
Scattering di Coulomb (spin 0 e spin $\frac{1}{2}$)

anno accademico 2025-2026

Interazione elettromagnetica

- Nell'elettrodinamica classica la forza che agisce su una particella carica in moto è data dalla Forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- Può essere ricavata (equazioni di Hamilton) dall'Hamiltoniana classica

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + qV$$

- Nella Meccanica Quantistica non relativistica l'interazione elettromagnetica viene introdotta utilizzando l'Hamiltoniana appena introdotta ($\hbar = 1$)

$$H\psi = \left[\frac{1}{2m}(-i\nabla - q\mathbf{A})^2 + qV \right] \psi = i \frac{\partial}{\partial t} \psi$$

- È conveniente riscrivere questa equazione nel modo seguente

$$\frac{1}{2m}[-i(\nabla - iq\mathbf{A})]^2 \psi = i \left(\frac{\partial}{\partial t} + iqV \right) \psi$$

- Notiamo che si può arrivare all'equazione precedente partendo dall'equazione di Schrödinger per una particella libera e fare le sostituzioni

$$\nabla \rightarrow \nabla - iq\mathbf{A} \qquad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + iqV$$



Interazione elettromagnetica

- Sviluppando il quadrato nell'Hamiltoniana $H = \frac{1}{2m}(-i\nabla - q\mathbf{A})^2 + qV$

$$\begin{aligned} (-i\nabla - q\mathbf{A})(-i\nabla - q\mathbf{A})\psi &= -\nabla^2\psi + iq\nabla \cdot (\mathbf{A}\psi) + iq\mathbf{A} \cdot \nabla\psi + q^2\mathbf{A}^2\psi \\ &= -\nabla^2\psi + iq(\nabla \cdot \mathbf{A})\psi + iq\mathbf{A} \cdot \nabla\psi + iq\mathbf{A} \cdot \nabla\psi + q^2\mathbf{A}^2\psi \end{aligned}$$

- Scegliendo il gauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ e trascurando i termini in q^2 otteniamo $H = -\frac{1}{2m}\nabla^2 + i\frac{q}{m}\mathbf{A} \cdot \nabla + qV$

- Applichiamo questa formula al caso di un campo magnetico costante e campo elettrico nullo $V = 0$ ($i\nabla = \mathbf{p}$)

$$H = -\frac{1}{2m}\nabla^2 - \frac{q}{m}\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$$

- Per un campo magnetico costante $\mathbf{B}$ il potenziale vettore è $\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B}$
- Introduciamo $\mathbf{A}$ nell'Hamiltoniana

$$H = -\frac{1}{2m}\nabla^2 + \frac{q}{2m}\mathbf{r} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{p}$$

- Il termine con il campo magnetico può essere trasformato in

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{p} = \sum_{klm} \varepsilon_{klm} r_l B_m p_k = -\sum_{mlk} \varepsilon_{mlk} B_m r_l p_k = -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{L}$$

$$H = -\frac{1}{2m}\nabla^2 - \frac{q}{2m}\mathbf{B} \cdot \mathbf{L}$$

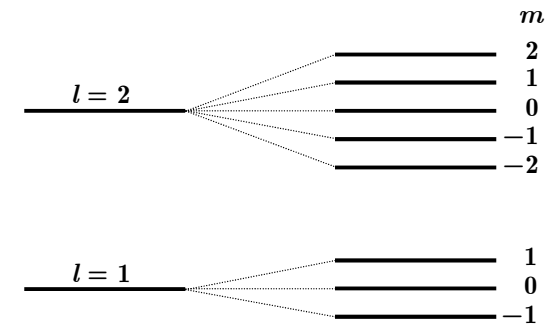


Interazione elettromagnetica

- L'ultimo termine dell'equazione rappresenta una energia potenziale magnetica
 - Classicamente è dovuta all'interazione di un momento magnetico generato dal moto associato ad un momento angolare orbitale L
- Anche a livello quantistico definiamo pertanto il momento magnetico di una particella dotata di momento angolare L e la sua energia potenziale

$$\mu = \frac{q}{2m} L \quad U = -\mu \cdot B$$

- L'esistenza di questo termine di interazione è verificata nella spettroscopia atomica
 - In presenza di un campo magnetico le energie associate agli orbitali atomici di momento angolare l si separano in $(2l+1)$ livelli equidistanti (effetto Zeeman)



