
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 2

30.09.2025

Equazione di Dirac 1
Soluzioni di onde piane
Matrici γ - Interpretazione di Dirac
delle soluzioni con energia negativa

anno accademico 2025-2026

Equazione di Dirac

- La prima difficoltà dell'equazione di Klein-Gordon è stata l'apparizione di una densità di probabilità negativa
 - Dovuta alla presenza della derivata seconda rispetto al tempo
- Dirac affrontò il problema in modo diretto richiedendo
 - 1. Un'equazione di primo grado rispetto al tempo
 - 2. Anche di primo grado rispetto alle coordinate spaziali per avere covarianza relativistica
 - 3. Che comunque riproducesse la corretta relazione $E^2 = p^2 + m^2$
 - Equivalente a richiedere che la funzione d'onda ψ sia anche soluzione dell'equazione di Klein-Gordon
 - 4. Inoltre l'equazione deve essere invariante per trasformazioni di Lorentz
- Con queste premesse Dirac ipotizzò che la forma dell'equazione potesse essere

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[-i \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + \beta m \right] \psi$$

$$\boxed{i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[-i \sum_k \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \beta m \right] \psi}$$

Equazione di Dirac

- Identifichiamo l'Hamiltoniana dell'equazione di Dirac

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[-i \sum_k \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \beta m \right] \psi \quad H = -i \sum_k \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \beta m \quad H = -i \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m$$

$$\boxed{i \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi}$$

- Per completezza, scriviamo anche l'equazione di Dirac in forma estesa quando $\hbar$ e c sono diversi da 1

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[-i\hbar c \sum_k \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \beta mc^2 \right] \psi$$

- Per determinare la natura delle grandezze α e β richiediamo il punto 3
 - 3. La funzione d'onda ψ deve soddisfare anche l'equazione di Klein-Gordon
- Appliciamo $i\partial/\partial t$ all'equazione di Dirac

$$i \frac{\partial}{\partial t} i \frac{\partial}{\partial t} \psi = i \frac{\partial}{\partial t} H \psi \quad -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = H i \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = H H \psi$$

Equazione di Dirac

- Introducendo la forma esplicita dell'Hamiltoniana

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \left[-i \sum_k \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \beta m \right] \left[-i \sum_l \alpha_l \frac{\partial}{\partial x_l} + \beta m \right] \psi$$

- Sviluppiamo il prodotto (facendo attenzione all'ordine nei prodotti)

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \left(-\sum_k \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_l \alpha_l \frac{\partial}{\partial x_l} - im \sum_k \alpha_k \beta \frac{\partial}{\partial x_k} - im \sum_l \beta \alpha_l \frac{\partial}{\partial x_l} + \beta^2 m^2 \right) \psi$$

- Raccogliamo i termini "diagonali" e i termini "incrociati" separatamente

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \left(-\sum_k \alpha_k^2 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - \sum_{\substack{k,l=1 \\ k>l}}^3 (\alpha_k \alpha_l + \alpha_l \alpha_k) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l} - im \sum_k (\alpha_k \beta + \beta \alpha_k) \frac{\partial}{\partial x_k} + \beta^2 m^2 \right) \psi$$

- Per ritrovare l'equazione di Klein-Gordon fissiamo condizioni su α_k e β

$$\alpha_k^2 = 1 \quad \alpha_k \alpha_l + \alpha_l \alpha_k = 0 \quad k \neq l \quad \alpha_k \beta + \beta \alpha_k = 0 \quad \beta^2 = 1$$

- Per soddisfare queste relazioni le quantità α_k e β non devono commutare
- Pertanto esse devono essere matrici

Proprietà delle matrici α e β

- Le relazioni appena trovate sono espresse più convenientemente introducendo l'anticommutatore di due matrici A e B : $\{A, B\} = AB + BA$

$$\{\alpha_j, \alpha_k\} = 2\delta_{jk} \hat{1} \quad \{\alpha_j, \beta\} = 0 \quad \beta^2 = \hat{1}$$

- Determiniamo alcune proprietà delle matrici α e β
 - Devono essere hermitiane (l'Hamiltoniana H deve essere hermitiana e $i\nabla$ è un operatore hermitiano)

$$H = -i\alpha \cdot \nabla + \beta m$$

- Dal momento che $\alpha^2 = \beta^2 = 1$ gli autovalori (reali) devono essere $\lambda = \pm 1$

$$\beta u = \lambda u \quad \beta^2 u = \lambda \beta u = \lambda^2 u \quad u = \lambda^2 u \quad \lambda^2 = 1 \quad \lambda = \pm 1$$

- Sono matrici con traccia nulla

- Sfruttiamo la proprietà ciclica della traccia $Tr[ABC] = Tr[CAB]$

- Abbiamo

$$\boxed{\beta^2 = \hat{1}}$$

$$\boxed{\beta \alpha_k = -\alpha_k \beta}$$

$$\boxed{Tr[ABC] = Tr[CAB]}$$

$$Tr[\alpha_k] = Tr[\beta^2 \alpha_k] = -Tr[\beta \alpha_k \beta] = -Tr[\beta^2 \alpha_k] = -Tr[\alpha_k]$$

- Concludiamo

$$\boxed{Tr[\alpha_k] = 0}$$

- E analogamente per β

$$\boxed{Tr[\beta] = 0}$$

Proprietà delle matrici α e β

- Le matrici hanno un rango pari
 - Traccia nulla e autovalori ± 1 implicano che il rango deve essere pari
- Abbiamo 4 matrici pertanto il valore minimo del rango è 4
 - Infatti le matrici di Pauli (2×2) hanno le proprietà richieste ma sono solo 3

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

non è un 4-vettore
di Lorentz

- Pertanto le matrici α e β hanno dimensione 4×4
 - Quindi anche la funzione d'onda ψ ha 4 componenti
- Ci sono infinite possibilità per le matrici α e β
 - Legate fra di loro da trasformazioni unitarie $\alpha' = U\alpha U^{-1}$
 - Ne considereremo 2
 - La rappresentazione di Pauli-Dirac
 - Utile per studiare l'approssimazione non relativistica
 - La rappresentazione di Weyl o rappresentazione Chirale
 - Utile nel limite di alta energia o massa della particella nulla
- In moltissimi casi comunque non è necessario scrivere esplicitamente le matrici

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

spinore

Rappresentazione di Pauli-Dirac

- Nella Rappresentazione di Pauli-Dirac le matrici sono

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} \hat{0} & \sigma_k \\ \sigma_k & \hat{0} \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{1} \end{pmatrix} \quad \hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- In questa forma (a blocchi) le quantità $\hat{1}$ e $\hat{0}$ sono matrici di dimensione 2×2
- Ricordiamo alcune proprietà delle matrici di Pauli σ

$$\{\sigma_k, \sigma_l\} = 2I\delta_{kl}$$

$$[\sigma_k, \sigma_l] = 2i\varepsilon_{klm}\sigma_m$$

sottointesa la somma su m

- Il tensore totalmente antisimmetrico ε_{klm} è così definito

- $\varepsilon_{123} = +1$

- $\varepsilon_{klm} = +1$ klm permutazione pari di 123

- $\varepsilon_{klm} = -1$ klm permutazione dispari di 123

- $\varepsilon_{klm} = 0$ due o più indici uguali

$$\sigma_k \sigma_l = -\sigma_l \sigma_k = i\sigma_m$$

$$\sigma_k \sigma_l = i \sum_m \varepsilon_{klm} \sigma_m$$

- La proprietà del commutatore si può anche scrivere (k, l, m ciclici)

- Dimostrare che

$$(\sigma \cdot \mathbf{a})(\sigma \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \hat{1} + i\sigma \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\exp[i\alpha \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}] = \hat{1} \cos \alpha + \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin \alpha \quad |\hat{\mathbf{n}}| = 1$$



Soluzioni dell'equazione di Dirac: onde piane

- Cerchiamo una soluzione del tipo (onda piana)

$$\psi(x) = w e^{-ip \cdot x}$$

- Nella soluzione x e p sono 4-vettori e w è uno spinore
- Inoltre abbiamo costruito l'equazione di Dirac in modo che ψ soddisfi anche l'equazione di Klein-Gordon e pertanto deve essere $p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$
- Sostituendo nell'equazione di Dirac

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[-i \sum_k \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \beta m \right] \psi$$

- Otteniamo l'equazione matriciale

$$p_0 w = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) w = H w$$

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m$$

- Dove ricordiamo che

$$p_0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \pm E_{\mathbf{p}} \quad E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} > 0$$

- Gli spinori w sono gli autovettori dell'equazione agli autovalori $H w = p_0 w$
- L'Hamiltoniana H è hermitiana
- Gli autovalori $\pm p_0$ sono 4 e sono reali
- Gli autovettori w sono ortogonali