- È noto che esiste un ulteriore effetto di questo tipo
 - L'elettrone ha un momento angolare intrinseco $S = \hbar\sigma/2$ a cui sarebbe associato un momento magnetico $\mu = qS/2m$ che suddivide ulteriormente i livelli
- Tuttavia, nel caso dello spin, per riprodurre i dati sperimentali occorre introdurre un fattore empirico g

$$\mu_e = g \frac{q}{2m_e} S \quad g = 2$$

Interazione elettromagnetica

- Prima di introdurre l'interazione elettromagnetica nell'equazione di Dirac facciamo alcune precisazioni sulle notazioni
- Richiamiamo le definizioni dell'operatore derivazione

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right) \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla \right)$$

- Inoltre il potenziale vettore è

$$A_\mu = (V(x), -\mathbf{A}(x)) \quad A^\mu = (V(x), \mathbf{A}(x))$$

- L'introduzione dell'interazione elettromagnetica viene fatta modificando l'operatore di derivazione (per l'elettrone $q = -|e|$)

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iqA_\mu$$

- **Attenzione:** per l'operatore derivazione e il potenziale vettore i segni negativi delle componenti spaziali delle componenti covarianti e contravarianti sono scambiati

$$\partial_\mu + iqA_\mu = (\partial_0 + iqV, \nabla + iq\mathbf{A}_k) = (\partial_0 + iqV, \nabla - iq\mathbf{A})$$

$$\partial_\mu \rightarrow (\partial_0 + iqV, \nabla - iq\mathbf{A})$$

Interazione elettromagnetica

- A questo punto passiamo all'equazione di Dirac

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = H_o \psi = (-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m) \psi$$

- Con la sostituzione minimale diventa

$$\partial_\mu \rightarrow (\partial_0 + iqV, \boldsymbol{\nabla} - iq\mathbf{A})$$

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} + iqV \right) \psi = (-i \boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\nabla} - iq\mathbf{A}) + \beta m) \psi$$

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - qV \right) \psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot (-i \boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}) + \beta m) \psi$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot (-i \boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}) + \beta m + qV) \psi$$

- Utilizzeremo questa formula per lo studio dello scattering da potenziale
 - Vale la pena isolare il potenziale di interazione

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (H_o + V_D) \psi$$

$$V_D = qV - q \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}$$

Limite di bassa energia

- È molto istruttivo studiare il limite di bassa energia dell'equazione trovata
 - Verifichiamo se ci conduce all'equazione di Schrödinger con l'interazione elettromagnetica
 - Per poter confrontare con l'equazione non relativistica occorre tenere conto che l'energia relativistica include la massa a riposo della particella
 - Se H è l'Hamiltoniana dobbiamo isolare la massa scrivendo $H = H_1 + m$

$$H = \alpha \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A}) + \beta m + qV = \alpha \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A}) + \beta m + qV - mI + mI$$

$$H_1 = \alpha \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A}) + (\beta - I)m + qV$$

- Inoltre isoliamo la massa a riposo anche nella dipendenza temporale ponendo

$$\Psi(t) = \Psi_o(t)e^{-imt} \quad \boxed{\Psi_o \text{ lentamente variabile}} \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} \Psi_o(t) \right| \ll m$$

- Inseriamo nell'equazione di Dirac per trovare l'equazione per Ψ_o

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = \left(i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_o(t) + m \Psi_o \right) e^{-imt} = (H_1 + m) \Psi_o(t) e^{-imt}$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_o = H_1 \Psi_o$$

Limite di bassa energia

- Riepilogando

$$H_1 = \boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A}) + (\beta - I)m + qV \quad i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_o = H_1\Psi_o$$

- Utilizziamo la rappresentazione di Pauli-Dirac e la rappresentazione a blocchi dello spinore