Soluzioni dell'equazione di Dirac: onde piane

- Utilizziamo la rappresentazione di Pauli-Dirac per le matrici α
 - Introduciamo la rappresentazione a blocchi anche per lo spinore w
 - Le quantità ϕ e χ sono spinori di Pauli (dimensione 2)
- Introducendo nell'equazione

$$w = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$p_0 w = (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m) w$$

- Si ottiene l'equazione

$$p_0 \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \cdot \mathbf{p} \\ \sigma \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

- Dalla quale si ottengono le equazioni accoppiate per ϕ e χ

$$(p_0 - m)\phi = \sigma \cdot \mathbf{p} \chi \quad \Longrightarrow \quad \phi = \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{p_0 - m} \chi$$

$$(p_0 + m)\chi = \sigma \cdot \mathbf{p} \phi \quad \Longrightarrow \quad \chi = \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{p_0 + m} \phi$$

- Bisogna notare che le due equazioni non sono indipendenti

- Applicando l'operatore $\sigma \cdot \mathbf{p} / (p_0 + m)$ alla prima equazione ($\phi = \sigma \cdot \mathbf{p} / (p_0 - m) \chi$)

$$\frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{p_0 + m} \phi = \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{p_0 + m} \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{p_0 - m} \chi \quad \Longrightarrow \quad (\sigma \cdot \mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2$$

- Ritroviamo la seconda equazione $\frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{p_0 + m} \phi = \frac{\mathbf{p}^2}{p_0^2 - m^2} \chi$

$$\frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{p_0 + m} \phi = \frac{\mathbf{p}^2}{p_0^2 - m^2} \chi = \chi$$

Soluz. dell'equazione di Dirac: Energia positiva

- Il primo gruppo di soluzioni si trova dalla seconda equazione $(p_0 + m)\chi = \sigma \cdot \mathbf{p}\phi$
 - In questo caso usiamo l'autovalore positivo: $p_0 = +E_p$
 - Ricaviamo χ in funzione di ϕ $\chi = \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m}\phi$
 - Sostituiamo in w . La soluzione è pertanto $w(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m}\phi \end{pmatrix}$
 - Lo spinore (bidimensionale) ϕ è arbitrario
 - Ci sono due possibili spinori indipendenti ϕ_r , $r = 1,2$ quindi due possibili stati

$$w(\mathbf{p}, r) = \begin{pmatrix} \phi_r \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m}\phi_r \end{pmatrix}$$

Una possibile scelta è data da $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Se la particella ha una massa diversa da zero si può considerare il suo sistema di riposo ($\mathbf{p} = 0$) nel quale si ha $w(0, r) = \begin{pmatrix} \phi_r \\ 0 \end{pmatrix}$
 - Nel sistema di riposo i due spinori sono

$$w(0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w(0,2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{E infine} \quad \psi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \quad \psi_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}$$



Soluz. dell'equazione di Dirac: Energia negativa

- Il secondo gruppo di soluzioni si trova dalla prima equazione $(p_0 - m)\phi = \sigma \cdot \mathbf{p}\chi$
 - In questo caso usiamo l'autovalore negativo: $p_0 = -E_p$
 - Ricaviamo ϕ in funzione di χ $\phi = \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{p_0 - m}\chi$ $\phi = \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{-E_p - m}\chi$ $\phi = \frac{-\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m}\chi$
 - Sostituiamo in w ; la soluzione è pertanto $w(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{-\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m}\chi \\ \chi \end{pmatrix}$
 - Lo spinore χ è arbitrario
 - Ci sono due possibili spinori indipendenti χ_r , $r = 1, 2$ quindi due possibili stati

$$w(\mathbf{p}, r) = \begin{pmatrix} \frac{-\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m}\chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix}$$

Una possibile scelta è data da $\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Se la particella ha una massa diversa da zero si può considerare il suo sistema di riposo ($\mathbf{p} = 0$) nel quale si ha $w(0, r) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_r \end{pmatrix}$
- Nel sistema di riposo i due spinori sono

$$w(0, 3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w(0, 4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{E infine} \quad \psi_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+imt} \quad \psi_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+imt}$$



Soluzioni dell'equazione di Dirac: onde piane

- Abbiamo pertanto trovato 4 soluzioni

- Due soluzioni ($r = 1,2$) con energia positiva

$$\psi_r(x) = w(\mathbf{p}, r) \exp[-iE_p + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}] = w(\mathbf{p}, r) \exp[-ip \cdot x]$$

- Due soluzioni ($r = 3,4$) con energia negativa

$$\psi_r(x) = w(\mathbf{p}, r) \exp[+iE_p + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}] = \dots\dots\dots$$

- l'esponenziale con energia negativa non è in forma covariante

- Per le soluzioni con energia negativa si sostituisce $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$

- Si utilizzano pertanto gli spinori $w(-\mathbf{p}, r)$ (attenzione all'ortogonalità)

$$\psi_r(x) = w(-\mathbf{p}, r) \exp[+iE_p - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}] = w(-\mathbf{p}, r) \exp[+ip \cdot x]$$

- Per evitare di scrivere gli spinori con argomento negativo si definiscono due spinori per l'energia positiva $u(\mathbf{p}, r)$ e due spinori per l'energia negativa $v(\mathbf{p}, r)$

$\begin{aligned} u(\mathbf{p}, r) &= w(\mathbf{p}, r) & r &= 1, 2 \\ v(\mathbf{p}, r) &= w(-\mathbf{p}, r + 2) & r &= 1, 2 \end{aligned}$

- Scrivendo $v(\mathbf{p}, r)$ esplicitamente ($r = 1,2$)

$$w(\mathbf{p}, r + 2) = \begin{pmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix} \quad v(\mathbf{p}, r) = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix}$$

Forma covariante dell'Equazione di Dirac

- Dimostreremo che l'equazione di Dirac ha la stessa forma in tutti i sistemi inerziali

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[-i \sum_k \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \beta m \right] \psi$$

- Tuttavia la forma fin qui utilizzata non è manifestamente covariante
 - In particolare la coordinata t appare in modo diverso dalle x_k

- Moltiplichiamo l'equazione da sinistra per β

$$i\beta \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[-i \sum_k \beta \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \beta \beta m \right] \psi$$

- Utilizziamo $\beta^2 = 1$
- Definiamo $\gamma^0 = \beta$ e $\gamma^k = \beta \alpha_k$
- Introduciamo[†] $\partial^\mu = (\partial/\partial t, -\partial/\partial x^k)$ $\partial_\mu = g_{\mu\nu} \partial^\nu = (\partial/\partial t, \partial/\partial x^k)$
- Riordinando i termini otteniamo

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m\psi$$

$$i\rlap{\not{D}}\psi = m\psi$$

- È molto usata la notazione di Feynman (a_μ è un 4-vettore) $\rlap{\not{D}} \equiv \gamma^\mu a_\mu$
- Le matrici γ soddisfano le seguenti regole di commutazione

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2I g^{\mu\nu}$$

Attenzione: verificheremo che non sono (tutte) hermitiane

- [†]Vedi Aitchison, Hey - Gauge Theories in Particle Physics vol I - problema 3.1

Forma covariante dell'Equazione di Dirac

- Nella rappresentazione di Pauli-Dirac la forma delle matrici è

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{1} \end{pmatrix} \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} \hat{0} & \sigma_k \\ -\sigma_k & \hat{0} \end{pmatrix}$$

- In forma esplicita

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vale la pena rendersi conto di quello che la forma compatta dell'equazione di Dirac significa effettivamente

$$i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_0 \psi_1 \\ \partial_0 \psi_2 \\ \partial_0 \psi_3 \\ \partial_0 \psi_4 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \psi_1 \\ \partial_1 \psi_2 \\ \partial_1 \psi_3 \\ \partial_1 \psi_4 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_2 \psi_1 \\ \partial_2 \psi_2 \\ \partial_2 \psi_3 \\ \partial_2 \psi_4 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_3 \psi_1 \\ \partial_3 \psi_2 \\ \partial_3 \psi_3 \\ \partial_3 \psi_4 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

- Si tratta di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali

$$\begin{aligned} i[\partial_0 \psi_1 + (\partial_1 - i\partial_2) \psi_4 + \partial_3 \psi_3] &= m\psi_1 \\ i[\partial_0 \psi_2 + (\partial_1 + i\partial_2) \psi_3 - \partial_3 \psi_4] &= m\psi_2 \\ i[-\partial_0 \psi_3 - (\partial_1 - i\partial_2) \psi_2 - \partial_3 \psi_1] &= m\psi_3 \\ i[-\partial_0 \psi_4 - (\partial_1 + i\partial_2) \psi_1 + \partial_3 \psi_2] &= m\psi_4 \end{aligned}$$

Forma covariante dell'Equazione di Dirac

- Abbiamo visto le soluzioni (onde piane) dell'equazione di Dirac

- Due funzioni con energia positiva $u(\mathbf{p}, r) e^{-ip \cdot x}$

- Due funzioni con energia negativa $v(\mathbf{p}, r) e^{+ip \cdot x}$

- Applicando l'equazione di Dirac in forma covariante a queste soluzioni otteniamo due equazioni per gli spinori u e v