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} \quad \beta - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2I \end{pmatrix}$$

- Arriviamo al sistema di equazioni

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A}) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} + qV\begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} - 2m\begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A})\phi + qV\psi \\ i\frac{\partial}{\partial t}\phi = \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A})\psi + qV\phi - 2m\phi \end{cases}$$

Limite di bassa energia

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \sigma \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A}) \phi + qV\psi \\ i \frac{\partial}{\partial t} \phi = \sigma \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A}) \psi + qV\phi - 2m\phi \end{cases}$$

- Consideriamo la seconda equazione
- Ricordiamo che Ψ_0 varia lentamente, vale a dire
- Quindi anche le due componenti ψ e ϕ variano lentamente

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \Psi_0(t) \right| \ll m$$

$$\left| i \frac{\partial}{\partial t} \psi \right| \ll m \quad \left| i \frac{\partial}{\partial t} \phi \right| \ll m$$

- Abbiamo pertanto

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi = \sigma \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A}) \psi + qV\phi - 2m\phi$$

approssimazione non relativistica
 $qV \ll m$

$$0 = \sigma \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A}) \psi - 2m\phi$$

$$\phi \approx \frac{\sigma \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A})}{2m} \psi$$

- Introduciamo nella prima equazione

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \sigma \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A}) \frac{\sigma \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A})}{2m} \psi + qV\psi$$

Limite di bassa energia

- Si può verificare che (vedi esercizio 4.14 Aitchison 3° ed.)

$$[\sigma \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A})]^2 = (-i\nabla - q\mathbf{A})^2 - q\sigma \cdot \nabla \times \mathbf{A}$$

- Pertanto l'equazione diventa

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{1}{2m}(-i\nabla - q\mathbf{A})^2\psi - \frac{q}{2m}\sigma \cdot \mathbf{B}\psi + qV\psi$$

- Questa equazione coincide con l'equazione ottenuta partendo dall'equazione di Schrödinger con la sostituzione minimale (diapositiva **84**) a meno di un termine

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\frac{1}{2m}(-i\nabla - q\mathbf{A})^2 + qV \right]\psi$$

- Il termine in più descrive l'accoppiamento del momento magnetico intrinseco dell'elettrone con il campo magnetico

$$\mu = 2\frac{q}{2m}\frac{\sigma}{2}$$

- Inoltre riproduce perfettamente il fattore giromagnetico $g = 2$ che nella teoria non relativistica era stato introdotto empiricamente

- In conclusione

- Il limite $E \ll m$ dell'equazione di Dirac riproduce l'equazione di Pauli
- Il fattore giromagnetico $g = 2$ è predetto dalla teoria di Dirac

Scattering Coulombiano: spin 0

- Come prima applicazione della meccanica quantistica relativistica consideriamo lo scattering Coulombiano per una particella di spin 0
- La funzione d'onda della particella obbedisce all'equazione di Klein-Gordon

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi(x) = 0$$

- Come nel caso dell'equazione di Dirac l'interazione elettromagnetica viene introdotta utilizzando la sostituzione minimale

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iqA_\mu$$

- Vediamo come si modifica l'operatore $\partial^\mu \partial_\mu$

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi \rightarrow (\partial^\mu + iqA^\mu)(\partial_\mu \phi + iqA_\mu \phi) = \partial^\mu \partial_\mu \phi + iq\partial^\mu (A_\mu \phi) + iqA^\mu \partial_\mu \phi - q^2 A^\mu A_\mu \phi$$

- Inserendo nell'equazione di Klein-Gordon otteniamo

$$(\partial^\mu \partial_\mu + iq\partial^\mu A_\mu + iqA^\mu \partial_\mu - q^2 A^\mu A_\mu + m^2) \phi = 0$$

prima si moltiplica a destra per ϕ
dopo si applica ∂_μ al prodotto $A_\mu \phi$

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = -iq(\partial^\mu A_\mu + A_\mu \partial^\mu) \phi + q^2 A^\mu A_\mu \phi \equiv -\hat{V}_{KG} \phi$$

$$\hat{V}_{KG} = +iq(\partial^\mu A_\mu + A_\mu \partial^\mu) - q^2 A^\mu A_\mu$$

Scattering Coulombiano: spin 0

- A questo punto il problema può essere risolto utilizzando la teoria perturbativa dipendente dal tempo
- L'ampiezza di transizione da uno stato iniziale i ad uno stato finale f dovuta ad un potenziale V è data dall'approssimazione (primo ordine)

$$M_{fi} = -i \int dt \int d^3\mathbf{r} \phi_f^*(\mathbf{r}, t) V(\mathbf{r}, t) \phi_i(\mathbf{r}, t)$$

$$M_{fi} = -i \int d^4x \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x)$$

- Utilizziamo il potenziale di Klein-Gordon

$$\hat{V}_{KG} = +iq(\partial^\mu A_\mu + iqA_\mu \partial^\mu) - q^2 \cancel{A_\mu} A_\mu$$

- Al primo ordine possiamo trascurare il termine in q^2

$$\hat{V}_{KG} \approx +iq(\partial^\mu A_\mu + iqA_\mu \partial^\mu)$$

- Otteniamo in definitiva

$$M_{fi} = q \int d^4x \phi_f^*(x) (\partial^\mu A_\mu + A_\mu \partial^\mu) \phi_i(x)$$

Scattering Coulombiano: spin 0

$$M_{fi} = q \int d^4x \phi_f^*(x) (\partial^\mu A_\mu + A_\mu \partial^\mu) \phi_i(x)$$

- Possiamo elaborare il primo termine integrando per parti per ciascuno dei 4 integrali

$$\int d^4x \phi_f^* \partial^\mu (A_\mu \phi_i) = \phi_f^* A_\mu \phi_i \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int d^4x (\partial^\mu \phi_f^*) A_\mu \phi_i$$

- Assumiamo che il potenziale A_μ all'infinito si comporti in modo tale da far tendere a zero il primo termine
- L'ampiezza di transizione diventa

$$M_{fi} = -q \int d^4x (\partial^\mu \phi_f^*) A_\mu \phi_i + q \int d^4x \phi_f^* A_\mu \partial^\mu \phi_i = q \int d^4x [\phi_f^* \partial^\mu \phi_i - (\partial^\mu \phi_f^*) \phi_i] A_\mu$$

- L'espressione dentro parentesi quadra ricorda la corrente di probabilità
 - Si definisce la corrente di transizione elettromagnetica fra gli stati i e f

$$j_{em}^\mu = iq [\phi_f^* \partial^\mu \phi_i - (\partial^\mu \phi_f^*) \phi_i]$$

- Utilizzando questa corrente l'ampiezza di transizione diventa

$$M_{fi} = -i \int d^4x j_{em}^\mu(x) A_\mu(x)$$

Scattering Coulombiano: spin 0

- A questo punto utilizziamo due soluzioni con energia positiva dell'equazione di KG: ad esempio un elettrone con carica $q = -e$ $e > 0$
- Un'onda piana per lo stato iniziale $\phi_i(x) = e^{-ip_i \cdot x}$
- Un'onda piana per lo stato finale $\phi_f(x) = e^{-ip_f \cdot x}$
 - Abbiamo scelto la costante di normalizzazione $N = 1$ (v. diapositiva 9)
- Inserendo nella corrente di transizione

$$j_{em}^\mu = -ie \left[\phi_f^* \partial^\mu \phi_i - (\partial^\mu \phi_f^*) \phi_i \right] = -ie \left[e^{ip_f \cdot x} (-ip_i^\mu) e^{-ip_i \cdot x} - (ip_f^\mu) e^{ip_f \cdot x} e^{-ip_i \cdot x} \right]$$

$$j_{em}^\mu(x) = -e(p_i^\mu + p_f^\mu) e^{-i(p_i - p_f) \cdot x}$$

- Otteniamo pertanto

$$M_{fi} = -i \int d^4x j_{em}^\mu(x) A_\mu(x) = i \int d^4x e(p_i^\mu + p_f^\mu) e^{-i(p_i - p_f) \cdot x} A_\mu(x)$$

$$M_{fi} = ie(p_i^\mu + p_f^\mu) \int d^4x e^{-i(p_i - p_f) \cdot x} A_\mu(x)$$

- Consideriamo infine un potenziale Coulombiano

$$A_\mu(x) = (A_0, \mathbf{0}) \quad A_0(x) = A_0(\mathbf{r}) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$M_{fi} = ie(p_i^0 + p_f^0) \int d^4x e^{-i(p_i - p_f) \cdot x} A_0(x)$$