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m\psi$$

$$\gamma^\mu p_\mu u = mu \quad (\not{p} - m)u = 0 \quad -\gamma^\mu p_\mu v = mv \quad (\not{p} + m)v = 0$$

- Ricordarsi che si tratta di due equazioni matriciali
- Le soluzioni sono autofunzioni dell'equazione di Dirac
 - Spettro continuo, funzioni non normalizzabili
- Le soluzioni normalizzabili si costruiscono come pacchetti

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{r=1,2} \left[b(\mathbf{p}, r) u(\mathbf{p}, r) e^{-ip \cdot x} + d(\mathbf{p}, r) v(\mathbf{p}, r) e^{+ip \cdot x} \right]$$

- Si può verificare[†] che uno stato iniziale localizzato (ad esempio una distribuzione gaussiana $\times w(0,1)$), ha una rappresentazione che contiene sia energie positive che negative
- [†]Greiner W. - Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations, 3rd ed. - Springer cap. 8, es. 8.5

Proprietà delle matrici γ

- Le matrici γ hanno alcune delle proprietà delle matrici α e β
 - Traccia nulla, autovalori ± 1
- A differenza delle matrici α e β le matrici γ^k ($k = 1, 3$) non sono hermitiane

$$\gamma^{0\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0$$

$$\gamma^{k\dagger} = (\beta\alpha_k)^\dagger = \alpha_k^\dagger\beta^\dagger = \alpha_k\beta = -\beta\alpha_k = -\gamma^k$$

- Queste relazioni possono essere unificate

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$$

- Risulta molto utile anche l'aggiunto spinoriale (definito per una matrice qualsiasi, non solo per γ^μ)

$$\boxed{\overline{\gamma^\mu} \equiv \gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{\gamma^\mu} \equiv \gamma^\mu}$$

- Proprietà dell'aggiunto spinoriale (analoghe a quelle dell'aggiunto hermitiano)

$$\boxed{\overline{AB} = \overline{B}\overline{A}} \quad \boxed{\overline{aA + bB} = a^*\overline{A} + b^*\overline{B}}$$

- Va sottolineato che tutte le espressioni scritte sono matrici (4×4)

Proprietà delle matrici γ

- Vedremo che è utile definire anche l'aggiunto spinoriale per uno spinore

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

- Come nel caso dell'aggiunto hermitiano si tratta di un vettore-riga

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}^\dagger = (\cdot \cdot \cdot) \quad (\cdot \cdot \cdot) \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = (\cdot \cdot \cdot)$$

- Una proprietà del prodotto di matrici $\times$ spinori $A\psi \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$

$$\overline{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}} = (\cdot \cdot \cdot) \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad \boxed{\overline{A\psi} = \bar{\psi} \bar{A}}$$

- In seguito saranno molto utili quantità scalari costruite a partire dagli spinori come ad esempio

$$\bar{u}Av \quad (\cdot \cdot \cdot) \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = (\cdot)$$

- Calcoliamo il suo complesso coniugato

$$(\bar{u}Av)^* = (u^\dagger \gamma^0 Av)^* = (u^\dagger \gamma^0 Av)^\dagger = (v^\dagger A^\dagger \gamma^{0\dagger} u) = (v^\dagger \gamma^0 \gamma^0 A^\dagger \gamma^{0\dagger} u)$$

$$\boxed{(\bar{u}Av)^* = \bar{v} \bar{A} u = \overline{(\bar{u}Av)}}$$

Corrente conservata

- Studiamo adesso come definire una corrente j^μ per l'equazione di Dirac tale che

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m\psi$$

- Procediamo come nel caso delle equazioni di Schrödinger e di Klein-Gordon
 - Moltiplichiamo a sinistra per lo spinore aggiunto hermitiano

$$\psi^\dagger = (\psi_1^* \quad \psi_2^* \quad \psi_3^* \quad \psi_4^*)$$

$$i\psi^\dagger \gamma^\mu \partial_\mu \psi = m\psi^\dagger \psi$$

- Scriviamo l'equazione aggiunta hermitiana

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m\psi)^\dagger \rightarrow -i(\partial_\mu \psi)^\dagger \gamma^{\mu\dagger} = m\psi^\dagger$$

- Moltiplichiamo a destra per ψ e sottraiamo alla prima equazione

$$i\psi^\dagger \gamma^\mu \partial_\mu \psi + i(\partial_\mu \psi^\dagger) \gamma^{\mu\dagger} \psi = m\psi^\dagger \psi - m\psi^\dagger \psi = 0$$