Scattering Coulombiano: spin 0

$$M_{fi} = ie(p_i^0 + p_f^0) \int d^4x e^{-i(p_i - p_f) \cdot x} A_0(x)$$

- L'ampiezza di transizione diventa pertanto

notare il segno e lo scambio $i \leftrightarrow f$

$$M_{fi} = ie(E_i + E_f) \int e^{-i(E_i - E_f)t} dt \int d^3\mathbf{r} e^{-i(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{r}} A_0(r)$$

- I due integrali sono indipendenti
 - L'integrale rispetto al tempo conduce ad una funzione δ

$$\int e^{-i(E_i - E_f)t} dt = 2\pi\delta(E_i - E_f)$$

- Il secondo integrale è la trasformata di Fourier del potenziale di Coulomb
 - Si calcola facilmente come limite per $m \rightarrow 0$ del potenziale di Yukawa

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i \quad \int d^3\mathbf{r} e^{-i(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{r}} A_0(r) = \frac{Ze}{\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{q}|^2}$$

$$\delta(E_i - E_f) \rightarrow E_i = E_f$$

- Inserendo nell'ampiezza di transizione

$$M_{fi} = ie(E_i + E_f) 2\pi\delta(E_i - E_f) \frac{Ze}{\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} = i\pi 4E_i \delta(E_i - E_f) \frac{Ze^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{q}|^2}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$$

$$M_{fi} = i4\pi^2 Z\alpha \frac{4E_i}{|\mathbf{q}|^2} \delta(E_i - E_f)$$

$$\hbar = c = 1$$

Scattering Coulombiano: spin 0

- Nella teoria perturbativa dipendente dal tempo la sezione d'urto è data dalla regola d'oro di Fermi

$$d\sigma = \frac{\dot{\mathcal{P}}}{\Phi}$$

- La quantità Φ è il flusso di particelle
- La quantità $\dot{\mathcal{P}}$ è la probabilità di transizione per unità di tempo e si calcola a partire dall'elemento di matrice M_{fi}

$$M_{fi} = (2\pi i) \delta(E_f - E_i) V_{fi} \quad \dot{\mathcal{P}} = 2\pi |V_{fi}|^2 \rho(E_f)$$

$E_i = E_f$



- La quantità $\rho(E_f)$ è la densità degli stati
- L'elemento di matrice ridotto V_{fi} viene introdotto per isolare la funzione δ
 - Il modulo quadrato della funzione δ non è definito
 - Viene calcolato con un opportuno processo di limite
- Ricordando il risultato della diapositiva precedente

$$M_{fi} = i4\pi^2 Z\alpha \frac{4E_i}{|\mathbf{q}|^2} \delta(E_i - E_f)$$

- Isoliamo l'elemento di matrice ridotto

$$V_{fi} = 2\pi Z\alpha \frac{4E_i}{|\mathbf{q}|^2}$$

Scattering Coulombiano: spin 0

- Veniamo adesso alla densità degli stati

- Ad una energia E_f corrispondono tutti gli stati con momento $\mathbf{p}_f$ $E^2 - m^2 = |\mathbf{p}|^2$
- Il numero di stati nell'elemento $d^3\mathbf{p}_f$ dello spazio delle fasi è

$$dN = \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f}$$

- Il fattore $2E_f$ nel denominatore è stato introdotto in modo da rendere dN invariante per trasformazioni di Lorentz
- Uguagliando al numero di stati nell'intervallo dE_f

$$\rho(E_f) dE_f = dN = \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f}$$