- Se le matrici γ^μ fossero hermitiane $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^\mu$ si potrebbe scrivere $j^\mu = \psi^\dagger \gamma^\mu \psi$

no! sbagliate

- Possiamo però utilizzare l'aggiunto spinoriale

- Ricordiamo la definizione di aggiunto spinoriale per lo spinore ψ

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

Corrente conservata

- Ripetiamo il calcolo precedente sostituendo l'aggiunto hermitiano con l'aggiunto spinoriale
 - Moltiplichiamo l'equazione di Dirac a sinistra per l'aggiunto spinoriale di ψ

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = m\bar{\psi}\psi$$

- Scriviamo l'aggiunto spinoriale dell'equazione di Dirac

$$\overline{(i\gamma^\mu\partial_\mu\psi = m\psi)} \rightarrow i\gamma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} = \overline{m\psi}$$

$$-i(\partial_\mu\psi)^\dagger\gamma^\mu\gamma^0 = m\psi^\dagger\gamma^0$$

$$-i(\partial_\mu\psi^\dagger)\gamma^0\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = m\psi^\dagger\gamma^0$$

$$-i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu = m\bar{\psi}$$

$$-i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu = m\bar{\psi}$$

- Moltiplichiamo a destra per ψ

$$-i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi = m\bar{\psi}\psi$$

- E sottraiamo alla prima espressione $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi = m\bar{\psi}\psi - m\bar{\psi}\psi = 0$

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi = 0$$

- Il primo membro è la quadri-divergenza della corrente

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0$$

Corrente conservata

- Vediamo adesso se si può interpretare la corrente j^μ come densità di corrente di probabilità

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) = (\bar{\psi}\gamma^0\psi, \bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi)$$

- Consideriamo la densità

$$\rho = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$$

- Vediamo pertanto che, a differenza di quanto avveniva per l'equazione di Klein-Gordon la densità ρ è definita positiva ed è pertanto interpretabile come densità di probabilità

- Tuttavia anche l'equazione di Dirac conduce al paradosso di Klein
- Occorre comunque verificare che il 4-vettore j^μ abbia le corrette proprietà di trasformazione per una trasformazione di Lorentz
- Lo vedremo in seguito

- Approfondiamo un punto legato alla normalizzazione degli spinori
 - Fino a questo punto non abbiamo utilizzato la possibilità di definire la normalizzazione degli spinori w (o u, v)

- La quantità ρdV deve essere invariante per trasformazioni di Lorentz

- L'elemento di volume $dV = dxdydz$ si contrae come $1/\gamma$ $dV \rightarrow dV/\gamma$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$
- Pertanto ρ deve "dilatarsi" come γ

Normalizzazione degli spinori

- Con un calcolo diretto si può facilmente verificare che

$$\boxed{w^\dagger(\mathbf{p}, r) w(\mathbf{p}, r) = \frac{2E_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}} + m}} \quad w(\mathbf{p}, r) = \begin{pmatrix} \phi_r \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \phi_r \end{pmatrix}$$

- Analogamente per gli spinori di energia negativa
- Pertanto, se ridefiniamo la normalizzazione degli spinori come

$$w(\mathbf{p}, r) = \sqrt{E_{\mathbf{p}} + m} \begin{pmatrix} \phi_r \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \phi_r \end{pmatrix}$$

- Otterremo

$$\boxed{\rho = \psi^\dagger \psi = w^\dagger(\mathbf{p}, r) w(\mathbf{p}, r) = 2E_{\mathbf{p}}}$$

- Ovviamente $E_{\mathbf{p}}$ varia come γ ($E_{\mathbf{p}} = m\gamma$)
- Questa normalizzazione ha lo svantaggio di introdurre una dimensionalità
 - Qualche autore utilizza la normalizzazione $2E_{\mathbf{p}}/m$
 - Ha lo svantaggio che diverge per particelle con massa nulla
 - Ad esempio i neutrini
 - In Aitchison, Hey si usano entrambe; in Peskin Schroeder si usa $2E$