- Calcoliamo esplicitamente dN in funzione di dE_f
- Utilizzando le coordinate sferiche per $\mathbf{p}_f$

$$\frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} = \frac{|\mathbf{p}_f|^2 d|\mathbf{p}_f| d\Omega}{(2\pi)^3 2E_f} = \frac{|\mathbf{p}_f| E_f dE_f d\Omega}{(2\pi)^3 2E_f}$$

- In conclusione

$$\rho(E_f) = \frac{dN}{dE_f} = \frac{|\mathbf{p}_f| d\Omega}{2(2\pi)^3}$$

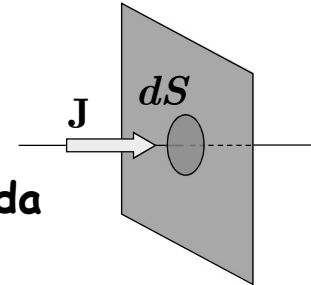
$$E^2 - m^2 = |\mathbf{p}|^2$$



$$2E dE = 2|\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|$$

Scattering Coulombiano: spin 0

- Per finire il flusso Φ
 - Le probabilità calcolate sono relative al flusso della corrente incidente (particelle incidenti)
 - La corrente dipende dalla normalizzazione delle funzioni d'onda



$$dN = |\mathbf{J}| dS \quad \Phi = \frac{dN}{dS} = |\mathbf{J}|$$

- Occorre tenere conto della normalizzazione degli stati
- Abbiamo visto che per le soluzioni dell'equazione di KG utilizzate ($N = 1$) si ha

$$\Phi = |\mathbf{J}| = 2|\mathbf{p}_i|$$

- Abbiamo pertanto

$$d\sigma = \frac{\dot{\mathcal{P}}}{\Phi} = \frac{2\pi |V_{fi}|^2}{\Phi} \rho(E_f) = 2\pi \frac{1}{2|\mathbf{p}_i|} \left| 2\pi Z\alpha \frac{4E_i}{|\mathbf{q}|^2} \right|^2 \frac{|\mathbf{p}_f| d\Omega}{2(2\pi)^3}$$

$$= (2\pi)^3 (Z\alpha)^2 \frac{(4E_i)^2}{|\mathbf{q}|^4} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} \frac{d\Omega}{4(2\pi)^3} = (Z\alpha)^2 \frac{4E_i^2}{|\mathbf{q}|^4} d\Omega$$

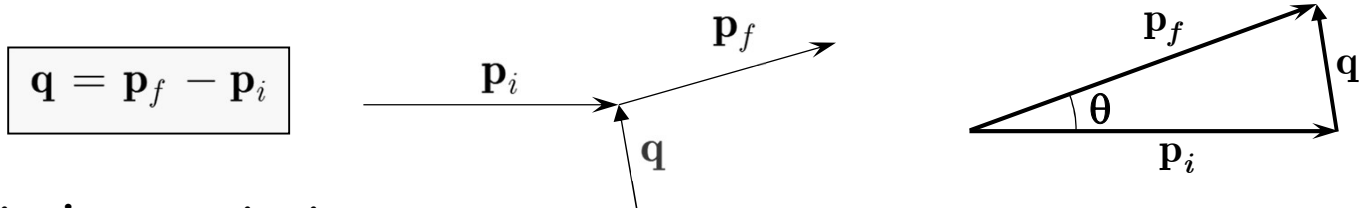
scattering elastico
 $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f|$

- In conclusione otteniamo la sezione d'urto differenziale per lo scattering di una particella a spin 0 da un potenziale Coulombiano è

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (Z\alpha)^2 \frac{E_i^2}{|\mathbf{q}|^4}$$

Scattering Coulombiano: spin 0

- Un'ultima elaborazione per sostituire l'angolo di diffusione al momento trasferito



- Otteniamo pertanto

$$q^2 = p_f^2 + p_i^2 - 2|\mathbf{p}_f||\mathbf{p}_i|\cos\theta \quad q^2 = 2p^2(1 - \cos\theta)$$

$$q^2 = 4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

- La sezione d'urto diventa pertanto

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (Z\alpha)^2 \frac{E_i^2}{4|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