Normalizzazione degli spinori

- Per quanto riguarda l'ortogonalità degli spinori è facile verificare che gli spinori $w(\mathbf{p}, r)$ sono fra di loro ortogonali
 - Con la normalizzazione scelta ($r, q = 1, 4$)

$$w^\dagger(\mathbf{p}, r) w(\mathbf{p}, q) = 2E_{\mathbf{p}} \delta_{rq}$$

- Per esprimere queste condizioni utilizzando gli spinori $u(\mathbf{p}, r)$ e $v(\mathbf{p}, r)$ bisogna utilizzare cautela
 - Gli spinori v sono definiti come ($r = 1, 2$) $v(\mathbf{p}, r) = w(-\mathbf{p}, r+2)$
 - Le condizioni di normalizzazione e ortogonalità sono pertanto ($r, q = 1, 2$)

$$u^\dagger(\mathbf{p}, r) u(\mathbf{p}, q) = 2E_{\mathbf{p}} \delta_{rq}$$

$$v^\dagger(\mathbf{p}, r) v(\mathbf{p}, q) = 2E_{\mathbf{p}} \delta_{rq}$$

$$u^\dagger(\mathbf{p}, r) v(-\mathbf{p}, q) = v^\dagger(-\mathbf{p}, r) u(\mathbf{p}, q) = 0$$

- Notiamo incidentalmente che la normalizzazione degli spinori dipende da $\mathbf{p}$ e pertanto dipende dal sistema inerziale in cui si osserva lo spinore
 - Le trasformazioni di Lorentz per gli spinori (che introdurremo) non sono unitarie perché non preservano la norma dello spinore

Normalizzazione usando gli aggiunti spinoriali

- Introduciamo infine le normalizzazioni degli spinori utilizzando l'operazione di aggiunto spinoriale invece della coniugazione hermitiana
- Ad esempio, utilizzando la forma esplicita nella rappresentazione di Pauli-Dirac

$$u(\mathbf{p}, r) = \sqrt{E_{\mathbf{p}} + m} \begin{pmatrix} \phi_r \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \phi_r \end{pmatrix} \quad v(\mathbf{p}, r) = \sqrt{E_{\mathbf{p}} + m} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix}$$

- Utilizzando la rappresentazione di Pauli-Dirac si dimostra facilmente che

$$\bar{u}(\mathbf{p}, r) u(\mathbf{p}, q) = 2m \delta_{rq}$$

$$\bar{v}(\mathbf{p}, r) v(\mathbf{p}, q) = -2m \delta_{rq}$$

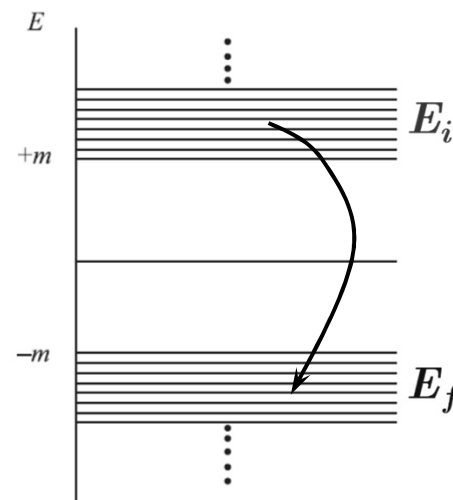
$$\bar{v}(\mathbf{p}, r) u(\mathbf{p}, q) = \bar{u}(\mathbf{p}, r) v(\mathbf{p}, q) = 0$$

- Sottolineiamo che in queste relazioni la quantità di moto $\mathbf{p}$ ha sempre lo stesso segno
- Si può dimostrare che queste relazioni valgono indipendentemente dalla rappresentazione
- Infine questa normalizzazione è invariante rispetto al sistema di riferimento



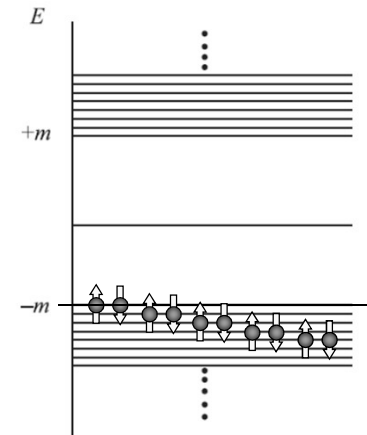
Interpretazione delle soluzioni con $p_o = -E_p$

- Nella teoria di Dirac sarebbe possibile interpretare senza problemi le soluzioni con energia positiva
 - La densità di probabilità è definita positiva
 - L'evoluzione temporale (libera) di una funzione d'onda che contiene solo stati con $p_0 > 0$ non conduce all'apparizione di stati con $p_0 < 0$
 - Tuttavia ci sono dei problemi
 - Da un punto di vista matematico gli autovettori dell'Hamiltoniana sono un sistema completo solo se si includono anche gli stati con $p_0 < 0$
 - L'evoluzione di uno stato iniziale localizzato (ad esempio una distribuzione gaussiana) porta a stati che contengono sia energie positive che negative
 - Infine se si introduce una interazione diventano possibili transizioni da stati di energia positiva a stati di energia negativa
 - Sarebbero transizioni che non assorbono energia bensì la cedono
- $$\Delta E = E_f - E_i < 0$$
- Sarebbero transizioni spontanee
 - Non esisterebbero stati stabili