- Da confrontare con la formula non relativistica

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (Z\alpha)^2 \frac{1}{(4E_K)^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$



Scattering Coulombiano: spin $\frac{1}{2}$

- Calcoliamo adesso la sezione d'urto per particelle di spin $\frac{1}{2}$
 - Il calcolo segue le linee precedenti seguite per la particella di spin 0
 - Occorre utilizzare gli spinori e il potenziale di Dirac
- Ricordiamo che l'introduzione dell'interazione elettromagnetica tramite l'accoppiamento minimale aveva condotto all'equazione di Dirac con potenziale V_D

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (H_o + V_D) \psi \quad \boxed{V_D = qV - q\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}}$$

- Come nel caso dell'equazione di KG utilizziamo la teoria perturbativa dipendente dal tempo
 - L'elemento di matrice diventa

$$M_{fi} = -i \int dt \int d^3\mathbf{r} \psi_f^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{V}_D(\mathbf{r}, t) \psi_i(\mathbf{r}, t)$$

- Utilizziamo due soluzioni con energia positiva

- Uno stato iniziale con momento $\mathbf{p}_i$ e spin s_i

$$\psi_i(x) = u(\mathbf{p}_i, s_i) e^{-ip_i \cdot x}$$

- Uno stato finale con momento $\mathbf{p}_f$ e spin s_f

$$\psi_f(x) = u(\mathbf{p}_f, s_f) e^{-ip_f \cdot x}$$

- Inserendo nell'elemento di matrice

$$M_{fi} = -i \int u_f^\dagger(\mathbf{p}_f, s_f) \hat{V}_D(x) u_i(\mathbf{p}_i, s_i) e^{-i(p_i - p_f) \cdot x} d^4x$$

Scattering Coulombiano: spin $\frac{1}{2}$

- Introduciamo $I = \gamma^0 \gamma^0$ fra lo spinore u_f e il potenziale V_D
 - Inoltre semplifichiamo la notazione: $u_i(p_i, s_i) = u_i$, etc.

$$M_{fi} = -i \int u_f^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \widehat{V}_D(x) u_i e^{-i(p_i - p_f) \cdot x} d^4x$$

- Elaboriamo l'espressione del potenziale

$$V_D = qV - q\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}$$

$$\gamma^0 V_D = q\gamma^0 A_0 - q\gamma^0 \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} = q\gamma^0 A_0 - q\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A} = q\gamma^\mu A_\mu$$

$$\gamma^0 \widehat{V}_D = q\gamma^\mu A_\mu$$

- Inserendo nell'elemento di matrice

$$M_{fi} = -iq \int \bar{u}_f \gamma^\mu u_i A_\mu e^{-i(p_i - p_f) \cdot x} d^4x$$

- Come nel caso di KG è interessante introdurre la corrente di transizione elettromagnetica

$$j_{em}^\mu(x) \equiv q\bar{\psi}_f(x)\gamma^\mu\psi_i(x) = q\bar{u}_f\gamma^\mu u_i e^{-i(p_i - p_f) \cdot x}$$

$$M_{fi} = -i \int j_{em}^\mu(x) A_\mu(x) d^4x$$

Scattering Coulombiano: spin $\frac{1}{2}$

- Per finire, consideriamo un elettrone ($q = -e$ $e > 0$) in un campo Coulombiano statico

$$M_{fi} = ie\bar{u}_f\gamma^\mu u_i \int A_\mu e^{-i(p_i - p_f) \cdot x} d^4x \quad A_\mu(x) = (A_0, \mathbf{0}) \quad A_0(x) = A_0(\mathbf{r}) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- Confrontando con il calcolo per la particella di spin 0

$$M_{fi} = ie(p_i^0 + p_f^0) \int d^4x e^{-i(p_i - p_f) \cdot x} A_0(x)$$

- Il calcolo dell'integrale è identico al caso della particella di spin 0
- Al termine $2E_i = (p_i^0 + p_f^0)$ sostituiamo $\bar{u}_f\gamma^0 u_i = u_f^\dagger u_i$
- Introducendo anche in questo caso l'elemento di matrice ridotto otteniamo