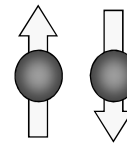


Interpretazione delle soluzioni con $p_o = -E_p$

- Dirac fornì una interessante soluzione a questi problemi
 - Le particelle descritte dall'equazione di Dirac sono fermioni
 - Obbediscono al principio di esclusione di Pauli

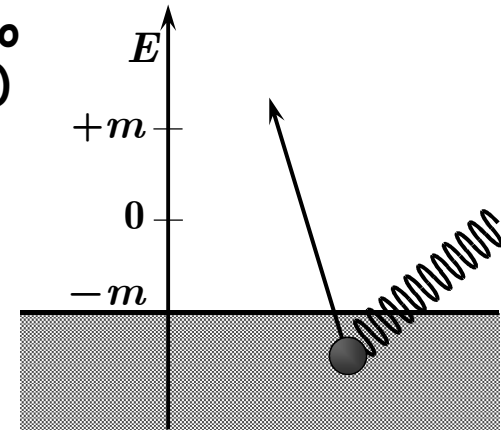


- Dirac ipotizzò che, in natura, tutti gli stati con energia negativa fossero occupati da elettroni
 - Introdusse così un "mare" di particelle con energie negative
 - Il mare ha una energia totale infinita ($E = -\infty$)
 - Il mare ha una carica infinita ($Q = -\infty$)
 - Il mare ha un momento angolare totale nullo (coppie up-down)
 - Non possono esserci transizioni spontanee a stati di energia negativa: tutti gli stati sono occupati
- Se uno stato fisico viene descritto rispetto a questo "mare" si giunge ad una descrizione accettabile e consistente



Interpretazione delle soluzioni con $p_o = -E_p$

- Consideriamo un sistema nel quale inizialmente ci sia solo il mare (tutti gli stati di energia negativa sono completi)
- Supponiamo che un fotone ceda al sistema una quantità di energia sufficiente per una transizione
 - Da uno stato con energia negativa $-E_k$, $-k$
 - Ad uno stato con energia positiva E_p , p



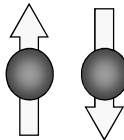
- Il bilancio energia-momento è

$$E_\gamma + (-E_k) = E_p \implies E_\gamma = E_p + E_k$$

$$p_\gamma + (-k) = p \implies p_\gamma = p + k$$

- Nello stato finale abbiamo

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Un elettrone di carica $- e$, momento p spin s • Il mare ha perso una particella <ul style="list-style-type: none"> • Si è creata una buca (hole) • La sua carica diminuisce di $- e$ • La sua energia diminuisce di $(-E_k)$ • Il suo momento diminuisce di $(-k)$ • Il suo spin diminuisce di s | <ul style="list-style-type: none"> • Abbiamo creato una particella • Nel sistema mare <ul style="list-style-type: none"> • La carica aumenta di e • L'energia aumenta di E_k • Il momento aumenta di k • Lo spin del mare diventa $-s$ |
|---|---|



- Abbiamo creato un'antiparticella con numeri quantici $|e|, m, E_k, k, -s$

Interpretazione delle soluzioni con $p_0 = -E_p$

- Con questa interpretazione riconsideriamo gli spinori con energia negativa

$$v(\mathbf{p}, r) = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix}$$

- Rappresentano una antiparticella di massa m e carica $+|e|$
- Il 4-momento della particella è $(E_p, \mathbf{p})$
 - Ricordiamo che lo spinore $v(\mathbf{p}, r)$ è definito a partire dalle soluzioni w con energia negativa e dalla relazione $v(\mathbf{p}, r) = w(-\mathbf{p}, r)$
- Se interpretiamo $v(\mathbf{p}, r)$ come la funzione d'onda della buca allora
 - Lo spinore $v(\mathbf{p}, 1)$ rappresenta uno stato con spin down $\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 - Lo spinore $v(\mathbf{p}, 2)$ rappresenta uno stato con spin up $\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Notare la corrispondenza fra valore "fisico" dello spin e numero dello stato
 - Inversa rispetto agli stati di energia positiva