$$V_{fi} = 2\pi Z\alpha \frac{2}{|\mathbf{q}|^2} u_f^\dagger u_i$$

$$d\sigma = \frac{\dot{\mathcal{P}}}{\Phi} = \frac{2\pi |V_{fi}|^2}{\Phi} \rho(E_f) = 2\pi \frac{1}{2|\mathbf{p}_i|} \left| 2\pi Z\alpha \frac{2}{|\mathbf{q}|^2} \right|^2 |u_f^\dagger u_i|^2 \frac{|\mathbf{p}_f| d\Omega}{2(2\pi)^3} = (Z\alpha)^2 \frac{|u_f^\dagger u_i|^2}{|\mathbf{q}|^4} d\Omega$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (Z\alpha)^2 \frac{|u_f^\dagger u_i|^2}{|\mathbf{q}|^4}$$

Scattering Coulombiano: spin $\frac{1}{2}$

- Gli stati iniziale e finale possono avere ciascuno due stati di polarizzazione
 - Indicandoli convenzionalmente + oppure - otteniamo 4 sezioni d'urto

$$d\sigma_{++} \sim |u_+^\dagger u_+|^2 \quad d\sigma_{+-} \sim |u_+^\dagger u_-|^2 \quad d\sigma_{-+} \sim |u_-^\dagger u_+|^2 \quad d\sigma_{--} \sim |u_-^\dagger u_-|^2$$

- Supponiamo di distinguere (misurare) la polarizzazione dello stato finale
 - Se non utilizziamo un fascio polarizzato la sezione d'urto si ottiene mediando le due sezioni d'urto con polarizzazione dello stato iniziale + e -

media

$$d\sigma_+ = \left(\frac{1}{2}\right)(d\sigma_{++} + d\sigma_{+-}) \sim \frac{1}{2}(|u_+^\dagger u_+|^2 + |u_+^\dagger u_-|^2)$$

$$d\sigma_- = \left(\frac{1}{2}\right)(d\sigma_{-+} + d\sigma_{--}) \sim \frac{1}{2}(|u_-^\dagger u_+|^2 + |u_-^\dagger u_-|^2)$$

- Se non si osserva neppure la polarizzazione nello stato finale la sezione d'urto misurata è la somma $d\sigma = d\sigma_+ + d\sigma_-$

Somma, non media !

- Occorre pertanto calcolare

$$C = \frac{1}{2} \left[|u_+^\dagger u_+|^2 + |u_+^\dagger u_-|^2 + |u_-^\dagger u_+|^2 + |u_-^\dagger u_-|^2 \right]$$

- L'espressione C può essere calcolata utilizzando, ad esempio, la forma esplicita degli spinori nella rappresentazione di Dirac

Scattering Coulombiano: spin $\frac{1}{2}$

- Il calcolo di “forza bruta” (vedi problema 8.5 Aitchison 3rd ed.) porta al risultato

$$C = 4E_i^2 \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

- Introducendo nella formula della sezione d'urto

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \sum_{k=\pm, l=\pm} \frac{d\sigma_{kl}}{d\Omega} = (Z\alpha)^2 \frac{\sum_{k=\pm, l=\pm} |u_k^\dagger u_l|^2}{16|\mathbf{p}|^4 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

- Otteniamo finalmente

$$\boxed{\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = (Z\alpha)^2 \frac{E_i^2}{4|\mathbf{p}|^4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}$$

- Osserviamo che la differenza con la particella di spin 0 è data dal fattore $1 - \beta^2 \sin^2 \theta/2$
 - Il fattore diventa importante per $\beta \rightarrow 1$
 - Interazione di tipo magnetico: nel sistema di riposo dell'elettrone al campo elettrico si aggiunge un campo magnetico come effetto relativistico
- La sezione d'urto tende a zero per $\beta \rightarrow 1$ e $\theta \rightarrow \pi$
 - Vedremo che è dovuto alla conservazione del momento angolare